Publicacions Matemàtiques, Vol 37 (1993), 225–238.

ENVELOPPES POLYNOMIALES DE VARIETES REELLES DANS $\mathbb{C}^2$

BORIS GOURLAY

Abstract

We present here three examples concerning polynomial hulls of some manifolds in $\mathbb{C}^2$.

1. Some real surfaces with equation $w = P(z,\bar{z}) + G(z)$ where P is a homogeneous polynomial of degree n and $G(z) = o(|z|^n)$ at 0 which are localy polynomially convex at 0.
2. Some real surfaces $\mathcal{M}_F$ with equation $w = z^{n+k}\bar{z}^n + F(z,\bar{z})$ such that the hull of $\mathcal{M}_F \cap \overline{B}(0,1)$ contains a neighborhood of 0.
3. A countable union of totally real planes (P_j) such that $\overline{B}(0,1) \cap \left(\bigcup_{j\in N} P_j\right)$ is polynomially convex.

0. Introduction et remerciements

Dans $\mathbb{C}^2$ muni des coordonnées (z, w), l'enveloppe polynomiale de variétés réelles d'équation $w = P(z,\bar{z})$ où P est un polynôme homogène ont été étudiées par E. L. Stout dans [**3**] si P est de degre 2 et par P. Thomas dans [**5**] si P est de degré 3. On se propose de donner des exemples de généralisations de ces résultats (parties 2 et 3). On donnera ensuite un résultat sur la convexité polynomiale d'une réunion de plans (partie 4) que l'on peut comparer à un résultat qui découle de la partie 2.

Je tiens à exprimer mes remerciements à M. Pascal Thomas, mon directeur de recherches, grâce à qui ce travail a pu être mene à bien. Mes remerciements vont également à M. Anthony O'Farrell qui m'a montré de nombreuses méthodes et suggéré plusieurs idées (Corollaire 2 en particulier).

1. Définitions

Definition A. Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$. L'*enveloppe polynomiale* de K est le compact:
$\widehat{K} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \forall P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \quad \mid P(z) \mid \leq \max_{\zeta \in K} \mid P(\zeta) \mid \right\}$.

On dit que K est *polynomialement convexe* si $\widehat{K} = K$.

Definition B. Soit V un fermé de $\mathbb{C}^n$. Soit $z \in V$; on dit que V est *localement polynomialement convexe* en z s'il existe $r > 0$ tel que le compact $V \cap \overline{B}(z,r)$ soit polynomialement convexe.

2. Un exemple de variété localement polynomialement convexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1. *Soit G une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $G(z) = o(|z|^n), z \to 0$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{C}$, notons $\mathcal{M}_\varepsilon$ la variété:*

$$\left\{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w = \overline{z}^n + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \varepsilon^j z^j \overline{z}^{n-j} + G(z) \right\}.$$

où les C_n^j sont les coefficients binomiaux.

Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in D(0,r)$ $\mathcal{M}_\varepsilon$ soit localement polynomialement convexe en 0.

Les deux lemmes suivants, que l'on doit à N. Sibony et H. Alexander pour le premier, à E. Kallin pour le second et dont les démonstrations se trouvent respectivement dans [**4**] et [**1**] permettent de montrer la Proposition 1.

Lemme 1. *Soit Φ une application polynomiale propre de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^p$. Soit K un compact de $\mathbb{C}^m$ tel que $K = \Phi^{-1}(\Phi(K))$. Alors on a: $\widehat{K} = \Phi^{-1}(\widehat{\Phi(K)})$.*

Lemme 2. *Soient K, L deux compacts polynomialement convexes de $\mathbb{C}^n$. On suppose qu'il existe un polynôme F tel que $F^{-1}(0) \cap (K \cup L)$ soit polynomialement convexe et*

(i) $F(K)$ et $F(L)$ sont contenus dans des secteurs angulaires d'intersection réduite à $\{0\}$.

Alors $K \cup L$ est polynomialement convexe.

Remarque. Comme l'indique B. Weinstock dans [6], on peut affaiblir (i) en l'une des conditions suivantes:

(ii) $F(K) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re e\, \lambda > 0\} \cup \{0\}$ et $F(L) \subset \mathbb{R}$.
(iii) $F(K) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re e\, \lambda > 0\} \cup \{0\}$ et $F(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re e\, \lambda < 0\} \cup \{0\}$.

Démonstration de la Proposition 1: Soit $P_\varepsilon(X_1, X_2) = \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j \varepsilon^j X_1^j X_2^{n-j} = (\varepsilon X_1 + X_2)^n - \varepsilon^n X_1^n$. Ainsi $\mathcal{M}_\varepsilon$ a pour équation $w = P_\varepsilon(z, \overline{z}) + G(z)$. Soit $\mathcal{V}_\varepsilon$ la variété d'équation $w = P_\varepsilon(z, \overline{z})$. Alors $\mathcal{M}_\varepsilon$ est tangente en 0 à $\mathcal{V}_\varepsilon$ à l'ordre n. Considérons

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : \quad \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \quad \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\longrightarrow (z_1, P_\varepsilon(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

On a:

Lemme 3. *a) Φ_ε est une application polynomiale propre.*

b) $\Phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{V}_\varepsilon)$ est une réunion de plans totalement réels $\mathcal{M}_\varepsilon^k$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

c) $\Phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ est une réunion de surfaces S_ε^k tangentes en 0 aux $\mathcal{M}_\varepsilon^k$.

