Publicacions Matemàtiques, Vol 36 (1992), 663–671.

ULTRAPRODUITS GRADUÉS. APPLICATIONS

Ion D. Ion et Constantin Niţă*

Dédié à la mémoire de Pere Menal

Abstract

Dans cet travail sont définis les ultraproduits d'anneaux et de modules gradués. L'ultraproduit gradué coïncide dans le cas d'une famille $R_i[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, $i \in I$, d'anneaux de polynômes avec le sousanneau des éléments générés dans l'ultraproduit usuel par les familles de polynômes de degré total borné.

Nous démonstrons que l'ultraproduit d'une famille de modules gradués libres, qui verifie une condition naturelle de finitude et aussi un module gradué libre (Théorème 2.2). Après un etude de l'arithmétique des monoïdes commutatifs par rapport aux ultraproduits, nous démontrons que tout ultraproduit d'une famille d'extensions de Galois de degré borné est une extension de Galois de degré fini (Théorème 3.3).

Introduction

Les logiciens ont introduit et ont utilisé ultérieurement la notion d'ultraproduit dans leurs travaux. Amitsur a montré pour la première fois que cette notion peut-être utilisé dans la théorie des anneaux. Un application de cette idée est, par exemple, la démonstration d'un théorème de Posner qui décrit la structure des anneaux premiers qui satisfaient une identité polynômiale. Il est bien-connu que la théorie des ultraproduits a dévéloppé une technique très efficace dans l'algèbre commutative, tout particulièrement, pour les théorèmes d'approximation. Dans l'algèbre non-commutative les applications des ultraproduits sont plus ou moins accidentelles. Notre intention est d'élargir le domaine d'applicabilité de cette technique dans les problèmes d'algèbre non-commutative, particulièrement dans la théorie des anneaux gradués. Nous avons essayé une contribution dans cette direction. Dans la suite, sont donnés quelques résultats des auteurs, qui son réunis entre autres dans les travaux [4] et [5]. Au commencement, nous désirons rappeler un merveilleux travail [3], très utile dans ce domain des ultraproduits en génèral.

*Conférence presentée par M.C. Niţă a "International Workshop on Local Cohomology, Geometric Applications and Related Topics", Granada, Sept. 1991.

1. Géneralités sur les ultraproduits d'anneaux et modules

D'abord en deux mots on donnent quelques définitions sur l'ultraproduit usuel.

Soient I un ensemble infini et F un ultrafiltre non-principal sur I. Si $(R_i)_{i\in I}$ est une famille d'anneaux unitaires, on note $R = \prod_{i\in I} R_i$. Pour $a \in R$, $a = (a_i)$ soit $Z(a) = \{i \in I | a_i = 0\}$. Alors l'ensemble $Z_F(R) = \{a \in R | Z(a) \in F\}$ est un idéal idempotent de l'anneau R. L'anneau quotient $R_F = R/Z_F(R)$ s'appele l'ultraproduit de la famille $(R_i)_{i\in I}$ par rapport a F. Notons a^* l'image de $a \in R$ par le morphisme canonique $R \to R_F$.

D'une manière analogue, on définit l'ultraproduit d'une famille de modules $(M_i)_{i\in I}$, $M_i \in R_i$-mod. Soit $M = \prod_{i\in I} M_i \in R$-mod. L'ensemble $Z_F(M) = \{x \in M | Z(x) \in F\}$ est un sous-module de M et le module quotient s'appele l'ultraproduit de la famille $(M_i)_{i\in I}$ par rapport à F. Parce que $Z_F(R)M \subset Z_F(M)$, alors M_F est muni d'une structure de module sur R_F.

