Publicacions Matemàtiques, Vol 36 (1992), 725–742.

COHOMOLOGIE LOCALE DE CERTAINS ANNEAUX AUSLANDER-GORENSTEIN

Marie-Paule Malliavin

Dédié à la mémoire de Pere Menal

Abstract

We give axiomatic conditions in order to calculate the local cohomology of some idempotent kernel functors. The results lie on some new dimension introduced by T. Levasseur for Auslander-Gorenstein rings. Under some hypothesis, we generalize previous result.

Nous donnons ici des conditions aussi axiomatiques que possible pour calculer la cohomologie locale de certains foncteurs noyaux idempotents.

Les résultats reposent sur la découverte récente faite par T. Levasseur d'une *dimension* pour les anneaux appelés Auslander-Gorenstein et qui sont des généralisations naturelles des anneaux de Gorenstein commutatifs.

En imposant à cette dimension de satisfaire un certain nombre d'hypothèses on retrouve certains des résultats de **[B.M]** et **[Ma2]**.

1. Généralités

Soit A un anneau. Sauf mention du contraire, tous les A-modules sont des modules à gauche. On notera $\operatorname{Mod} A$ la catégorie des A-modules à gauche et par $\operatorname{Mod}_f A$ la sous-catégorie des modules de type fini. On notera, lorsque cela sera nécessaire, par $\operatorname{Mod}^d(A)$ et $\operatorname{Mod}^d_f(A)$ les catégories correspondantes de A-modules à droite. On notera ${}_AM$ ou M_A pour indiquer que M est un A-module à gauche ou à droite. Cette notation sera utilisée surtout dans le cas où M est un A-bimodule.

L'anneau A est dit *noethérien* s'il est noethérien à gauche et à droite. Tous les anneaux qui interviendront seront noethériens.

Soit ${}_AM$ (resp. M_A) un A-module. Un élément $a \in A$ est dit *non diviseur de zéro* dans M si $ax = 0$, $x \in M$, entraîne $x = 0$ (resp. $xa = 0$ entraîne $x = 0$). Si M est un bimodule et si $a \in A$ est non diviseur de zéro dans ${}_AM$ (resp. M_A) on dit que a est non diviseur de zéro à gauche (resp. à droite) dans M. Si a est non diviseur de zéro à gauche et à droite dans A on dit que a est non diviseur de zéro. Par exemple, si A est noethérien et premier et si I est un idéal bilatère de A non nul, I contient un non diviseur de zéro.

Soit M un A-module, on notera dh_AM *la dimension homologique* de M et $\operatorname{inj.dim}_A M$ la dimension injective de M. On dira que A est *de dimension homologique globale finie* si la dimension homologique globale de ${}_AA$ et celle de A_A sont finies; elles sont alors égales car A est noetherien [**A**]. On notera alors $\operatorname{gl dim} A$ la dimension homologique globale de A. On dira que A est de dimension injective finie si les modules ${}_AA$ et A_A sont de dimension injective finies; elles sont alors égales [**Z**], car A est noetherien.

Si M est un A-module à gauche, on appelle *grade* de M et on note $j_A(M)$ (ou $j(M)$ si aucune confusion peut en résulter) le nombre entier naturel ou $+\infty$ défini par:

$$j_A(M) = \operatorname{Inf}\{i,\ \operatorname{Ext}^i_A(M, A) \neq 0\}.$$

On a évidemment $j_A((0)) = +\infty$. Si M est un A-module à droite on utilisera la notation $j^d_A(M)$ ou $j^d(M)$ pour le grade de M. On a toujours $j_A(M) \leq dh_A(M)$ pour $M \neq 0$ et si $\operatorname{inj.dim}(A) = \mu < \infty$ on a de façon evidente $j_A(M) \leq \mu$ pour tout A-module non nul M. On a les propriétés analogues pour j^d_A.

2. Conditions d'Auslander. Anneau Auslander-Gorenstein et dimension

Les définitions suivantes se trouvent dans [**BJ2**], [**Bj-Ek**], [**Ek**], [**Le2**].

2.1. Définition. Soit A un anneau noethérien. Un A-module à droite ou à gauche de type fini M satisfait *la condition d'Auslander* si quel que soit $q \geq 0$ on a $j_A(N) \geq q$ pour tout A-sous-module N de type fini de $\operatorname{Ext}^q_A(M, A)$.

2.2. Définition. L'anneau noethérien est dit *Auslander-Gorenstein* (resp. *Auslander régulier*) de dimension μ si

1) $\operatorname{inj.dim} A = \mu < \infty$ (resp. $\operatorname{gl dim} A = \mu < \infty$),
2) chaque A-module à droite ou à gauche de type fini satisfait la condition d'Auslander.

Il est clair qu'un anneau Auslander régulier est Auslander-Gorenstein. Dans l'article [**F.G.R.**] les anneaux Auslander-Gorenstein de dimension injective μ sont appelés anneaux μ-Gorenstein. La condition d'Auslander dans l'article précédemment cité est étudiée dans le contexte plus général de certaines catégories additives. D'autre part il résulte de [**Ba**] qu'un anneau commutatif noethérien de dimension injective finie est Auslander-Gorenstein, ceci n'est pas vrai dans le cas non commutatif comme le montre un exemple de I. Reiten [**Re**, Exemple 2.4.6].

Si A est un anneau Auslander régulier (resp. Auslander-Gorenstein) et S est un système de Ore à droite et à gauche de A, alors l'anneau des fractions $S^{-1}A$ est aussi Auslander régulier (resp. Auslander-Gorenstein); en effet si M (resp. N) est un A-module à gauche (resp. à droite) les $S^{-1}A$-modules à droite $\mathrm{Ext}^i_A(M,A)S^{-1}$ et $\mathrm{Ext}^i_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}A)$ sont isomorphes ainsi que les $S^{-1}A$-modules à gauche $S^{-1}\,\mathrm{Ext}^i_A(N,A)$ et $\mathrm{Ext}^i_{S^{-1}A}(NS^{-1}, S^{-1}A)$.

Le plus souvent les anneaux Auslander réguliers sont des anneaux positivement filtrés dont le gradué associé est un anneau de polynômes. Tel est les cas de l'algèbre de Weyl d'indice n sur un corps, ou de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie g de dimension finie sur un corps. Plus généralement si R est une k-algèbre qui est un anneau Auslander régulier (resp. Auslander-Gorenstein) et si g est une k-algèbre de Lie de dimension finie opérant sur R par k-dérivations, l'algèbre $R * U(g)$ [**Mc-Ro**] est elle-même Auslander régulière (resp. Auslander-Gorenstein).