Preuve du Lemme 3: a) Soit K un compact de $\mathbb{C}^2$. Si $z \in \Phi_\varepsilon^{-1}(K)$, on a:

$$\begin{cases} |z_1| \le C_1 \\ |P_\varepsilon(z_1, z_2)| \le C_2, \end{cases}$$

donc $|z_2|^n \le |P_\varepsilon(z_1, z_2) - \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \varepsilon^j z_1^j z_2^{n-j}| \le C_2 + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j |\varepsilon|^j (C_1)^j |z_2|^{n-j}$.

Le second membre étant de degré $n-1$, z_2 est nécessairement borné.

b) On a:

$$\begin{aligned} &z \in \Phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{V}_\varepsilon) \iff (z_1, P_\varepsilon(z_1, z_2)) \in \mathcal{V}_\varepsilon \iff P_\varepsilon(z_1, z_2) = P_\varepsilon(z_1, \overline{z_1})) \\ &\iff (\varepsilon z_1 + z_2)^n = (\varepsilon z_1 + \overline{z_1})^n \iff \varepsilon z_1 + z_2 = \xi_k(\varepsilon z_1 + \overline{z_1}), \end{aligned}$$

où $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, avec $\xi_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$.

Alors Π_ε^k est le plan $z_2 = \varepsilon(\xi_k - 1) z_1 + \xi_k \overline{z_1}$.

c) De même, $z \in \Phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{M}_\varepsilon)$

$$\iff P_\varepsilon(z_1, z_2) = P_\varepsilon(z_1, \overline{z_1}) + G(z_1) \iff (\varepsilon z_1 + z_2)^n = (\varepsilon z_1 + \overline{z_1})^n + G(z_1)$$

$$\iff z_2 + \varepsilon z_1 = \xi_l(\varepsilon z_1 + \overline{z_1})\Big(1 + \frac{G(z_1)}{(\varepsilon z_1 + \overline{z_1})}\Big)^{1/n}, \quad l \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\iff z_2 = \xi_l(\varepsilon z_1 + \overline{z_1}\psi(z_1) - \varepsilon z_1, \quad \psi(z_1) = \Big(1 + \frac{G(z_1)}{(\varepsilon z_1 + \overline{z_1})}\Big)^{1/n}$$

$$\iff z_2 = \varepsilon(\xi_l - 1) + \xi_l \overline{z_1} + f_l(z_1)$$

où $f_l(z_1) = \xi_l(\psi(z_1) - 1)(\varepsilon z_1 + \overline{z_1})$.

Comme $G(z_1) = o(|z_1|^n)$, on a $f_l(z_1) = o(|z_1|)$, et la surface $\mathcal{S}_\varepsilon^l$, d'équation $z_2 = \varepsilon(\xi_l - 1) + \xi_l\overline{z_1} + f_l(z_1)$ est tangente à Π_ε^l en 0. ■

Pour montrer la proposition, il suffit, grâce aux Lemmes 1 et 2, de trouver un polynôme "séparant" les $\mathcal{S}_\varepsilon^l$ au voisinage de 0.

Soit $F(z_1, z_2) = z_1 z_2$. Si $z \in \Pi_0^k$, $F(z) = \xi_k |z_1|^2$. F envoie donc les plans Π_ε^k sur des demi-droites Δ_k concourantes en 0. Soient σ_k des secteurs angulaires ouverts tels que $\sigma_k \cap \sigma_j = \emptyset$ pour $k \neq j$ et $\sigma_k \supset \Delta_k - \{0\}$. Soient $U = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \le 1\}$ et $\rho > 0$. Comme $(\varepsilon, z) \longrightarrow F(z, \varepsilon(\xi_k - 1)z + \xi_k \overline{z})$ est continue sur $D(0, \rho) \times \partial U$, il existe $r > 0$ tel que pour ε vérifiant $|\varepsilon| < r$ et $z \in \partial U$, $F(z, \varepsilon(\xi_k - 1)z + \xi_k\overline{z}) \in \sigma_k \cup \{0\}$. Ainsi $F(\Pi_\varepsilon^k) \subset \sigma_k \cup \{0\}$, $\quad k \in \{0, \dots, n-1\}$. Quitte à considérer des secteurs angulaires $\Sigma_k \supset \sigma_k$, $\exists R > 0$ tel que $F(\mathcal{S}_\varepsilon^k \cap \overline{B}(0, R)) \subset \Sigma_k$ avec $\Sigma_k \cap \Sigma_j = \{0\}$ pour $k \neq j$.

