Publicacions Matemàtiques, Vol **39** (1995), 393–404.

NON RÉSONANCE PRÈS DE LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE D'UN SYSTÈME ELLIPTIQUE QUASILINÉAIRE DE TYPE POTENTIEL

A. El Hachimi et F. de Thélin

Abstract

Let Ω be a bounded regular domain in $\mathbb{R}^n$. In this paper, we study the following problem: find $u \in \prod_{i=1}^{m} W_0^{1,p_i}(\Omega)$ such that:

$$\text{(S)} \qquad -\Delta_{p_i} u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u) + h_i(x) \text{ in } \Omega, \quad 1 \leq i \leq m$$

where $\Delta_{p_i} u_i = \operatorname{div}(|\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i)$, $1 < p_i < +\infty$ and $h_i \in W^{-1,p'_i}(\Omega)$.

We associate to (S) the eigenvalue problem:

$$\text{(VP)} \qquad -\Delta_p v_i = \lambda \alpha_i |v_i|^{\alpha_i - 2} v_i \prod_{j \neq i} |v_j|^{\alpha_j}$$

where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ satisfies $\alpha_i > 0$ and $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$.

We obtain nonresonance results for (S).

Roughly speaking if

$$\limsup \frac{F(x,s)}{|s|^\alpha} < \lambda_1$$

where λ_1 is the first eigenvalue of (VP), we prove the existence of a solution of (S).

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière.

On étudie la non résonance, c'est-à-dire la solvabilité pour tout h, près de la première valeur propre, du système quasilinéaire de type potentiel suivant:

$$(\mathrm{S})\ \begin{cases} -\Delta_{p_i} u_i = f_i(x,u) + h_i(x) \text{ dans } \Omega \\ u_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad 1 \le i \le m,\ m \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

avec $\Delta_{p_i} u_i = \operatorname{div}(|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i)$, $1 < p_i < +\infty$

$$h = (h_1, \dots, h_m) \in \prod_{i=1}^m W^{-1,p_i'}(\Omega),\ \frac{1}{p_i'} + \frac{1}{p_i} = 1 \text{ et où } f = (f_1, \dots, f_m)$$

désigne une fonction de Carathéodory de $\Omega \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ pour laquelle il existe

$$F : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ vérifiant: } \nabla_s F(x,s) = f(x,s).$$

La fonction f correspond essentiellement à une perturbation de la première valeur propre du problème:

$$(\mathrm{V.P})\ \begin{cases} \text{Trouver } u \in \displaystyle\prod_{i=1}^m W_0^{1,p_i}(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta_{p_i} u_i = \lambda \alpha_i |u_i|^{\alpha_i - 2} u_i \displaystyle\prod_{j \ne i} |u_j|^{\alpha_j} \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_+ \backslash \{0\})^m$ vérifie $\displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$.

La première valeur propre de (V.P) a été étudiée par F. de Thélin dans [**T**].

Le résultat que l'on obtient est à rapprocher de celui obtenu par P. Felmer, R. Manasevich et F. de Thélin dans [**F-M-T**] dans le cas où h est une fonction.Ces auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de solutions positives bornées pour (S), sous des conditions semblables à celles considérées dans [**B-O**] et [**D-S**] pour le cas respectifs du laplacien ordinaire et du pseudo-laplacien. (Voir aussi remarque 2 à la fin de ce papier.)

Notre résultat constitue une extension au cas du pseudo-laplacien et plus généralement aux systèmes de type (S) d'un résultat récent de J. V. A. Gonçalves [**G**] obtenu pour l'équation:

$$-\Delta u = f(x,u) + h \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Pour d'autres résultats concernant la nonrésonance près de la première valeur propre du pseudo-laplacien, on peut voir par exemple [**An**], [**An-Go**], [**E-Go**] et leurs références.

D'autres résultats d'existence pour des systèmes de type (S) se trouvent dans [**T-V**] et [**V**].

2. Hypothèses générales et préliminaires

2.1. Notations.

Pour $s = (s_1, \dots, s_m)$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ avec $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq m$, on note:

$$|s| = |s|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |s_i|$$

et

$$|s|^\alpha = \prod_{i=1}^{m} |s_i|^{\alpha_i}.$$

Pour $q \in]1, +\infty[$

$$q' = \frac{q}{q-1} \text{ et } q^* = \begin{cases} \dfrac{Nq}{N-q} & \text{si } N > q \\ +\infty & \text{si } N \leq q \end{cases}$$

$\nu = \prod_{i=1}^{m} W_0^{1,p_i}(\Omega)$ et pour $u = (u_1, \dots, u_m) \in \nu$ et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \prod_{i=1}^{m} W^{-1,p_i'}(\Omega)$:

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle u_i, \varphi_i \rangle_{W^{1,p_i}(\Omega),\, W^{-1,p_i'}(\Omega)}$$

$\| \|_\theta$ désigne la norme dans $L^\theta(\Omega)$, $1 \leq \theta \leq +\infty$.