2.3. Le résultat principal dans l'étude des anneaux de Auslander-Gorenstein est contenu dans le résultat suivant dont la preuve peut être trouvée dans [**Le1**] et qui généralise des résultats antérieurs de [**Bj1**].

Théorème. *Soit A un anneau noethérien tel que $\mu = \mathrm{inj}\,.\dim A < \infty$. Soit M un élément de* $\mathrm{Mod}_f(A)$.

(a) *Il existe une suite spectrale convergente dans* $\mathrm{Mod}_f(A)$, *soit*

$$E_2^{p,-q}(M) := \mathrm{Ext}^p_A(\mathrm{Ext}^q_A(M,A),A) \Rightarrow H^{p-q}(M)$$

où $H^{p-q}(M) = 0$ si $p \neq q$ et $H^0(M) = M$. Il en résulte une filtration finie sur M, appelée la b-filtration qui est de la forme

$$(0) = F^{\mu+1}M \subseteq F^{\mu}M \subseteq \cdots \subseteq F^1M \subseteq F^0M = M$$

(b) *si A est Auslander-Gorenstein on a des suites exactes*

$$0 \longrightarrow \frac{F^pM}{F^{p+1}M} \longrightarrow E_2^{p,-p}(M) \longrightarrow Q(p) \longrightarrow 0$$

où $p = 0, 1, \ldots, \mu$ et où $Q(p)$ est un sous-quotient de

$$\bigoplus_{i \geq 1}^{\mu-(p+1)} \operatorname{Ext}_A^{p+i+1}(\operatorname{Ext}_A^{p+i}(M, A), A)$$

(c) *les constructions précedentes sont fonctorielles en M.*

Remarque. Si M est un A-bimodule, on peut appliquer le théorème à ${}_AM$ et d'après le point (c) il résulte que la b-filtration de ${}_AM$ est formée de sous-bimodules de M, que les suites exactes établies en (b) sont des suites exactes de bimodules. Cependant on prendra garde que, par exemple, la b filtration pour ${}_AM$ n'a aucune raison de coïncider en général avec la b-filtration pour M_A. De même les modules $Q(p)$ apparaissant pour ${}_AM$ ne sont pas nécessairement identiques à ceux apparaissant pour M_A. On pourrait aussi déduire la remarque précédente d'une étude détaillée de la preuve du théorème 2.3.

2.4. Le théorème suivant est le résultat 1.8 de [**Bj2**]:

Théorème. *Soit A un anneau Auslander-Gorenstein. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de A-module de type fini à gauche on a $j_A(M) = \operatorname{Inf}\{j_A(M'), j_A(M'')\}$ et le même résultat est vrai pour une suite exacte de A-modules à droite.*

2.5. Par analogie avec certaines propriétés des dimensions, J.E. Björk introduit [**Bj1**] la définition suivante:

Définition. Soient A un anneau noethérien et M un A-module à gauche de type fini non nul. Le module M est dit *pur* si l'on a $j_A(N) = j_A(M)$ pour tous les sous-modules non nuls N de M. Lorsque $d = j_A(M)$ on précise en disant que M est *d-pur*.

On a alors le théorème suivant dont on pourra trouver la preuve dans [**Bj2**], [**Le1**], [**Bj-Ek**] et [**Li-Hu**]:

Théorème. *Soient A un anneau Auslander-Gorenstein, M un A-module de type fini non nul, d le grade de M. Alors*

(a) $\operatorname{Ext}_A^d(M, A)$ *est d-pur (la démonstration de ce fait est dûe à R. Fossum); en particulier* $\operatorname{Ext}_A^d(\operatorname{Ext}_A^d(M, A), A) \neq 0$.
(b) *Si* $\operatorname{Ext}_A^p(\operatorname{Ext}_A^p(M, A), A)$ *est non nul, c'est un module pur.*
(c) *Le module M est pur si et seulement si* $\operatorname{Ext}_A^p(\operatorname{Ext}_A^p(M, A), A) = 0$ *pour chaque $p \neq d$.*
(d) *F^pM est le plus grand sous-module X de M tel que le grade de X est $\geq p$.*
(e) $d = \sup\{p, M = F^pM\}$.

Remarque. On peut démontrer directement à partir du théorème 2.5(d) que si M est un bimodule, F^pM est, pour tout p, un sous-bimodule de M. En effet soit $a \in A$; alors $(F^pM)a$ est image homomorphe du A-module à gauche F^pM; donc d'après 2.4, $j_A(F^pM)$ est inférieur à $j_A[(F^pM)a]$. Par le théorème précédent, il vient $(F^pM)a \subseteq F^pM$.

2.6. On trouvera dans [**Le2**, Thm. 4.2] la preuve du théorème suivant:

Théorème. *Soient A un anneau Auslander-Gorenstein et $M \in \mathrm{Mod}_f(A)$ avec $j_A(M) \geq n$. Soit $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-modules de M. Alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $j_A(M_i/M_{i+1}) \geq n+1$ pour tous les i tels que $i \geq q$.*

Corollaire. *Si M est un module à gauche de type fini sur un anneau Auslander-Gorenstein A et si $\varphi \in \mathrm{End}_A(M)$ est injectif alors $j_A(M/\varphi(M) \geq j_A(M) + 1$.*

Preuve: On considère la suite décroissante de sous-modules $\{\varphi^i(M)\}_{i \in \mathbb{N}}$ et on a pour tout i un isomorphisme évident $\frac{\varphi^i(M)}{\varphi^{i+1}(M)} \to \frac{\varphi^{i+1}(M)}{\varphi^{i+2}(M)}$, puisque φ est injectif. Donc d'après le théorème $j(\frac{M}{\varphi(M)}) \geq j(M) + 1$. ■

Ce corollaire est démontré de façon plus générale en 4.3 de [**Le2**].

2.7. On trouvera dans [**Le2**] la définition et la preuve de la proposition suivante:

Définition. Soit A un anneau Auslander-Gorenstein de dimension μ. On définit la *dimension* de $M \in \mathrm{Mod}_f A$ par $\delta(M) = \mu - j(M)$. Puisque $j(M) = 0, 1, \ldots, \mu$ ou ∞, on a $\delta(M) = 0, 1, \ldots, \mu$ ou $-\infty$.