3. Un exemple de variété dont l'enveloppe est maximale

Soient $k, n, p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ l'espace des polynômes de deux variables complexes $F(X_1, X_2)$ de degré inférieur ou égal à p. Dans ce qui suit, on écrira $F(z)$ au lieu de $F(z, \overline{z})$ pour $F \in \mathcal{B}$. Pour $r > 0$, on notera B_r la boule ouverte de $\mathbb{C}^2$ de centre 0 et de rayon r.

Proposition 2. *Soit $F \in \mathcal{B}$. Notons $\mathcal{M}_F$ la variété d'équation:*

$$w = z^{n+k}\overline{z}^n + F(z).$$

Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{B}$ tel que $\forall F \in \mathcal{V}$, $\exists r > 0$ tel que $(\mathcal{M}_F \cap \overline{B}_r)^\wedge$ contienne un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$.

On déduit de cette proposition le Corollaire suivant, analogue à un résultat de [**5**]:

Corollaire 1. *Pour* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n+k}) \in \mathbb{C}^{2n+k}$, *notons:*

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \;\Big|\; w = z^{n+k}\overline{z}^n + \sum_{j=0}^{2n+k} \varepsilon_j z^j \overline{z}^{2n+k-j}\Big\}.$$

Il existe un voisinage V *de* 0 *dans* $\mathbb{C}^{2n+k}$ *tel que* $\forall \varepsilon \in V$, *pour tout compact* K *tel que* $K \subset \mathcal{M}_\varepsilon$, $\exists r_{\varepsilon K} > 0$ *tel que* $(\mathcal{M}_\varepsilon \cap \overline{B}(0, r_{\varepsilon K}))^\wedge$ *contienne un voisinage de* $\widehat{K}$.

Démonstration de la Proposition 2: On procède comme dans [**5**]. Commençons par construire une famille de disques analytiques à frontière dans $\mathcal{M}_F$. ■

Lemme 4. *Soit* $\theta^0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$. *Il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* $(0, \theta^0)$ *dans* $\mathcal{B} \times \mathbb{C}^{k+2}$ *tel que pour tout* $(F, t) \in \mathcal{U}$, *il existe un disque analytique* $f^{F,t}$ *à frontière dans* $\mathcal{M}_F$ *et tel que* $(F,t) \longrightarrow f^{F,t}$ *soit* $\mathcal{C}^1$ *au sens des topologies de* $\mathcal{B} \times \mathbb{C}^{k+2}$ *et* $(\ell^1(\mathbb{Z}_+))^2$.

Remarque. Si U est le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, on identifiera dans ce qui suit une suite $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ d'eléments de $\ell^1(\mathbb{Z})$, (resp. une suite $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$) à la fonction f définie par $\forall \zeta \in \partial U$, $f(\zeta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \zeta^p$, (resp. à la fonction g, holomorphe sur U, définie par $\forall \zeta \in U$, $g(\zeta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \beta_p \zeta^p$). On définit pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(p)$ par $\widehat{f}(p) = \alpha_p$.

Preuve du Lemme 4: Considérons

$$\begin{aligned}
\Psi: \quad & \ell^1(\mathbb{Z}_+) \times \ell^1(\mathbb{Z}_+) \times \mathcal{B} \times \mathbb{C}^{k+2} \longrightarrow \ell^1(\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}^{k+2} \\
& \big(f = (f_1, f_2), F, (t_j)_{0\le j\le k+1}\big) \longrightarrow \big(g \quad , \quad (\widehat{f_1}(j) - t_j)_{0\le j\le k+1}\big)
\end{aligned}$$

où $g(z) = r_F(f(z))$, avec $r_F(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_2 - {\zeta_1}^{n+k}\overline{\zeta_1}^n - F(\zeta_1)$.

Soit $f^0 = (z, z^k)$. Si $X^0 = (f^0, 0, \theta^0)$, $\Psi(X^0) = 0$. Calculons $D_f\Psi_{|X^0}$.

$$\begin{aligned}
\Psi(X^0 + (f,0,0)) - \Psi(X^0) &= \Psi((z + f_1, z^k + f_2), 0, \theta^0) \\
&= (g, (\widehat{f_1}(j))_{0\le j\le k+1}),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
g(z) = r_0(z + f_1, z^k + f_2) &= z^k + f_2 - (z + f_1)^{n+k}(\overline{z} + \overline{f_1})^n \\
&= z^k + f_2 - (z^{n+k} + (n+k)z^{n+k-1}f_1)(\overline{z}^n + n\overline{z}^{n-1}\overline{f_1}) + o(f) \\
&= f_2 - nz^{k+1}\overline{f_1} - (n+k)z^{k-1}f_1 + o(f).
\end{aligned}$$

car $\overline{z} = \frac{1}{z}$ sur ∂U.