Et pour $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < +\infty$:

$$\|u\|_{1,q}^q = \|\nabla u\|_q^q.$$

2.2. Première valeur propre de (V.P) et Hypothèses.

Pour $u = (u_1, \dots, u_m) \in \nu$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_+ \backslash \{0\})^m$ avec $\sum_{i=1}^{m} \dfrac{\alpha_i}{p_i} = 1$, on définit:

$$A(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \|u_i\|_{1,p_i}^{p_i} \text{ et } B(u) = \int_\Omega |u|^\alpha.$$

On rappelle le résultat suivant dû à F. de Thélin [**T**].

Théorème 0.

Considéré sous sa forme variationnelle le problème (V.P) admet une plus petite valeur propre:

$$\lambda_1 = \inf\{A(u)/u \in \nu,\, B(u) = 1\}$$

à laquelle est associé un vecteur propre vérifiant $u > 0$ *(ie* $u_i > 0\ \forall_i : 1 \leq i \leq m$*) dans* Ω*, et* $u_i \in \mathcal{C}^{1,\eta_i}(\bar{\Omega})$ *avec* $0 < \eta_i < 1$*,* $\forall_i : 1 \leq i \leq m$*.*

On considère maintenant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_+ \backslash \{0\})^m$ *avec* $\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$ *et on définit* $F_\infty(x) = \limsup_{|s| \to +\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^\alpha}$ *pour* $x \in \Omega$*.*

On suppose vérifiées les hypothèses suivantes:

(H1) *Il existe* $a_\infty \in L^\infty(\Omega)$ *tel que* $F_\infty(x) \leq a_\infty(x)$ *p.p. dans* Ω *avec* $a_\infty(x) \leq \lambda_1$ *p.p dans* Ω *et* $a_\infty(x) < \lambda_1$ *sur un sous ensemble* Ω_0 *de* Ω *de mesure positive.*

(H2) *Il existe* $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*) \in (\mathbb{R}_+ \backslash \{0\})^m$ *avec* $\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i^*}{p_i^*} = 1$ *tel que: pour tout* $i \in \{1, \dots, m\}$*, il existe* a_i *constante* ≥ 0 *et* $b_i \in L^1(\Omega)$ *avec* $b_i(x) \geq 0$ *p.p* $x \in \Omega$ *vérifiant:*

$$|f_i(x,s)| \leq a_i |s|^{\alpha^*} + b_i(x),\ \forall\, s \in \mathbb{R}^m,\ \forall\, x \in \Omega.$$

Dans le cas $N \leq p_i$*,* p_i^* *peut être remplacé par n'importe quel* $q \in]1, +\infty[$*.*

(H3) *Il existe* A_1 *constante* ≥ 0 *et* $A_2 \in L^2(\Omega)$ *avec* $A_2(x) \geq 0$ *p.p* $x \in \Omega$*, tels que:*

$$F(x,s) \leq A_1 |s|^\alpha + A_2(x),\ \forall\, s \in \mathbb{R}^m,\ \forall\, x \in \Omega.$$

3. Résultat de nonrésonance

Pour toute fonction mesurable $\beta : \Omega \to [-\infty; +\infty[$, on pose:

$$i(\beta) = \inf_{\substack{v \in \nu \\ B(v)=1}} \left\{ A(v) - \int_{\prod v_i \neq 0} \beta(x) |v|^\alpha(x)\, dx \right\}.$$

On a: $-\infty < i(\beta) \leq +\infty$ pour tout β.

D'autre part, d'après (H3), on a: $-\infty < F_\infty(x) \leq A_1$ p.p $x \in \Omega$; donc $i(F_\infty)$ est bien défini.

Notre résultat de nonrésonance repose sur la proposition suivante:

Proposition.

Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on a

$$i(F_\infty) > 0. \tag{1}$$

Remarque 1.

Il est facile de vérifier que si $\beta \in L^\infty(\Omega)$ vérifie $i(\beta) > 0$ alors $i(\beta+\varepsilon) > 0$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. On peut donc avoir $F_\infty(x) > \lambda_1$ sur un sous ensemble de Ω de mesure positive sous l'hypothèse $i(F_\infty) > 0$. Ce qui n'est pas le cas dans [**F-M-T**].

Démonstration de la proposition:

Comme $F_\infty(x) \leq a_\infty(x)$ p.p $x \in \Omega$ on a $i(F_\infty) \geq i(a_\infty)$; il suffit donc de montrer que $i(a_\infty) > 0$.