Proposition 1.1. *Soit* $C_F = \{N \in R\text{-}mod \,|\, Z_F(R) \subset \operatorname{ann}_R N\}$. *Alors* C_F *est un sous-catégorie localisante de R-mod, isomorphe à la catégorie* R_F*-mod.*

Soient $M = \prod_{i\in I} M_i$, $N = \prod_{i\in I} N_i$, *ou* M_i, $N_i \in R_i$*-mod pour tout* $i \in I$. *Si* $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$, $f = (f_i)$, *où* $f_i \in \operatorname{Hom}_{R_i}(M_i, N_i)$, $i \in I$, *alors l'application* $f_F : M_F \to N_F$, $f_F(x^*) = (f_i(x))^*$, $x \in M$, $x = (x_i)$ *est l'unique morphisme dans* $\operatorname{Hom}_{R_F}(M_F, N_F)$ *tel que* $\varphi_N \circ f = f_F \circ \varphi_M$, *où* $\varphi_M : M \to M_F$, $\varphi_N : N \to N_F$ *sont les morphismes canoniques.*

La correspondance $M \to M_F$ *a un caractère foncteuriel.*

Proposition 1.2. *Si pour tout* $i \in I$,

$$0 \longrightarrow M_i' \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte (exacte est scindée) dans R_i*-mod, alors*

$$0 \longrightarrow M_F' \longrightarrow M_F \longrightarrow M_F'' \longrightarrow 0$$

est un suite exacte (exacte et scindée) dans R_F*-mod.*

2. Ultraproduits gradués

Si on considère $(R_i[X_1, X_2, \ldots, X_n])_{i\in I}$ une famille d'anneaux de polynômes, il existe un morphisme canonique

$$\varphi : R_F[X_1, X_2, \ldots, X_n] \longrightarrow \left(\prod_{i\in I} R_i[X_1, X_2, \ldots, X_n]\right)_F$$

qui n'est pas un isomorphisme. On a donc qu'un ultraproduit d'une famille d'anneaux de polynômes n'est pas un anneau de polynômes (voir, par exemple [**3**], dans une démonstration d'un résultat de Robinson). L'image de φ est un sous-anneau de l'ultraproduit $(\prod_{i\in I} R_i[X_1, X_2, \ldots, X_n])_F$. Les éléments de cet sous-anneau sont representés par les familles bornées de polynômes.

Ici on trouve l'idée de construire un ultraproduit gradué. Les ultraproduits gradués d'algèbre de polynômes donnent un cadre naturel pour une série d'applications.

Dans la suite on présente la construction d'ultraproduit gradué. Soit G un monoïde tel que tout élément σ de G est régulier. Pour tout $i \in I$, soit R_i un anneau gradué de type G:

$$R_i = \bigoplus_{\sigma\in G} R_{i\sigma}, \qquad R_{i\sigma}R_{i\tau} \subset R_{i\sigma\tau}, \qquad \forall\sigma,\ \tau \in G.$$

Soient $R = \prod_{i\in I} R_i$ et $R^g = \bigoplus_{\sigma\in G} (\prod_{i\in I} R_{i\sigma}) \subset R$. Notons $R^g_\sigma = \prod_{i\in I} R_{i\sigma}$, $\sigma \in G$. Alors $R^g_\sigma R^g_\tau \subset R^g_{\sigma\tau}$ et donc R^g est un anneau gradué de type G. Il est facile de voir que $Z^g_F(R) = R^g \cap Z_F(R)$ est un idéal gradué de R^g. L'anneau gradué $R^g_F = R^g/Z^g_F(R)$ est appelé l'ultraproduit gradué de la famille $(R_i)_{i\in I}$. On a une définition analogue pour l'ultraproduits gradués d'une famille $(M_i)_{i\in I}$ de modules gradués de type G:

$$M_i = \bigoplus_{\sigma\in G} M_{i\sigma}, \qquad R_{i\sigma}M_{i\tau} \subset M_{i\sigma\tau}, \qquad \forall\sigma,\ \tau \in G.$$

Soient $M = \prod_{i\in I} M_i$, $M^g = \bigoplus_{\sigma\in G} (\prod_{i\in I} M_{i\sigma}) \subset M$, $Z^g_F(M) = Z_F(M) \cap M^g$.