Proposition. *La fonction $\delta : \mathrm{Mod}_f A \to \{0, \ldots, \mu, -\infty\}$ possède les propriétés suivantes:*

(i) $\delta(0) = -\infty$.
(ii) *Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite de A-modules à gauche de type fini, on a $\delta(M) = \sup\{\delta(M'), \delta(M'')\}$.*
(iii) *Si P est un idéal premier de A et M est un A/P-module à gauche de type fini et de torsion, alors $\delta(M) \leq \delta(A/P) - 1$.*
(iv) *Si $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_i \supset \ldots$ est une chaîne de sous-modules, alors $\delta(M_i/M_{i+1}) \leq \delta(M) - 1$ pour i suffisamment grand.*

Ces propriétés ressemblent fort à la définition abstraite donnée par A. Joseph (Application de la théorie des anneaux aux algèbres enveloppantes, Cours de 3e cycle, 1981, Paris VI) à l'exception de deux propriétés sur les quelles nous reviendrons plus tard, à savoir que $\delta(M) =$

$-\infty$ si et seulement si $M = 0$ et $\delta(M) = 0$ si et seulement si M est un A-module non nul de longueur finie. Les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) et les deux propriétés supplémentaires sont vérifiées par la dimension de Krull et la dimension de Gelfand-Kirillov (pour les algèbres sur des corps), lorsque cette dernière est partitive.

Si A est un anneau commutatif Gorenstein de pure dimension, δ est la dimension de Krull classique de A.

Si A est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique nulle, δ est la dimension de Gelfand-Kirillov sur k.

Définition. On a une définition analogue à la précédente pour les modules à droite de type fini que l'on notera pour la différencier δ^d.

Remarque. A l'aide de δ, le résultat du théorème 2.3 et 2.5 peut être interprété comme suit. Posons $d = j_A(M)$, $\delta(M) = s = \mu - d$. Le sous-module F^pM est le plus grand sous-module X de M tel que $\delta(X) \leq \mu - p$. Le module $\mathrm{Ext}^d_A(M, A)$ est $\mu - s$ pur. On a des suites exactes fonctorielles

$$0 \longrightarrow \frac{F^pM}{F^{p+1}M} \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_A(\mathrm{Ext}^p_A(M, A), A) \longrightarrow Q(p) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{Ext}^p_A(\mathrm{Ext}^p_A(M, A), A)$ est soit nul soit p-pur et $\delta(Q(p)) \leq \mu - p - 2$.

2.8. Définition. Un A-module $M \in \mathrm{Mod}^f A$ non nul est dit *critique* si l'on a $\delta(M/N) \lneqq \delta(M)$ pour chaque sous-module non nul N de M. Si $\delta(M) = s$ on dit alors que M est s-critique et ceci est équivalent à $j(M/N) > j_A(M) = \mu - s$ pour tout sous-module non nul N de M.

Proposition [Mc-Ro, 6.2.10]. *Tout module non nul de type fini M possède un sous-module critique.*

Preuve: On raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe un entier $n \geq 0$ et un module M, $\delta(M) = n$, n'admettant pas de sous-module critique. D'après la propriété 2.7(ii) on peut trouver une chaîne strictement décroissante $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \ldots$ de sous-modules de M tels que $\delta(M) = \delta(M_i) = \delta(M_i/M_{i+1})$ ce qui contredit 2.7(iv). ∎

2.9. Le résultat suivant est bien connu pour la dimension de Gelfand-Kirillov. La preuve est la même ici.

Proposition. *Supposons la dimension δ idéal-invariante, c'est-à-dire que pour tout A-module de type fini M et tout idéal bilatère I de A, on a $\delta(I \otimes_A M) \leq \delta(M)$. Alors si M est un module critique, son annulateur est premier.*

Preuve: Soit $P = \mathrm{Ann}_A(M)$ et soit I et J deux idéaux bilatères de A tels que $IJ \subseteq P$. De l'application surjective naturelle $I \otimes_A M/JM \to IM$ résulte par 2.7(ii) que $\delta(IM) \leq \delta(I \otimes_A \frac{M}{JM})$. Puis par idéal-invariance $\delta(I \otimes_A \frac{M}{JM}) \leq \delta(\frac{M}{JM})$. Donc $\delta(IM) \leq \delta(\frac{M}{JM})$. Comme M est critique, ou bien $JM = 0$ et $J \subseteq P$ ou bien $JM \neq 0$. Donc $\delta(M/JM) \lneqq \delta(M)$ et $\delta(IM) \lneqq \delta(M)$. Donc par 2.7(ii) $\delta(M) = \delta(\frac{M}{IM})$ et donc $IM = 0$. D'où $I \subseteq P$. ■

3. La résolution injective minimale de certains anneaux Auslander-Gorenstein

Dans toute la suite on considèrera des idéaux bilatères P de A et des bimodules correspondants $M = A/P$. Pour le calcul de $\mathrm{Ext}^i_A(M, A)$ on utilisera la structure de A-module à gauche sur M et on mettra sur $\mathrm{Ext}^i_A(M, A)$ la structure de A/P-A-bimodule, A-module à droite provenant de la structure A_A et $\frac{A}{P}$-module à gauche provenant $M_{A/P}$. On calculera $\mathrm{Ext}^j_A(\mathrm{Ext}^i_A(M, A), A)$ pour la structure de A-module à droite de $\mathrm{Ext}^i_A(M, A)$.

3.1. Lemme. *Soient A un anneau Auslander-Gorenstein de dimension injective μ, P un ideal premier de A, $M = A/P$ et $j(M) = d$. Alors on a $M = F^d M$ et $F^{d+1}M = (0)$; en particulier M est d-pur.*

Preuve: D'après 2.5(e) on a $M = F^d M$ et d'après 2.5(a) $\mathrm{Ext}^d_A(\mathrm{Ext}^d_A(M, A), A)$ est non nul; il est donc d-pur. On en déduit que $j(F^d M/F^{d+1}M) = d = j(M)$. Si $F^{d+1}(M)$ n'était pas nul, il existerait un idéal bilatère I de A contenant strictement P tel que $F^{d+1}M = I/P$. L'idéal bilatère I/P de l'anneau noethérien A/P contiendrait un non diviseur de zéro. Donc $\delta(A/I) \leq \delta(A/P) - 1 \lneqq \delta(A/P)$. On obtiendrait la contradiction

$$\delta\left(\frac{M}{F^{d+1}M}\right) = \delta\left(\frac{F^d M}{F^{d+1}M}\right) \lneqq \delta(M) = \delta(A/P). \quad ■$$