Donc $D_f\Psi_{|X^0}(f) = (f_2 - nz^{k+1}\overline{f_1} - (n+k)z^{k-1}f_1, (\widehat{f_1}(j))_{0\leq j\leq k+1})$.

Si $\gamma(z)$ est la première composante de $D_f\Psi_{|X^0}(f)$, on a:

$$\widehat{\gamma}(j) = \begin{cases} -n\overline{\widehat{f_1}}(k+1-j), & \forall j \leq -1 \\ \widehat{f_2}(j) - n\overline{\widehat{f_1}}(k+1-j), & \forall j \in \{0,\dots,k-2\} \\ \widehat{f_2}(j) - (n+k)\widehat{f_1}(j-k+1) - n\overline{\widehat{f_1}}(k+1-j), & \forall j \in \{k-1,k,k+1\} \\ \widehat{f_2}(j) - (n+k)\widehat{f_1}(j-k+1), & \forall j \geq k+2 \end{cases}$$

$D_f\Psi_{|X^0}$ est inversible et $\forall (g,\alpha) \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}^{k+2}$, $(D_f\Psi_{|X^0})^{-1}(g,\alpha) = (f_1, f_2)$ avec

$$\text{Si } j \in \{0,\dots,k+1\},\ \widehat{f_1}(j) = \alpha_j.$$
$$\text{Si } j \geq k+2,\ \widehat{f_1}(j) = -\frac{1}{n}\overline{\widehat{g}}(k+1-j), \quad \forall j.$$

Si $j \in \{k-1, k, k+1\}$

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(j) &= \widehat{g}(j) + (n+k)\widehat{f_1}(j+1-k) + n\overline{\widehat{f_1}}(k+1-j) \\ &= \widehat{g}(j) + (n+k)\alpha_{j+1-k} + n\overline{\alpha}_{k+1-j}.\end{aligned}$$

Si $j \in \{k+2,\dots,2k\}$

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(j) &= \widehat{g}(j) + (n+k)\widehat{f_1}(j+1-k) \\ &= \widehat{g}(j) + (n+k)\alpha_{j+1-k}.\end{aligned}$$

Si $j \geq 2k+1$, $\quad \widehat{f_2}(j) = \widehat{g}(j) - \frac{n+k}{n}\overline{\widehat{g}}(-j)$.

Si $j \in \{0,\dots,k-2\}$

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(j) &= \widehat{g}(j) + n\overline{\widehat{f_1}}(k+1-j) \\ &= \widehat{g}(j) + n\overline{\alpha}_{k+1-j}.\end{aligned}$$

Comme $(D_f\Psi_{|X^0})^{-1}$ est linéaire et continue, on peut appliquer le Théorème des fonctions implicites: la relation $\Psi(f,F,t) = 0$ définit un disque analytique $f^{F,t} = \Lambda(F,t)$, où Λ est une fonction de classe C^1, de $\mathcal{B} \times \mathbb{C}^{k+2}$ dans $(\ell^1(\mathbb{Z}_+))^2$. ∎

Montrons maintenant que cette famille de disques est suffisante pour que $\{f^{F,t}(0), t \in \mathbb{C}^{k+2}\}$ recouvre un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$, avec le

Lemme 5. *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{B}$ tel que pour tout $F \in \mathcal{U}$ il existe un voisinage V_F de θ^0 dans $\mathbb{C}^{k+2}$ tel que*

$$\begin{aligned} \Omega_F : V_F &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t &\longrightarrow f^{F,t}(0) \end{aligned}$$

soit ouverte.

Preuve du Lemme 5: Soit

$$\begin{aligned} \Sigma_F : \mathbb{C}^{k+2} &\longrightarrow \qquad \mathbb{C}^{k+2} \\ t &\longrightarrow (f^{F,t}(0), t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned}$$

Pour montrer le résultat, il suffit de vérifier que Σ_F est ouverte en θ^0 si F est voisin de 0, ce qui sera vrai si $\det\left[(\Sigma_0)'_{|\theta^0}\right] \neq 0$ Calculons $(\Omega_0)'_{|\theta^0}$.

Soient

$$\begin{aligned} j : \mathbb{C}^{k+2} &\longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{C}^{k+2} \\ t &\longrightarrow (0, t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Pi : (\ell^1(\mathbb{Z}_+))^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ f &\longrightarrow f(0) \end{aligned}$$

Ces applications sont de classe C^1 car elles sont linéaires et continues. Comme $\Omega_0 = \Pi \circ \Lambda \circ j$ et Λ est C^1 par le lemme précedent, on a:

$$\begin{aligned} (\Omega_0)'_{|\theta^0} &= \Pi'_{|f^0,\theta^0} \circ \Lambda'_{|(0,\theta^0)} \circ j'(\theta^0) = \Pi \circ \Lambda'_{|(0,\theta^0)} \circ j \\ &= \Pi \circ (D_f \Psi_{|X^0})^{-1} \circ D_{F,t} \Psi_{|X^0} \circ j, \end{aligned}$$

en utilisant le Théorème des fonctions implicites.