On a que M^g est un R^g-module gradué de type G et $Z^g_F(M)$ est un R^g-sousmodule gradué de M^g. Alors $M^g_F = M^g/Z^g_F(M)$ s'appele l'ultraproduit gradué de la famille $(M_i)_{i\in I}$ de modules gradués. Parce que $Z^g_F(R)M^g \subset Z^g_F(M)$, alors M^g_F est muni d'une structure de R^g_F-module.

On dit qu'un élément $a \in R = \prod_{i \in I} R_i$, $a = (a_i)$ est de G-support fini, s'il existent $U \in F$ et $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in G$, tels que $a_i \in R_{i\sigma_1} + R_{i\sigma_2} + \cdots + R_{i\sigma_n}$, pour tout $i \in U$.

Dans la démonstration des certains résultats donnés dans la suite est importante la suivante:

Proposition 2.1. *L'ensemble $\{a^* | a \in R$, a avec le G-support fini$\}$ est un sous anneau de R_F, isomorphe à R_F^g.*

Soit S un ensemble d'éléments homogènes non-nuls d'un module gradué. Pour tout $\sigma \in G$ soit $S_\sigma = \{x \in S | \deg x = \sigma\}$. On dit que deux ensembles S et S' d'éléments homogènes nonuls sont *gr*-similaires si S_σ et S'_σ ont le même cardinal pour tout $\sigma \in G$. Dans ce cas on peut ecrire $S = (x_t)_{t \in T'}$, $S' = (x'_t)_{t \in T}$ tel que $\deg x_t = \deg x'_t$ pour tout $t \in T$.

Dans ce cas on dit que les ensembles S et S' sont *gr*-indexés d'un façon compatible.

Un resultat principal est le suivant:

Théorème 2.2. *Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille d'anneaux gradués de type G. Pour tout $i \in I$, soit $L_i = \bigoplus_{\sigma \in G} L_{i\sigma}$ un R_i-module gradué ayant un base homogène B_i. Supposons que les bases B_i, $i \in I$, sont gr-similaires, $B_i = (e_{it})_{t \in T}$, $\deg e_{it} = \deg e_{jt}$, pour tous i, $j \in I$ et $t \in T$ (c'est-à-dire, les bases sont gr-indexées d'un façon compatible). Si pour tout $\sigma \in G$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, t_2, \ldots, t_d \in T$ tels que on a la condition de finitude:*

$$(*) \qquad L_{i\sigma} \subset R_i e_{it_1} + R_i e_{it_2} + \cdots + R_i e_{it_d}, \qquad i \in I,$$

alors pour tout ultrafiltre nonprincipal F sur I, L_F^g est un R_F^g-module gradué libre et $B_F = (e_t^*)_{t \in T}$, où $e_t = (e_{it})$ est une R_F^g-base sur L_F^g, gr-similaire avec chaque base B_i, $i \in I$.

Dans le cas de monoïde $(\mathbb{N}, +)$ et de la graduation triviale sur R_i et L_i on obtient

Corollaire 2.3. *Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille infinie d'anneaux unitaires. Pour tout $i \in I$ soit L_i un R_i-module ayant un base à n éléments. Alors:*

1) [8] *L_F est un R_F-module libre ayant une base à n éléments.*
2) $\mathrm{End}_{R_F}(L_F)$ *est isomorphe à* $(\prod_{i \in I} \mathrm{End}_{R_i}(L_i))_F$.

Corollaire 2.4. [9] *Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille d'anneaux unitaires. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que $M_n(R_F)$ est isomorphe à $(\prod_{i \in I} M_n(R_i))_F$.*

Il est bien-connu [**6**] qu'un ultraproduit de corps est, de même, un corps. Pour le cas des anneaux simples un tel résultat n'est pas vraie [**1**]. D'après le corollaire précédent, il resulte:

> Si $(S_i)_{i\in I}$ est une famille d'aneaux simples tel que S_i est isomorphe a $M_n(K_i)$, $i \in I$ (pour le même ordre n) où K_i est un corps pour tout $i \in I$, alors chaque ultraproduit de $(S_i)_{i\in I}$ est encore un anneau simple isomorphe à $M_n((\prod_{i\in I} K_i)_F)$.