Soit $v \in \nu$ avec $\prod_{i=1}^{m} v_i \not\equiv 0$, on montre d'abord que

$$A(v) - \int_\Omega a_\infty |v|^\alpha > 0. \tag{2}$$

En effet, si v est une fonction propre associée à λ_1, alors d'après l'hypothèse (H1), on a:

$$A(v) - \int_\Omega a_\infty |v|^\alpha = \int_\Omega (\lambda_1 - a_\infty)|v|^\alpha \geq \int_{\Omega_0} (\lambda_1 - a_\infty)|v|^\alpha > 0. \tag{3}$$

Si, par contre $v \not\equiv 0$ n'est pas une fonction propre associée à λ_1, alors, par définition de λ_1, on a:

$$A(v) - \lambda_1 \int_\Omega |v|^\alpha > 0$$

donc

$$A(v) - \int_\Omega a_\infty |v|^\alpha > \int_{\Omega_0} (\lambda_1 - a_\infty)|v|^\alpha \geq 0. \tag{4}$$

De (3) et (4) on déduit (2).

Soit maintenant $v^n \in \nu$ avec $B(v^n) = 1$ une suite minimisante de $i(a_\infty)$, c'est-à-dire telle que:

$$A(v^n) - \int_\Omega a_\infty |v^n|^\alpha \to i(a_\infty).$$

Alors:

$$A(v^n) - \int_\Omega a_\infty |v^n|^\alpha \leq i(a_\infty) + \varepsilon \tag{5}$$

pour tous $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ assez grand correspondant.

D'autre part, avec (H1), $i(a_\infty) \in \mathbb{R}$ et donc $A(v^n) \leq C$, C étant une constante > 0 ne dépendant pas de n. Donc, par extraction d'une sous-suite, v^n converge vers v faiblement dans ν, fortement dans $\prod_{i=1}^{m} L^{p_i}(\Omega)$ et p.p dans Ω. De plus, il existe $\theta_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq m$, tel que:

$$|v_i^n(x)| \leq \theta_i(x) \text{ p.p } x \in \Omega.$$

D'après (5), on a:

$$\begin{aligned} A(v) - \int_\Omega a_\infty |v|^\alpha &\leq \liminf \left(A(v^n) - \int_\Omega a_\infty |v^n|^\alpha \right) \\ &\leq i(a_\infty) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$A(v) - \int_\Omega a_\infty |v|^\alpha \leq i(a_\infty).$$

Comme $B(v^n) = 1$, il résulte que $B(v) = 1$ aussi.

Par suite, d'après (2), on obtient: $i(a_\infty) > 0$.

D'où $i(F_\infty) \geq i(a_\infty) > 0$. ■

On donne à présent le résultat principal.

Théorème 1.

On suppose que (H2), (H3) et (1) sont vérifiées. Alors (S) admet au moins une solution $u \in \nu$.

Une solution de (S) sera bien sûr comprise au sens faible suivant.

Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ il existe $[1, p_i^*[$ tel que $f_i(x, u) \in L^{q_i'}(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^{p_i - 2} \nabla u_i \nabla \varphi_i = \int_\Omega f_i(x, u(x)) \varphi_i(x)\, dx + \langle h_i, \varphi_i \rangle$$

pour tout $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \nu$.

Démonstration de théorème 1:

Elle s'obtient par minimisation de la fonctionnelle énergie I associée à (S) définie par

$$I(u) \equiv A(u) - \int_{\Omega} F(x, u(x))\, dx - \langle h, u \rangle$$

sur ν. On va montrer que la fonctionnelle I est faiblement s.c.i et coercive.

i) I est faiblement s.c.i:

En effet, si $u^n \rightharpoonup u$ dans ν, alors quitte à passer aux sous suites, on a $u^n \to u$ dans $\prod_{i=1}^{m} L^{p_i}(\Omega)$ fort et p.p dans Ω, et de plus, il existe $\theta_i \in L^{p_i}(\Omega)$ tel que

$$|u_i^n(x)| \leq \theta_i(x) \text{ p.p } x \in \Omega, \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Donc, d'après l'hypothèse (H3), on a:

$$\begin{aligned} F(x, u^n(x)) &\leq A_1 |u^n(x)|^{\alpha} + A_2(x) \\ &\leq A_1 |\theta(x)|^{\alpha} + A_2(x) \end{aligned}$$

où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$.