3.2. Les deux théorèmes suivants sont essentiellement démontrés dans [**Ma1**]:

Théorème. *Soit A un anneau Auslander-Gorenstein de dimension injective μ. On suppose la dimension δ idéal-invariante. Soit P un idéal complètement premier de A, $M = A/P$ et $j_A(M) = d$. Soit $Fr(A/P)$ le* *corps des fractions de A/P. Alors le $Fr(A/P)$ espace vectoriel à gauche $Fr(A/P) \otimes_A \mathrm{Ext}^d_A(\mathrm{Ext}^d_A(M, A), A)$ est de dimension 1.*

Preuve: Considérons la suite exacte de A-bimodules

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{Ext}^d_A(\mathrm{Ext}^d_A(M, A), A) \longrightarrow Q(d) \longrightarrow 0$$

où $\delta(Q(d)) \leq \delta(M) - 2$ d'après la remarque 2.7. D'après la propriété (ii) de 2.7, on a, en posant $\overline{Q(d)} = \frac{Q(d)}{PQ(d)} = \frac{A}{P} \otimes_A Q(d)$, $\delta(\overline{Q(d)}) \leq \delta(Q(d)) \lneqq \delta(A/P)$. Il résulte de 2.7(ii) que chaque sous-module à gauche monogène de $\overline{Q(d)}$ est de la forme A/I où I est un idéal à gauche de A contenant strictement P. On a donc en posant $S = (A/P)\backslash\{0\}$, $S^{-1}\overline{Q(d)} = (0)$. Posons $V_d = \mathrm{Ext}^d_A(\mathrm{Ext}^d_A(M, A), A)$ et tensorisons la suite exacte de A-modules à gauche

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow V_d \longrightarrow Q(d) \longrightarrow 0 \text{ par } A/P.$$

On obtient la suite exacte de A/P-modules à gauche

$$\mathrm{Tor}^A_1(A/P, Q(d)) \longrightarrow A/P \longrightarrow \bar{V}_d \longrightarrow \overline{Q(d)} \longrightarrow 0$$

où on a posé $\bar{V}_d = V_d/PV_d$.

On décompose la suite précédente en les trois suites exactes

$$\mathrm{Tor}^A_1(A/P, Q(d)) \longrightarrow J/P \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow J/P \longrightarrow A/P \longrightarrow A/J \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$0 \longrightarrow A/J \longrightarrow \bar{V}_d \longrightarrow \overline{Q(d)} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

où J est un idéal à gauche de A contenant P.

Montrons que J coincide avec P. En effet si l'on avait $J \supsetneqq P$, il résulterait de 2.7(iii) que

$$\delta(A/J) \leq \delta(A/P) - 1 \lneqq \delta(A/P).$$

Tensorisant la suite exacte de A-modules à droite

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow A/P \longrightarrow 0$$

par $Q(d)$, on obtient

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_1(A/P, Q(d)) \longrightarrow P \otimes_A Q(d) \longrightarrow Q(d) \longrightarrow \overline{Q(d)} \longrightarrow 0.$$

D'après 2.7(ii) on a

$$\delta(\mathrm{Tor}_1^A(A/P, Q(d)) \leq \delta(P \otimes_A Q(d))$$

et en raison de l'idéal-invariance de δ, on a

$$\delta(P \otimes_A Q(d)) \leq \delta(Q(d)) \lneqq \delta(A/P).$$

D'après la suite exacte (1) et en appliquant 2.7(ii) on a

$$\delta(J/P) \leq \delta(\mathrm{Tor}_i^A(A/P, Q(d)).$$

Il résulte de tout ceci que $\delta(J/P) \lneqq \delta(A/P)$.

La suite exacte (2) et la partitivité de δ (cf. 2.7(ii)) donne

$$\delta(A/P) = \sup(\delta(J/P), \delta(A/J)).$$

En utilisant les inégalités $\delta(A/J) \lneqq \delta(A/P)$ et $\delta(J/P) \lneqq \delta(A/P)$ on arrive à une contradiction.

On a donc démontré que $J = P$. La suite exacte (3) devient

$$0 \longrightarrow A/P \longrightarrow \bar{V}_d \longrightarrow \overline{Q(d)} \longrightarrow 0.$$

En appliquant S^{-1} à cette suite, où $S = (A, P)\backslash\{0\}$, on obtient

$$0 \longrightarrow Fr(A/P) \longrightarrow S^{-1}\bar{V}_d \longrightarrow S^{-1}\overline{Q(d)} \longrightarrow 0.$$

Comme $S^{-1}\overline{Q(d)} = 0$, il vient

$$\begin{aligned} Fr(A/P) \cong S^{-1}\bar{V}_d = Fr\left(\frac{A}{P}\right) \otimes_A V_d = \\ = Fr(A/P) \otimes_A \mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A), \end{aligned}$$

qui est l'isomorphisme cherché. ■

3.3. On va étendre la dimension δ_g à tout A-module à gauche non nécessairement de type fini en posant

$$\delta_g(N) = \sup\{\delta_g(Q)\}$$

où Q parcourt les sous-modules de type fini de N. Il est clair d'après 2.7(ii) que $\delta_g(N) = \delta(N)$ si N est de type fini.

Définition. On dira qu'un idéal premier P de A est *d-modéré à gauche* si pour $d = j(A/P)$ on a pour tout $i > d$,

$$\delta_g(\mathrm{Ext}^i_A(A/P, A)) \lneqq \delta(A/P).$$

Il est clair que si $\mu = d$, tout idéal premier de A est μ-modéré à gauche car alors pour $i > \mu$

$$\mathrm{Ext}^i_A(A/P, A) = 0 \text{ donc } \delta_g(\mathrm{Ext}^i_A(A/P, A)) = -\infty.$$

Remarque. Si A est une algèbre sur un corps k, il résulte de [**Len**, Lemme 2] que si δ est la GK-dimension de A, alors tout idéal premier de A est modéré à gauche.

3.4. Définition. Soient A un anneau noethérien, P un idéal complètement premier de A. On notera $\mu_i(P, A)$ et on appellera $i^{\text{ième}}$ *invariant de Bass* de A la dimension sur le corps gauche $Fr(A/P)$ de l'espace vectoriel

$$Fr(A/P) \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}^i_A(A/P, A).$$

Théorème. *Soient A un anneau Auslander-Gorenstein de dimension injective μ, P un idéal complètement premier de A, d le grade du A-module à gauche $M := A/P$. On a alors*

(i) *$\mu_d(P, A) \neq 0$ et $\mu_i(P, A) = 0$ si $i \lneqq d$,*
(ii) *Si P est d-modéré à gauche on a $\mu_i(P, A) = 0$ pour $i \neq d$.*

Preuve: Posons $S = (A/P)\setminus\{0\}$, $K = Fr(A/P)$.