Reste à calculer $D_{F,t}\Psi_{|X^0}$. On a:

$$\begin{aligned} \Psi(X^0 + (0, F, t)) - \Psi(X^0) &= \Psi((z, z^k), F, (t_0 + 1, t_1, \dots, t_{k+1})) \\ &= (r_F(z, z^k), (-t_0, \dots, -t_{k+1})) \end{aligned}$$

avec $r_F(z, z^k) = z^k - z^{n+k}\overline{z}^n - F(z) = -F(z)$.

Donc $D_{F,t}\Psi_{|X^0}(F, t) = (-F(z), (-t_0, \dots, -t_{k+1}))$.

Alors $\forall t = (t_0, \dots, t_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+2}$ on a:

$$\left(\Omega_0\right)'_{|\theta^0}(t) = \Pi \circ (D_f \Psi_{|X^0})^{-1}(0, (-t_0, \dots, -t_{k+1})) = (f_1(0), f_2(0))$$

où $(f_1, f_2) = (D_f \Psi_{|X^0})^{-1}(0, (-t_0, \dots, -t_{k+1}))$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \widehat{f_1}(0) &= -t_0 \\ \widehat{f_2}(0) &= n\bar{t}_{k+1}. \end{aligned}$$

Si $t = (t_0, \dots, t_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+2}$, $\quad t_j = x_j + iy_j, \quad (x_j, y_j \in \mathbb{R})$ identifions t à $(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2k+4}$. La matrice de $\left(\Sigma_0\right)'_{|\theta^0}$ est:

$$\begin{pmatrix}
-\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2} & \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \cdots & \bigcirc \\
\bigcirc & \bigcirc & \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2} & \bigcirc & \cdots & \bigcirc \\
\vdots & \vdots & \bigcirc & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \bigcirc \\
\vdots & \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2} \\
\bigcirc & \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix} & \bigcirc & \cdots & \cdots & \bigcirc
\end{pmatrix}$$

ou chaque $\bigcirc$ représente un bloc $(2, 2)$. Son déterminant est non nul. ■

Démonstration du Corollaire 1: On peut, bien sûr, remplacer dans la Proposition 2, $\mathcal{B}$ par l'espace des polynômes homogènes de degré $2n + k$. Par homogénéité de $\mathcal{M}_\varepsilon$, (de degré 1 en z et $2n + k$ en w) on obtient le resultat. ■

4. Un résultat de convexité polynomiale d'une réunion dénombrable de plans

Remarquons que la démonstration de la Proposition 1 permet de mettre en évidence dans l'ensemble des familles de N plans totalement réels de $\mathbb{C}^2$, un ouvert Ω tel que $\forall (P_1, \dots, P_N) \in \Omega \quad \bigcup_{j=1}^{N} P_j$ soit polynomialement convexe: en effet, il suffit de constater que toute famille dans un voisinage des Π_0^k sera "séparée" par le polynôme $F(z) = z_1 z_2$. On peut alors se demander s'il existe une famille dénombrable infinie de plans dont la réunion soit polynomialement convexe. La réponse est positive, comme le montre la proposition suivante. Précisons tout d'abord quelques notations et résultats dûs à B. Weinstock dans [6].

Soit $\mathbb{C}^n$ munis des coordonnées $z = (z_1, \dots, z_n)$. Ecrivons $z = x + iy$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $z_j = x_j + iy_j$.

Un $\mathbb{R}$-sous-espace-vectoriel V de $\mathbb{C}^n$ est *totalement réel* si $V \cap iV = \{0\}$, où iV désigne $\{(iz_1, \dots, iz_n);\ (z_1, \dots, z_n) \in V\}$.

Si P est un n-plan de $\mathbb{C}^n$ $(\dim_{\mathbb{R}} P = n)$, il existe deux matrices $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P = (M_1 + iM_2)\mathbb{R}^n$.

Lemme 6. *1.* $P \cap \mathbb{R}^n = \{0\} \iff$ *il existe une unique matrice telle que* $P = (A + iI)\mathbb{R}^n = \{z \in \mathbb{C}^n |\ x = Ay\}$.

2. P *est totalement réel* $\iff$ $i \notin SpA$.

3. Si $A' = S^{-1}AS$, *ou* $S \in GL_n(\mathbb{R})$, *on a* $\mathbb{R}^n \cup (A + iI)\mathbb{R}^n = S\big[\mathbb{R}^n \cup (A' + iI)\mathbb{R}^n\big]$, *où* S *est aussi le biholomorphisme* $z \longrightarrow Sz$.

On se place maintenant dans le cas où $n = 2$. On notera $V(A)$ le plan $(I + iA)\mathbb{R}^2 = \{z \in \mathbb{C}^n |\ y = Ax\}$. Si P est un plan, P^* désignera $P - \{0\}$.