Corollaire 2.5. *Pour tout $i \in I$ soit P_i un R_i-module projectif ayant un système de générateurs à n elements. Alors P_F est un R_F-module projectif de type fini.*

Pour les algèbres de polynômes on utilise la graduation donnée par le degré total. On a:

Corollaire 2.6. *Pour tout $i \in I$ soit A_i une R_i-algèbre commutative. Si $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{id})$ est un système d'éléments de A_i, $i \in I$, algèbriquement indépendants sur R_i, alors les éléments $x_k^* = (x_{ik})^* \in R_F$, $1 \leq k \leq d$, son algèbriquement indépendants sur R_F. De plus, l'ultraproduit gradué des algèbres $R_i[x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{id}]$, $i \in I$, est isomorphe à l'algèbre $R_F[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_d^*]$.*

Donc, considerant la graduation donnée par le degré total pour l'algèbre de polynômes, on a que $R_F[X_1, X_2, \ldots, X_d]$ est isomorphe à $(\prod_{i\in I} R_i[X_1, X_2, \ldots, X_d])_F^g$, où $(R_i)_{i\in I}$ est une famille d'anneaux commutatifs et F un ultrafiltre nonprincipal sur I.

3. Divisibilité et ultraproduits

Quelques applications des ultraproduits imposent l'étude de la factorialité par rapport aux ultraproduits. La factorialité peut-être aborder soit pour monoïdes soit pour anneaux d'integrité. Dans l'étude de la factorialité pour monoïdes il est intéréssant de voir comme intervient d'un façon naturel, l'idée d'ultraproduit gradué.

Il est connu qu'un ultraproduit usuel d'anneaux factoriels n'est pas toujours un anneau factoriel [**10**].

Quoique on peut utiliser la construction deja faite dans la section 1 pour obtenir l'ultraproduit d'une famille d'anneaux d'integrité, nous rappelons en deux mots la construction d'ultraproduit pour monoïdes avec simplification.

Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de monoïdes commutatifs dont tous les éléments sont réguliers. Si a, $b \in \prod_{i\in I} M_i$, $a = (a_i)$, $b = (b_i)$ on pose:

$$a \sim_F b \text{ si et seulement si } \{i | a_i = b_i\} \in F.$$

Alors la rélation $\sim_F$ est une rélation d'équivalence sur le monoïde M, compatible avec le produit. Le monoïde quotient $M_F = M/\sim_F$ est appelé l'ultraproduit de la famille $(M_i)_{i\in I}$ de monoïdes. On voit que tous les éléments du monoïde M_F son réguliers. On note par $U(M)$, le groupe des éléments inversables du monoïde M.

Lemme 3.1. *Avec les notations précédentes, on a:*

1) $U(M_F) = (\prod_{i\in I} U(M_i))_F$;
2) *L'élément* $p^* \in M_F$, $p = (p_i) \in \prod_{i\in I} M_i$, *est un élément irreductible (premier) dans* M_F *si et seulement si* $\{i | p_i$ *irreductible (premier) dans* $M_i\} \in F$.

Les choses précédentes peut-être données pour anneaux d'integrité dont ultraproduit a été defini ci-dessus.

Soient maintenant les monoïdes $(M, \cdot)$ et $(G, \cdot)$. On dit que M est un monoïde G-gradué s'il existe une famille de sous-esembles $\{M_\sigma\}_{\sigma\in G}$ de M tel que $M = \bigcup_{\sigma\in G} M_\sigma$, $M_\sigma M_\tau \subset M_{\sigma\tau}$ pour tout σ, $\tau \in G$ et $M_\sigma \cap M_\tau = \phi$ pour tout $\sigma \neq \tau$.

Exemple. Soit M un monoïde factoriel, $(U, \cdot)$ le groupe des éléments inversables de M. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on défini $M_n = \{x \in M | l(x) = n\}$, où $l(x)$ est la longeur d'élément x. On a que M est un monoïde $\mathbb{N}$-gradué et $M_0 = U(M)$.