(i) On a évidemment $\mu_i(P, A) = 0$ si $i < d$ puisque $\mathrm{Ext}^i_A(A/P, A) = 0$ pour $i < d$. Montrons que $\mu_d(P, A) \neq 0$. Pour cela raisonnons par l'absurde; supposons que $\mu_d(P, A) = 0$ et arrivons à une contradiction

$$K \otimes_A \mathrm{Ext}^d_A(M, A) = S^{-1}\,\mathrm{Ext}^d_A(M, A) = 0.$$

En tant que A-module à droite, le bimodule $\mathrm{Ext}^d_A(M, A)$ est de type fini; donc il existe $s \in A\setminus P$ tel que $s\,\mathrm{Ext}^d_A(M, A) = 0$. La multiplication à gauche par s dans $\mathrm{Ext}^d_A(M, A)$ provient de la multiplication à droite par s dans $M = A/P$. Mais P étant complètement premier, la multiplication à droite par s dans A/P conduit à une suite exacte de A-modules à gauche.

$$0 \longrightarrow A/P \xrightarrow{\cdot s} A/P \longrightarrow \frac{A}{P + As} \longrightarrow 0,$$

d'où la suite exacte de A-modules à droite

$$\operatorname{Ext}_A^d(A/P + As, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A) \xrightarrow{\cdot s} \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A).$$

D'après 2.7(iii) on a $\delta(A/P + As) \lneqq \delta(A/P) = \mu - d$. Donc $\operatorname{Ext}_A^d(A/P + As, A) = 0$ et la multiplication à gauche par s est injective; comme $s \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A) = 0$, on a $\operatorname{Ext}_A^d(A/P, A) = 0$, ce qui contredit la définition de d.

(ii) Supposons P modéré à gauche et $i > d$ et notons N_i le $\frac{A}{P}$-A-bimodule $\operatorname{Ext}_A^i(M, A)$. Alors $\delta_g(N_i) \lneqq \delta(A/P)$. Par suite chaque sous-module monogène Q de ${}_{A/P}(N_i)$ est tel que $\delta(Q) \lneqq \delta(A/P)$. Comme Q est isomorphe à A/I où I est un idéal à gauche de A contenant P, cet idéal contient strictement P. Donc, puisque P est complètement premier, $S^{-1}Q = 0$. Il en résulte que $S^{-1}N_i = (0)$ c'est-à-dire $\mu_i(P, A) = 0$. ■

Remarques. 1) Pour un idéal complètement premier, la condition de modération à gauche est équivalente au fait que $\mu_i(P, A) = 0$ pour $i \neq d$ où $d = j(A/P)$. En effet si $d < i$ et $S^{-1} \operatorname{Ext}_A^i(A/P, A) = 0$, alors pour tout sous-module monogène Q du A/P-module à gauche $\operatorname{Ext}_A^i(A/P, A)$ on a $S^{-1}Q = 0$. Donc $Q \simeq A/I$ où I est un idéal à gauche de A contenant strictement P. Par 2.7(ii), on a $\delta_g(Q) < d$ et donc $\delta_g(\operatorname{Ext}_A^i(A/P, A)) < \delta(A/P)$.

2) Si A est le localisé en une clique d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie alors $\mu(A)$ est la dimension de Krull de A (cf. [**Br**]) et tout idéal (maximal) de A est modéré à gauche pour la dimension $K\text{-}\dim A - j(M)$ .Il ne devrait pas être difficile de démontrer que pour tout A-module à gauche M de type fini de A on a $K\text{-}\dim M = K\text{-}\dim A - j(M)$ mais ceci est vrai pour un module de la forme A/P où P est un idéal maximal et, par récurrence sur la longueur, on le démontre pour tout A-module de longueur finie.

3.5. On supposera que l'anneau A est Auslander-Gorenstein, que la dimension δ est idéal-invariante que tous les idéaux premiers de A sont complètement premiers et modérés à gauche. Comme l'anneau A est noethérien, chaque A-module (à gauche) injectif est somme directe d'injectifs indécomposables ([**Str.**, V.4.5]). Un A-module injectif indécomposable est de la forme $E(X)$, l'enveloppe injective d'un A-module δ-critique X où $\operatorname{Ann}_g(X) = P$ est premier; ceci résulte du fait que les injectifs indécomposables sont uniformes et que chaque module non nul contient un sous-module δ-critique dont l'annulateur est premier, car δ est supposé idéal-invariante. Alors ou bien le module X est sans torsion comme A/P-module auquel cas X est isomorphe à un idéal à gauche du domaine A/P, puisque P est supposé complètement premier et l'on a $E(X) = E(A/P)$; ou bien X est un A/P-module de torsion.

Finalement sous les hypothèses précédentes, tout A-module injectif est de la forme $E^I \oplus E^{II}$ où $E^I = \underset{P\in\mathrm{Spec}(A)}{\oplus} \nu(P)E(A/P)$, les $\nu(P)$ étant des cardinaux et où E^{II} est l'enveloppe injective d'une somme de modules δ-critiques chacun d'eux étant de torsion modulo son annulateur.

En particulier ceci s'applique aux termes $E_i (i = 0, 1, \dots, \mu)$ de la résolution injective minimale de ${}_AA$ et il est clair que $\mu_i(P, A)$ est le cardinal $\nu(P)$ défini dans la décomposition de E_i^I en facteur irréductibles; en effet puisque $\mathrm{Hom}_A(A/P, \oplus\nu(P)A/P) \simeq \oplus\nu(P)A/P$, isomorphisme de A/P-modules à gauche, il résulte de la définition des groupes $\mathrm{Ext}_A(-, A)$ en terme de la résolution injective de ${}_AA$, que $\mu_i(P, A)$ est exactement le rang uniforme maximal d'un A/P-sous-module sans torsion du module à gauche $\mathrm{Ext}_A^i(A/P, A)$. On a donc la généralisation suivante d'un résultat de [**Ma1**].