Proposition 3. *1) Il existe une famille* $(F_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ *de polynômes de deux variables telle que si* $\varphi_j = \Re e\, F_j$, $\Gamma_j = \varphi_j^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ *et* $C_j = \bigcap_{k=1}^{j} \Gamma_k$, *on ait:*

1/ $\Gamma_j \supset (i\mathbb{R}^2)^*$

2/ $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\exists A_j \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *tel que* $V(A_j) \cup \mathbb{R}^2$ *soit polynomialement convexe et vérifiant:*

a) $SpA \subset \mathbb{C} - [-i, i]$,

b) $V^*(A_j) \subset C_j$,

c) $V^*(A_j) \subset \varphi_{j+1}^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.

2) Pour les A_j *précédents, on a si* $K = \Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} V(A_j) \cup (i\mathbb{R}^2)\Big) \cap \overline{B}(0,1)$, K *est polynomialement convexe.*

Démonstration de la Proposition 3: Rappelons une version simplifiee d'un Théorème de Weinstock de [6]:

Théorème. *Soit* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $-1 \notin SpA^2$.

Si $SpA \cap \{ix,\ x \in \mathbb{R}\ \ |x| < 1\} = \emptyset$, $V(A) \cup \mathbb{R}^2$ *est polynomialement convexe.*

On utilise les lemmes suivants:

Lemme 7. *Soit C un cône ouvert de $\mathbb{C}^2$ contenant $(i\mathbb{R}^2)^*$. Il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $SpA \subset \mathbb{C} - [-i,i]$ tel que $V^*(A) \subset C$ et $V(A) \cup i\mathbb{R}^2$ soit polynomialement convexe.*

Preuve du lemme 7: Considérons

$$\begin{aligned} \Phi : \ \mathbb{R}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \ \mathbb{C}^2 \\ (x, M) \ &\longrightarrow (M + iI)x \end{aligned}$$

Φ est continue sur $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc uniformément continue par rapport à x sur $S^1 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$. Donc $\lim\limits_{\substack{M \to 0 \\ M \in GL_2(\mathbb{R})}} \Phi(x, M) = ix \in C$, cette limite étant uniforme en x sur S^1.
Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a: $\exists \eta > 0$ tel que $\forall M \in GL_2(\mathbb{R})$ verifiant $\|M\| \le \eta$ on ait $\forall x \in S^1$ $\Phi(x, M) \in C$. Par homogénéité de Φ par rapport à x on a $\Phi(\mathbb{R}^2 \times \{M\}) = (M + iI)\mathbb{R}^2 = V(M^{-1}) \subset C \cup \{0\}$ des que $\|M\| \le \eta$. Il suffit alors de prendre $A = M^{-1}$ (dès que M est suffisament voisin de 0, $SpA \cap [-i, i] = \emptyset$ est réalisé). ■

Lemme 8. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $SpA \subset \mathbb{C} - [-i,i]$. Il existe $F \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ tel que:*

$$\begin{aligned} &F(\mathbb{R}^2) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} | \ \Re e\, \zeta < 0\} \cup \{0\} \\ &F(V(A) \cup i\mathbb{R}^2) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} | \ \Re e\, \zeta > 0\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

Preuve du Lemme 8: Avec le Lemme 6, on se ramene au cas où A a la forme de Jordan réelle. Il suffit de trouver une fonction pluriharmonique polynomiale de degré 2, φ telle que $\varphi_{|V(A)}$, $\varphi_{|i\mathbb{R}^2}$ soient des formes quadratiques définies-positives et $\varphi_{|\mathbb{R}^2}$ soit définie-négative: φ sera alors la partie réelle d'un polynôme holomorphe F. Cherchons φ de la forme $\varphi(z) = y_1^2 - x_1^2 + y_2^2 - x_2^2 + a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2$, avec a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi les conditions imposées sur $\mathbb{R}^2$ et sur $i\mathbb{R}^2$ sont satisfaites.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$$

on a $z \in V(A)$ si et seulement si $y = Ax$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

Alors $\varphi_{|V(A)}$ est définie-positive

$$\Longleftrightarrow \forall x \neq 0 \ \ (\lambda_1^2 - 1 + a_1\lambda_1)x_1^2 + (\lambda_2^2 - 1 + a_2\lambda_2)x_2^2 > 0$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1^2 - 1 + a_1\lambda_1 > 0 \\ \lambda_2^2 - 1 + a_2\lambda_2 > 0 \end{cases}$$

ce qui est possible puisque $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ ($SpA \cap [-i,i] = \emptyset$).

$$\text{De même, si } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

on a $z \in V(A)$ si et seulement si $y = Ax$

$$\iff \begin{cases} y_1 = \lambda x_1 + x_2 \\ y_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