Un sousmonoïde $(N, \cdot)$ de monoïde gradué $(M, \cdot)$, $M = \bigcup_{\sigma\in G} M_\sigma$ est appelé gr-sousmonoïde de M si $N = \bigcup_{\sigma\in G} (M_\sigma \cap N)$.

Soient $(M_i)_{I\in I}$ une famille infinie de monoïdes G-gradués, $M_i = \bigcup_{\sigma\in G} M_{i\sigma}$ et F un ultrafiltre nonprincipal sur I. Si $M^g = \bigcup_{\sigma\in G} M_\sigma$, où $M_\sigma = \prod_{i\in I} M_{i\sigma}$, $\sigma \in G$, alors M^g est un sousmonoïde de M; il est clair que $(M^g, \cdot)$ est muni d'une structure de monoïde G-gradué. Evidement, $M_F^g = M^g/\sim_F = \{a^* \in M_F | a \in M^g\}$ est un sousmonoïde de $(M_F, \cdot)$ et $(M_F^g, \cdot)$ est muni d'une structure de monoïde G-gradué. Le monoïde $(M_F^g, \cdot)$ s'appele le gr-ultraproduit de la famille $(M_i)_{i\in I}$ de monoïdes gradues.

Soit $(M, \cdot)$ un monoïde commutative et $(S, \cdot)$ un sousmonoïde de M. Une famille $(x_t)_{t\in T}$ contenue dans $M\backslash S$, s'appele un système libre de générateurs (sur S) si tout element $x \in M$ s'ecrit d'un façon unique $x = ax_{t_1}^{e_1}x_{t_2}^{e_2}\dots x_{t_d}^{e_d}$, $d \geq 0$, $e_i \in \mathbb{N}^*$, $a \in S$. Alors M est un monoïde $\mathbb{N}$-gradué, où la graduation est donnée par:

$$(*) \qquad M_n = \left\{ ax_{t_1}^{e_1}x_{t_2}^{e_2}\dots x_{t_d}^{e_d} | a \in S,\, e_i \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{d} e_i = n \right\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple. Si $(M, \cdot)$ est un monoïde factoriel, $U = U(M)$ est le groupe d'éléments inversables, $(p_i)_{i\in T}$ est un système representatif d'éléments premiers, alors $(p_i)_{i\in T}$ est un système libre de générateurs (sur U) du monoïde M.

Il existe un théorème pour les monoïdes gradués analogue à celui énoncé pour les modules libres.

Théorème 3.2. *Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille infinie de monoïdes commutatifs tel que chaque monoïde M_i admet un système libre de générateurs $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_d})$ sur le sousmonoïde S_i de M_i, $d \in \mathbb{N}^*$. Si chaque M_i est gradué avec la graduation $(*)$, alors pour tout ultrafilter F sur I, M_F^g admet un système libre de générateurs sur sousmonoïde S_F.*

Ce théorème montre que dans certains cas de graduation pour les monoïdes factoriels, la propriété de factorialité se conserve par des ultraproduits.

Soient $(M_i)_{i\in I}$ une famille infinie de monoïdes factoriels, P_i un système representatif d'éléments premiers. On considère que M_i, $i \in I$, est $\mathbb{N}$-gradué par rapport à la longeur des éléments.

Si F est un ultrafiltre nonprincipal sur I, alors pour tout $a^* \in M_F$, avec a de longuer bornée, il existe d tel que $\{i | l(a_i) \leq d\} \in F$.

Soit P^* l'ensemble des éléments premiers du monoïde M_F, U^* l'ensemble des éléments inversables. On a, clairement, que $\mathrm{Fact}(M_F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle U^*, P^* \rangle$ (c'est-à-dire le sousmonoïde de M_F engendrée par U^* et P^*) est un monoïde factoriel.