Théorème. *Soient A un anneau Auslander-Gorenstein, dont la dimension δ est idéal-invariante et dont tous les idéaux premiers sont complètement premiers et modérés à gauche. Alors la résolution injective minimale du A-module ${}_AA$ est de la forme*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\mu \longrightarrow 0$$

où $E_i \equiv E_i^I \oplus E_i^{II}$ avec $E_i^I = \underset{\substack{P\in\mathrm{Spec}(A)\\ j(A/P)=\mu}}{\ominus} \nu(P)E(A/P)$ et où E_i^{II} est l'enveloppe injective d'une somme de modules δ-critiques, chacun d'eux étant de torsion modulo son annulateur.

3.6. Dans ce paragraphe nous utiliserons une forme affaiblie du théorème 3.5 et qui se démontre de manière analogue.

Théorème. *Soient A un anneau Auslander-Gorenstein de dimension injective μ dont tout idéal premier de grade μ est complètement premier. On suppose que la dimension δ est idéal-invariante. Alors le dernier temre de la résolution injective minimale de ${}_AA$ est $E_\mu = E_\mu^I \oplus E_\mu^{II}$ où $E_\mu^I = \underset{\substack{P\in\mathrm{Spec}(A)\\ j(A/P)=\mu}}{\oplus} \nu(P)E(A/P)$ et où E_μ^{II} est l'enveloppe injective d'une somme de modules δ-critiques, chacun d'eux étant de torsion modulo son annulateur.*

3.7. Les paragraphes 3.5 et 3.6 ne donnent aucune information sur les invariants de Bass $\nu(P)$. Cependant il existe des cas où l'on sait que $\nu(P) = 1$: c'est en premier lieu celui des anneaux commutatifs Gorenstein [**Ba**] et en second celui des algèbres enveloppantes des algèbres de

Lie résolubles de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle [**Ma1**]. Ce dernier résultat a été retrouvé par une autre démonstration utilisant la localisation en des cliques [**Br-Le**].

4. Cohomologie locale de certains anneaux Auslander-Gorenstein

4.1. Dans tout ce paragraphe A designera un anneau noethérien sur lequel nous ferons les hypothèses (A), (B) et (C) suivantes.

(A) *Tout idéal à gauche maximal de A est bilatère (et évidemment maximal).* Un calcul évident montre alors que tout idéal maximal est complètement premier.

(B) *La famille $\mathcal{F}$ des idéaux bilatères co-artiniens de A est une famille d'Artin-Rees à gauche,* un idéal I co-artinien étant tel que l'anneau A/I est artinien. Il n'est pas nécessaire de préciser si l'idéal est co-artinien à droite ou à gauche puisque A est noethérien à droite et à gauche.

Remarquons que $\mathcal{F}$ est la famille des idéaux bilatères de A qui contiennent un produit d'idéaux bilatères maximaux. Rappelons qu'une famille d'idéaux bilatères est dite d'Artin-Rees à gauche si elle vérifie:

a) Si $I \in \mathcal{F}$ et $I \subseteq J$ où J est un idéal bilatère de A, alors $J \in \mathcal{F}$.
b) Si I et $J \in \mathcal{F}$ alors le produit IJ appartient à $\mathcal{F}$.
c) Si N est un A-module à gauche de type fini et M un sous-A-module de N, si $I \in \mathcal{F}$, il existe $J \in \mathcal{F}$ tel que $JN \cap M \subseteq IM$.

Les propriétés (A) et (B) sont vérifiées si A est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle [**B.M**] ou si A est le localisé d'une telle algèbre en une clique [**Ma2**].

On notera σ le foncteur noyau idempotent symétrique correspondant à la famille $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\sigma = \varinjlim_{\mathcal{F}} \operatorname{Hom}_A(A/I, -)$. Il résulte de [**He-Ve**, Proposition 2] et de [**Ve**, Proposition 5.8] que σ est stable, c'est-à-dire que la classe Π_σ des A-modules de σ-torsion est fermée par enveloppe injective.

On notera $\mathrm{Mod}_A^{\mathcal{F}}$ la sous-catégorie pleine et épaisse de mod_A^f dont les objets sont les A-modules dont l'annulateur appartient à $\mathcal{F}$.

La dernière hypothèse que l'on mettra sur l'anneau A est la suivante:

(C) *L'anneau A est Auslander-Gorenstein, δ est idéal-invariante; on a $\delta(M) = 0$ si et seulement si M est de longueur finie non nul; si $\delta(M) = -\infty$ alors $M = (0)$;* cette dernière condition est trivialement vérifiée si A est Auslander régulier.

4.2. On démontre comme dans la proposition 2.11 de [**B.M**] le résultat suivant:

Proposition. *Soit A un anneau vérifiant les conditions de 4.1 et soit μ la dimension injective de A. On pose $T = \mathrm{Ext}_A^\mu(-, A)$. Alors T est naturellement équivalent sur la catégorie $\mathrm{Mod}_A^{\mathcal{F}}$ à $\mathrm{Hom}_A(-, E)$ où $E = \varinjlim_{\mathcal{F}} \mathrm{Ext}_A^\mu(A/I, A)$. De plus E est un A-module à gauche injectif.*

Si on note H_σ^* la cohomologie locale relative à σ, on a donc $H_\sigma^\mu(A) = E$.

On veut montrer que sous les hypothèses de 4.1, E apparaît comme le dernier terme de la résolution injective minimale du A-module à gauche ${}_AA$.

4.3. Lemme. *Soit I un idéal bilatère co-artinien de A. Alors on a*

$$\mathrm{Hom}_A(A/I, E_q^{II}) = 0 \text{ pour tout } q = 0, \dots, \mu.$$

Preuve: Il suffit de vérifier que $\mathrm{Hom}_A(A/I, H) = (0)$ pour tout facteur indécomposable H de E_q^{II}. Raisonnons par l'absurde et supposons que x soit un élément non nul de H annulé par I. Alors $Ax \subset H = E(Ax)$ et $Ax \simeq A/J$, où J est un idéal à gauche de A contenant I donc co-artinien. Quitte à remplacer Ax par un sous-module simple qu'il contient, on peut supposer l'idéal J maximal à gauche. Donc par la condition (A), J est bilatère et on a $H \simeq E(A/J)$ où J est un idéal maximal bilatère ce qui contredit le fait que $H \subsetneq E_q^{II}$. ■

Corollaire. *Si J est un idéal à gauche co-artinien de A, on a*

$$\mathrm{Hom}_A(A/J, E_q^{II}) = 0 \text{ pour } q = 0, \dots, \mu.$$

Preuve: On raisonne par récurrence sur la longueur de A/J en partant du cas de longueur 1 donné par le lemme 4.3. Le module A/J possède une suite de composition dont les facteurs sont isomorphes à des A/P_i où P_i sont des idéaux bilatères maximaux de A. Soit $0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_s = A/J$ une telle suite. D'après le lemme, s'il existait un homomorphisme $f : A/J \to E_q^{II}$ alors f serait nul sur H_1 et par hypothèse de récurrence serait nul sur H_s/H_1. Donc $f = 0$. ■