Alors $\varphi_{|V(A)}$ est définie-positive

$$\iff \forall x \neq 0\, (\lambda x_1 + x_2)^2 - x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 - x_2^2 + a_1(\lambda x_1^2 + x_1x_2) + a_2\lambda x_2^2 > 0$$
$$\iff \forall x \neq 0 \quad (\lambda^2 - 1 + a_1\lambda)x_1^2 + (2\lambda + a_1)x_1x_2 + (\lambda^2 + a_2\lambda)x_2^2 > 0$$
$$\iff \begin{cases} \lambda^2 - 1 + a_1\lambda > 0 \\ (\lambda^2 - 1 + a_1\lambda)(\lambda^2 + a_2\lambda) - \frac{1}{4}(2\lambda + a_1)^2 > 0 \end{cases}$$

conditions qu'on peut satisfaire en choisissant a_1, puis a_2.

$$\text{Enfin, si } A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda + i\mu \notin [-i,i],$$

cherchons φ avec $a_1 = a_2 = a$.

On a $z \in V(A)$ si et seulement si $y = Ax$

$$\iff \begin{cases} y_1 = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y_2 = -\mu x_1 + \lambda x_2 \end{cases}$$

Alors $\varphi_{|V(A)}$ est définie-positive

$$\iff \forall x \neq 0\, (\lambda x_1 + \mu x_2)^2 - x_1^2 + (-\mu x_1 + \lambda x_2)^2 - x_2^2 + a(\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2) > 0$$
$$\iff \forall x \neq 0 \quad (\lambda^2 + \mu^2 - 1 + a\lambda)\|x\|^2 > 0$$
$$\iff \lambda^2 + \mu^2 + a\lambda - 1 > 0.$$

Si $\lambda \neq 0$, on peut trouver a vérifiant cette condition ; si $\lambda = 0$, nécessairement $|\mu| > 1$ et cette condition est satisfaite pour tout a. ■

Montrons maintenant la proposition.

1) Prenons $F_1(z) = z_1^2 + z_2^2$. Supposons que $F_1, \ldots, F_j$ ont été choisis. C_j est un cône ouvert contenant $(i\mathbb{R}^2)^*$. Le Lemme 7 montre qu'il existe

$A_j \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $V^*(A_j) \subset C_j$, $SpA_j \subset \mathbb{C} - [-i,i]$ et $V(A_j) \cup (i\mathbb{R}^2)$ soit polynomialement convexe. D'après le Lemme 8, il existe $F_{j+1} \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ tel que

$$\begin{aligned} &F_{j+1}\big(V(A_j) \cup (i\mathbb{R}^2)\big) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \Re e\,\lambda > 0\} \cup \{0\} \\ &F_{j+1}\big(\mathbb{R}^2\big) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \Re e\,\lambda < 0\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Ceci permet de construire les F_j par récurrence.

2) Soit μ une mesure positive sur K telle que $\mu(P) = 0\ \forall P \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$. Montrons que $\mu = 0$.

Comme $(C_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ décroît, on a:

$$\forall p \geq j \quad V(A_p) \subset C_p \subset C_j \subset \Gamma_j$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad &F_j\big(V(A_p) \cup (i\mathbb{R}^2)\big) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \Re e\,\lambda < 0\} \cup \{0\} \\ \text{et} \quad &F_j\big(V(A_{j-1})\big) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \Re e\,\lambda > 0\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad &F_2\Big(\bigcup_{p\geq 2} V(A_p) \cup (i\mathbb{R}^2)\Big) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \Re e\,\lambda < 0\} \cup \{0\} \\ \text{et} \quad &F_2\big(V(A_1)\big) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \Re e\,\lambda > 0\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème de Mergelyan, il existe une suite $(P_2^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\|P_2^{(\nu)} \circ F_2\|_K \leq 1$, vérifiant $\lim_{\nu\to\infty} P_2^{(\nu)} \circ F_2 = 1$ sur $V(A_1) \cap \overline{B}$ et $\lim_{\nu\to\infty} P_2^{(\nu)} \circ F_2 = 0$ sur $\big(\bigcup_{p\geq 2} V(A_p) \cup i\mathbb{R}^2\big) \cap \overline{B}$ où $\|\cdot\|_K$ est la norme uniforme sur K et $\overline{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{C}^2$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$. On a:

$$\begin{aligned} 0 = \mu\big((P_2^{(\nu)} \circ F_2)P\big) &= \int_K (P_2^{(\nu)} \circ F_2) P d\mu \\ &= \int_{V(A_1)\cap\overline{B}} (P_2^{(\nu)} \circ F_2) P d\mu + \int_{\left(\bigcup_{p\geq 2} V(A_p) \cup i\mathbb{R}^2\right)\cap\overline{B}} (P_2^{(\nu)} \circ F_2) P d\mu. \end{aligned}$$

Par convergence dominée, on obtient: $0 = \int_{V(A_1)\cap\overline{B}} P d\mu$. Comme $V(A_1)$ est polynomialement convexe, on a $\mathcal{C}(K_1) = \mathcal{P}(K_1)$ où $K_1 = V(A_1) \cap \overline{B}$. Donc nécessairement $\mu_1 \equiv \mu_{|K_1}$ est nulle.