On considère que chaque M_i est $\mathbb{N}$-gradué:

$$M_i = \bigcup_{n\geq 0} M_{in}, \qquad M_{in} = \{x_i \in M_i | l(x_i) = n\}.$$

Théorème 3.3. *Dans les conditions précédentes on a:*

1) $\mathrm{Fact}(M_F) = \{a^* \in M_F | a = (a_i)$ *a longuer bornée*$\}$.
2) $\mathrm{Fact}(M_F)$ *est isomorphe à* $(\prod_{i\in I} M_i)_F^g$.

4. Ultraproduits d'extensions de Galois

L'étude des ultraproduits d'extensions de Galois a imposé l'étude de la factorialité par rapport aux ultraproduits.

Soient $(L_i/K_i)_{i\in I}$ une famille d'extensions de corps commutatifs. Si pour tout $i \in I$ on a $[L_i : K_i] = n$, alors d'après le corollaire 2.3 il résulte $[L_F : K_F] = n$, F étant un ultrafiltre non-principal sur I.

Ci-dessus, ont été étudié entre autres la rélation de divisibilité dans les anneaux $K_F[X]$ et $L_F[X]$ et les polynômes irreductibles dans ces anneaux. On pose de même le problème de multiplicité des racines pour polynômes. Uitilisant les résultats d'arithmetique pour monoïdes factoriels, on peut caractériser le polynôme minimal sur K_F d'une élément $\alpha^* \in L_F$, $\alpha = (\alpha_i)$, $\alpha_i \in L_i$, $i \in I$, avec les polynômes minimaux de α_i, $i \in I$, sur K_i. On a

Lemme 4.1. *Si L_i/K_i est une extension separable de degré n pour tout $i \in I$, alors L_F/K_F est une extension separable de degré n.*

Lemme 4.2. *Si L_i/K_i est une extension normale de degré n, pour tout $i \in I$, alors L_F/K_F est une extension normale de degré n.*

Le résultat principal de cette section est le suivant:

Théorème 4.3. *Soit $(L_i/K_i)_{i\in I}$ une famille d'extensions de Galois de degré n. Alors:*

1) *L_F/K_F est une extension de Galois de degré n.*
2) *$\mathrm{Gal}(L_F/K_F)$ est isomorphe à $(\prod_{i\in I} \mathrm{Gal}(L_i/K_i))_F$.*

References

1. U. BARTOCCI, Sulla generalizzazione di un teorema di Kochen, *Rend. Accad. Naz. Linci* **XIV** (1968), 221–230.
2. J. BECHER, J. DENEF, L. LIPSCHITZ AND L. DRIES, Ultraproducts and approximation in local rings, *I. Inventiones Math.* **51** (1979), 189–205.
3. P. EKLOF, "*Ultraproducts for algebraists. Handbook of Mathematical Logic,*" ed. by J. Barwise, North-Holland, 1977.
4. I. D. ION AND C. NIŢĂ, Graded ultraproducts, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **35, 1** (1990), 41–48.

5. I. D. ION AND C. NIŢĂ, Ultraproducts of field extensions, *Bull. Math. de la Soc. Math. de Roumanie* **tome 34 (82), nr. 3** (1990), 247–254.

6. S. KOCHEN, Ultraproducts in the theory of models, *Ann. of Math., Ser. 2,* **74** (1961), 221–261.

7. C. NĂSTĂSESCU AND F. VAN OYSTAEYEN, "*Graded ring theory,*" North-Holland, 1982.

8. A. NIŢĂ, Ultraproducts of some classes of modules, *Bull. I. P. Bucuresti, seria Automatică* (1988).

9. A. NIŢĂ ET C. NIŢĂ, Sur l'ultraproduit des anneaux de matrices, *Bull. Math. de Soc. Sci. Math. de Roumanie* **tome 29 (77), nr. 3** (1985), 275–278.

10. G. SANTOSUOSSO, Sul transporto ad un ultraprodotto di anelli di proprieta dei suoi fattori, *Rend. Math.* **6, I** (1968), 82–100.

Faculté de Mathématiques
Université de Bucarest
Str. Academiei, nr. 14
Bucarest
ROMANIA

Rebut el 3 d'Abril de 1992