4.4. Lemme. *Chaque élément de E_μ^I est annulé par un idéal co-artinien de A.*

Preuve: On a $E_\mu^I = \bigoplus_{\substack{P \in \mathrm{Spec}(A) \\ P \max l}} \nu(P) E(A/P)$. Il suffit de montrer que chaque élément de $E(A/P)$ est annulé par un idéal co-artinien de A. Soit

$x \in E(A/P)$; $M = A/P$ est un A-module à gauche simple essentiel dans $E(A/P)$; donc $M \subset Ax$. Puisque $\mathrm{Ann}_A(M) = P \in \mathcal{F}$, il existe $J \in \mathcal{F}$ tel que $J.Ax \cap M \subseteq PM = (0)$. Comme M est essentiel dans Ax, on a $JAx = (0)$, c'est-à-dire $Jx = 0$ avec J co-artinien. ■

Corollaire. *On a* $E^I_\mu = \varinjlim_{\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_A(A/I, E^I_\mu)$.

4.5. Le lemme suivant est adapté de la proposition 5.4 de [**B.M**].

Lemme. *Soient B un anneau premier, I un idéal bilatère de B tel que* $\mathrm{Hom}_B(B/I, B) = 0$. *Soit* $0 \to B \to E_0 \to E_1 \to \ldots$ *une résolution injective minimale du B-module ${}_BB$. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que* $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_I) \neq 0$. *Alors le grade du B-module à gauche B/I est $\leq i$.*

Preuve: Supposons que l'on ait $\mathrm{Ext}^j_B(B/I, B) = 0$ pour tout $j \leq i$. Montrons par récurrence sur k que $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_k)$ est nul pour tout $k \leq i$. Puisque $\mathrm{Hom}_B(B/I, B) = 0$, il en résulte que $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_0) = 0$. En effet si $x \in E_0 \backslash \{0\}$ vérifie $Ix = 0$ on considère un élément $\alpha \in B$ tel que $0 \neq \alpha x \in B$ et on $I\alpha x = 0$. D'où $\alpha x = 0$, ce qui est la contradiction cherchée. Supposons $i > 1$ et soit $0 \leq k < i$ tel que $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_k)$ soit nul. Montrons qu'il en est de même de $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+1})$. A partir des suites exactes

$$E_k \xrightarrow{d_k} E_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} E_{k+2}$$

on obtient les suites exactes

$$\mathrm{Hom}_B(B/I, E_k) \xrightarrow{\delta_k} \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+1}) \xrightarrow{\delta_{k+1}} \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+2}).$$

Comme $k+1 \leq i$, on a par hypothèse $\mathrm{Ext}^{k+1}_B(B/I, B) = 0$; d'où l'on déduit $\ker \delta_{k+1} = (0)$. Considérons les suites exactes

$$0 \longrightarrow \ker d_{k+1} \longrightarrow E_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} E_{k+2}$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(B/I, \ker d_{k+1}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+1}) \xrightarrow{\delta_{k+1}} \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+2}).$$

On a $0 = \ker \delta_{k+1} = \mathrm{Hom}_B(B/I, \ker \delta_{k+1})$. D'où, puisque E_{k+1} est l'eneloppe injective du B-module $\ker \delta_{k+1}$, $0 = \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+1})$. ■

4.6. Théorème. *Soit A un anneau premier vérifiant les conditions (A), (B) et (C) et E_i = le $i^{\text{ième}}$ terme de la résolution injective minimale du A-module ${}_AA$. Alors $E_\mu^{II} = (0)$ et* $E_\mu^I = \varinjlim_{I\in\mathcal{F}} \operatorname{Ext}_A^\mu(A/I, A) = H_\sigma^\mu(A)$.

Preuve: D'après 4.2, $\varinjlim_{I\in\mathcal{F}} \operatorname{Ext}_A^\mu(A/I, A) = E$ est un A-module injectif et $T = \operatorname{Ext}_A(-, A)$ est naturellement équivalent à $\operatorname{Hom}_A(-, E)$ sur $\operatorname{Mod}_A^{\mathcal{F}}$.

On remarque d'abord que si M est un A-module à gauche artinien alors $\operatorname{Hom}_A(M, E_p) = 0$ si $p \lneqq \mu$. En effet par un argument de récurrence sur la longueur de M on se ramène au cas où M est simple. En effet si $\operatorname{Hom}_A(M, E_p) = 0$ si $p \lneqq \mu$ lorsque M est simple alors $0 \to M'' \to M \to M' \to 0$, $l(M'') < l(M)$ et M' simple, d'où

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M', E_p) = 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, E_p) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M'', E_p) = 0 \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Alors $M = A/J$ où J est un idéal bilatère co-artinien par (A). On a $j(M) = \mu$ car $\delta(M) = 0$. Donc $\operatorname{Hom}_A(M, A) = 0$. Il suffit d'appliquer 4.5. On a alors le résultat car si $\operatorname{Hom}_A(M, E_i)$ est non nul alors $j(M) \leq i$ donc $i = \mu$.

Les foncteurs de Mod_A dans Ab, $\operatorname{Ext}_A^\mu(-, A) = T$ et $\operatorname{Hom}_A(-, E_\mu)/\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(-, E_{\mu-1}))$ sont isomorphes. Puisque si $M \in \operatorname{Mod}_A^{\mathcal{F}}$, on a $\operatorname{Hom}_A(M, E_{\mu-1}) = 0$, sur la catégorie $\operatorname{Mod}_A^{\mathcal{F}}$, les foncteurs T et $\operatorname{Hom}_A(-, E_\mu)$ sont isomorphes et pour tout idéal bilatère J co-artinien, les A-modules à gauche $T(A/J)$ et $\operatorname{Hom}_A(A/J, E_\mu)$ sont isomorphes. Par suite $\varinjlim_{I\in\mathcal{F}} T(A/J) \simeq \varinjlim_{I\in\mathcal{F}} \operatorname{Hom}_A(A/J, E_\mu)$ et donc E est isomorphe à $\varinjlim_{J\in\mathcal{F}} \operatorname{Hom}_A(A/J, E_\mu) = \varinjlim_{J\in\mathcal{F}} \operatorname{Hom}_A(A/J, E_\mu^I) \oplus \varinjlim_{J\in\mathcal{F}} \operatorname{Hom}_A(A/J, E_\mu^{II})$. D'après 4.3, on a que E est isomorphe à $\varinjlim_{J\in\mathcal{F}} \operatorname{Hom}_A(A/J, E_\mu^I)$ c'est-à-dire à E_μ^I d'après le corollaire 4.4.