Pour $j \geq 1$ soient $K_j = V(A_j) \cap \overline{B}$ et $\mu_j = \mu_{|K_j}$. Montrons que $\forall j \geq 2\ \mu_j = 0$.

Supposons que $\mu_1 = \ldots = \mu_{j-1} = 0$.

$$\text{Comme} \quad F_{j+1}\big(\bigcup_{p>j} V(A_p) \cup (i\mathbb{R}^2)\big) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \Re e\, \lambda < 0\} \cup \{0\}$$
$$\text{et} \quad F_{j+1}\big(V(A_j)\big) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \Re e\, \lambda > 0\} \cup \{0\},$$

il existe une suite $(P_{j+1}^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\|P_{j+1}^{(\nu)} \circ F_{j+1}\|_K \leq 1$, vérifiant $\lim_{\nu\to\infty} P_{j+1}^{(\nu)} \circ F_{j+1} = 1$ sur $V(A_j) \cap \overline{B}$ et $\lim_{\nu\to\infty} P_{j+1}^{(\nu)} \circ F_{j+1} = 0$ sur $\big(\bigcup_{p>j} V(A_p) \cup i\mathbb{R}^2\big) \cap \overline{B}$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$. On a:

$$0 = \mu\big((P_{j+1}^{(\nu)} \circ F_{j+1})P\big) = \int_{\bigcup_{p<j} V(A_p)\cap\overline{B}} (P_{j+1}^{(\nu)} \circ F_2) P d\mu$$
$$+ \int_{V(A_j)\cap\overline{B}} (P_{j+1}^{(\nu)} \circ F_{j+1}) P d\mu + \int_{\left(\bigcup_{p>j} V(A_p)\cup i\mathbb{R}^2\right)\cap\overline{B}} (P_{j+1}^{(\nu)} \circ F_{j+1}) P d\mu.$$

Comme $\mu_1 = \ldots = \mu_{j-1} = 0$, la première intégrale est nulle. Par convergence dominée on obtient $0 = \mu_j(P)$. Donc $\mu_j = 0$, et ainsi $\forall j \in \mathbb{N}^*\ \mu_j = 0$.

Puisque $V(A_1) \cup i\mathbb{R}^2$ est polynomialement convexe, on a, d'après un Théorème de [**2**], $\mathcal{C}(X) = \mathcal{P}(X)$ si $X = (V(A_1) \cup i\mathbb{R}^2) \cap \overline{B}$. Donc $\mu_{|X} = 0$ et $\mu = 0$.

Donc $\mathcal{C}(K) = \mathcal{P}(K)$. En particulier K est polynomialement convexe.

Remarquons que le Lemme 8 permet de montrer le Corollaire suivant:

Corollaire 2. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $SpA \subset \mathbb{C} - [-i, i]$. Soient φ, ψ deux applications $\mathbb{R}$-analytiques de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soient les variétés $\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C}^2 |\ \exists x \in \mathbb{R}^2;\ z = x + i\varphi(x)\}$ et $\mathcal{N} = \{z \in \mathbb{C}^2 |\ \exists x \in \mathbb{R}^2;\ z = x + i\psi(x)\}$.*

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout (φ, ψ) vérifiant $\|\varphi'(0) - A\| \leq \varepsilon$ et $\|\psi'(0)\| \leq \varepsilon$, $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ soit localement polynomialement convexe.

Bibliographie

1. E. KALLIN, Fat polynomially convex sets. Function algebras, Proc. Intern. Symp. Function Algebras, Tulane Univ., 1965. Chicago: Scott, Foresman.

2. A. O'Farrell, K. Preskennis, D. Walsh, Holomorphic approximation in Lipschitz norms, *Contemp. Math.* **32** (1984), 187–194.
3. E. L. Stout, Polynomially convex neighborhoods of hyperbolic points, *Abstracts A. M. S. 7* **174** (1986).
4. P. Thomas, Enveloppes d'unions de plans réels dans $\mathbb{C}^n$, *Ann. Inst. Fourier de Grenoble* **40** (1990), 371–390.
5. P. Thomas, Union minimale de n-plans réels d' enveloppe égale à $\mathbb{C}^n$, *Proc. of Symp. in Pure Maths., Part I* **52** (1991), 233–243.
6. B. Weinstock, On the polynomial convexity of the union of two maximal totally real subspaces of $\mathbb{C}^n$, *Math. Ann.* **282** (1988), 131–138.

Université Paul Sabatier
Laboratoire d'Analyse Complexe
118 Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
FRANCE

Primera versió rebuda el 8 d'Octubre de 1992,
darrera versió rebuda el 29 de Gener de 1993