Montrons à présent que pour tout sous-module M de type fini de E_μ^{II} on a $\operatorname{Ext}_A^\mu(M, A) = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $Q = \operatorname{Ext}_A^\mu(M, A) \neq 0$. Puisque $\operatorname{Ext}_A^i(\operatorname{Ext}_A^\mu(M, A), A) = 0$ si $i < \mu$, l'anneau A étant Auslander-Gorenstein, il résulte du fait que $Q \neq 0$ que l'on a $\operatorname{Ext}_A^\mu(Q, A) \neq 0$. En effet si $\operatorname{Ext}_A^\nu(Q, A) = 0$ pour tout ν on aurait $\delta(Q) = -\infty$ et donc $Q = 0$, d'après (C). Alors $\operatorname{Ext}_A^\mu(\operatorname{Ext}_A^\mu(M, A), A)$ est un A-module à gauche non nul de longueur finie, puisque son δ est nul. Il est isomorphe à $F^\mu M$, ce qui résulte du théorème 2.3(b). Il existe donc un homomorphisme non nul $f : F^{\mu}M \to E_{\mu}^{II}$, ce qui contredit le corollaire 4.3.

Soit $E_A(A/I)$ une composante non nulle de E_{μ}^{II}, à supposer qu'elle existe, où I est un idéal à gauche de A. D'après ce qui précède on a $\mathrm{Ext}_A^{\mu}(A/I, A) = 0$. Si $E_{\mu-1} \overset{p_{\mu-1}}{\to} E_{\mu} \to 0$ est la dernière flèche de la résolution injective minimale de A, l'application $\mathrm{Hom}_A(A/I, E_{\mu-1}) \to \mathrm{Hom}_A(A/I, E_{\mu})$ qui en résulte est surjective, puisque le conoyau $\mathrm{Ext}_A^{\mu}(A/I, A)$ est nul. Donc il existe un homomorphisme $f : A/I \to E_{\mu-1}$, tel que $p_{\mu-1} \circ f$ soit l'identité sur A/I et, par suite, f est injectif. Comme $\ker p_{\mu-1}$ est essentiel dans $E_{\mu-1}$, on a alors $\mathrm{Im} f \cap \ker p_{\mu-1} \neq 0$, ce qui contredit le fait que $p_{\mu-1} \circ f$ est l'identité sur A/I. Donc $E_{\mu}^{II} = 0$. ■

References

[A] AUSLANDER, M., On the dimension of modules and algebras (III), *Nagoya Math. J.* **9** (1955), 67–77.

[B-M] BAROU, G. ET MALLIAVIN, M. P., Sur la résolution injective minimale de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble, *J. of Pure and Applied Alg.* **37** (1985), 1–25.

[Ba] BASS, H., On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Z.* **82** (1963), 8–28.

[Bj1] BJÖRK, J. E., "*Rings of differential operators*," North-Holland, 1979.

[Bj2] BJÖRK, J. E., "*The Auslander condition on noetherian rings*," Séminaire Dubreil-Malliavin, 1987–88, L.N. in Math. **1404**, Springer Verlag, 1989, pp. 137–173.

[Bj-Ek] BJÖRK, J. E. ET EKSTRÖM, E. K., "*Filtered Auslander-Gorenstein rings*," Colloque en l'honneur de J. Dixmier, Birkhauser, 1990, pp. 424–448.

[Br] BROWN, K., Ore sets in envelopping algebras, *Compositio Math.* **53** (1984), 347–367.

[Br-Le] BROWN, K. ET LEVASSEUR, T., Cohomology of bimodules over enveloping algebras, *Math. Z.* **189** (1985), 393–413.

[Ek] EKSTRÖM, E. K., "*The Auslander Condition on graded and filtered neotherian rings*," Séminaire Dubreil-Malliavin, 1987–88, L.N. in Math. **1404**, Springer Verlag, 1989, pp. 220–245.

[F-G-R] FOSSUM, R., GRIFFITH, P. AND REITEN, I., "*Trival extensions of Abelian categories*," L.N. in Math. **456**, Springer Verlag, 1975.

[He-Ve] HENDRIX, B. AND VERSCHOREN, A., A note on compatibility and stability, *Communications in Algebra* **17(8)** (1989), 1971–1979.

[Len] LENAGAN, T., Gelfand Kirillov dimension and affine P.I. rings, *Comm. Algebra* **10, no. 1** (1982), 87–92.

[Le1] LEVASSEUR, T., "*Complexe bidualisant en algèbre non commutative,*" Séminaire Dubreil-Malliavin, 1983–84, L.N. in Math. **1146**, Springer Verlag, 1985, pp. 270–287.

[Le2] LEVASSEUR, T., Some properties of non commutative regular graded rings, (à paraître).

[Li-Hu] LI, HUSHI, Non commutative Zariskian rings, Ph. Doc. Thesis UIA, Antwerp (1989).

[Ma1] MALLIAVIN, M. P., Modules sans torsion et modules injectives sur les algèbres de Lie résolubles, *J. Algebra* **83(I)** (1983), 126–157.

[Ma2] MALLIAVIN, M. P., Représentations injectives d'algèbre de Lie résolubles, *Comm. in Algebra* **14(8)** (1986), 1503–1513.

[Mc-Ro] MC CONNELL, J. C. AND ROBSON, J. C., "*Non commutative noetherian rings,*" Wiley series in Pure and Applied Math., 1987.

[Re] REITEN, I., Trivial extensions and Gorenstein rings, Thesis Chicago Univ. (1971).

[Str] STRENSTRÖM, B., "*Rings of quotient,*" Springer, 1975.

[Ve] VERSCHOREN, A., Compatibility and Stability, *Notas de Matemática* **3**, Universidad de Murcia.

[Z] ZAKS, A., Injective dimension of semi-primary rings, *J. of Algebra* **13** (1969), 73–86.

10 Rue Sant Louis on l'Ile
75004 Paris
FRANCE

Primera versió rebuda el 14 d'Octubre de 1991,
darrera versió rebuda el 18 de Novembre de 1991