Comme $F(x, u^n(x)) \to F(x, u(x))$ p.p $x \in \Omega$, alors, par application du lemme de Fatou, on a:

$$\limsup \int_{\Omega} F(x, u^n(x))\, dx \leq \int_{\Omega} F(x, u(x))\, dx$$

donc

$$\begin{aligned} I(u) &= A(u) - \int_{\Omega} F(x, u(x))\, dx - \langle h, u \rangle \\ &\leq \liminf A(u^n) - \limsup \int_{\Omega} F(x, u^n(x))\, dx - \lim \langle h, u^n \rangle \\ &\leq \liminf \left\{ A(u^n) - \int_{\Omega} F(x, u^n(x))\, dx - \langle h, u^n \rangle \right\} \\ &= \liminf I(u^n). \end{aligned}$$

Par conséquent, I est faiblement s.c.i.

ii) I est coercive:

On raisonne par l'absurde. On suppse qu'il existe une suite (u^n) dans ν, vérifiant $\|u^n\|_\nu = \max_{1\leq i\leq m}(\|u_i^n\|_{1,p_i}) \to +\infty$ et $I(u^n) \leq C$ où C est une constante > 0.

On pose $t_n = B(u^n)$.

1er cas.

S'il existe $c_1 > 0$ tel que $t_n = B(u^n) \leq C_1$, alors puisque $I(u^n) \leq C$, on obtient en utilisant l'hypothèse (H3):

$$\begin{aligned}
A(u^n) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}\|\nabla u_i^n\|_{1,p_i}^{p_i} &\leq \int_\Omega F(x,u^n(x))\,dx + \langle h, u^n\rangle + C \\
&\leq A_1 B(u^n) + \int_\Omega A_2(x)\,dx + \sum_{i=1}^m \|h_i\|_{-1,p_i'}\|u_i^n\|_{1,p_i} + C \\
&\leq A_1 B(u^n) + \|A_2\|_1 + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i}{p_i}\|u_i^n\|_{1,p_i}^{p_i} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\varepsilon_i p_i'}\|h_i\|_{-1,p_i'}^{p_i'} + C
\end{aligned}$$

avec $0 < \varepsilon_i < 1$, $1 \leq i \leq m$.

De cette dernière inégalité et du fait que $B(u^n) \leq C_1$, on déduit que $\|u^n\|_\nu$ est borné, d'où une contradiction.

2ème cas.

Si $t_n \to +\infty$, on pose $v_i^n = t_n^{-1/p_i} u_i^n$. Alors $B(v^n) = 1$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}\|v_i^n\|_{1,p_i}^{p_i} &= \frac{1}{t_n}\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}\|u_i^n\|_{1,p_i}^{p_i} \\
&\leq \int_\Omega \left[A_1|v^n|^\alpha + \frac{A_2}{t_n}\right] + \sum_{i=1}^m \frac{\langle h, v_i^n\rangle}{t_n^{1/p_i'}} + \frac{C}{t_n} \\
&\leq A_1 + \frac{\|A_2\|_1}{t_n} + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i}{p_i}\|u_i^n\|_{1,p_i}^{p_i} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\varepsilon_i p_i' t_n}\|h_i\|_{-1,p_i'}^{p_i} + \frac{C}{t_n}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que (v^n) est bornée dans ν.

Par conséquent, par extraction éventuelle d'une sous-suite, (v^n), converge vers $v \in \nu$ faiblement dans ν, fortement dans $\prod_{i=1}^m L^{p_i}(\Omega)$ et p.p dans Ω. De plus, il existe $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \prod_{i=1}^m L^{p_i}(\Omega)$ tel que:

$$|v_i^n(x)| \leq \zeta_i(x) \text{ p.p } x \in \Omega.$$

On montre d'abord que:

$$\limsup \int_\Omega \frac{F(x,u^n(x))}{t_n}\,dx \le \int_{\prod v_i\neq 0} F_\infty |v|^\alpha. \tag{6}$$

En effet, on a, d'une part:

$$\frac{F(x,u^n)}{t_n} \le A_1|\zeta(x)|^\alpha + \frac{A_2(x)}{t_n}$$

et, d'autre part:

$$\limsup \frac{F(x,u^n(x))}{t_n} \le \limsup \frac{F(x,u^n(x))}{|u^n|^\alpha(x)} \frac{|u^n|^\alpha(x)}{t_n}\chi_n(x)$$

où χ_n est la fonction caractéristique de l'ensemble:

$$\Omega_n = \{x\in\Omega : u_i^n(x)\neq 0\,\forall\, i\in\{1,\dots,m\}\}$$

donc

$$\begin{aligned}\limsup \frac{F(x,u^n(x))}{t_n} &\le \limsup \frac{F(x,u^n(x))}{|u^n|^\alpha(x)}|v^n|^\alpha(x)\chi_n(x)\\ &\le F_\infty(x)|v|^\alpha(x) \text{ si } \prod_{i=1}^m v_i(x)\neq 0.\end{aligned}$$

Ce qui donne (6), par intégration sur Ω.

Par ailleurs, on a: $I(u^n)\le C$ donc

$$A(u^n) \le \int_\Omega F(x,u^n(x))\,dx + \langle h,u^n\rangle + C$$

par suite

$$A(v^n) = \frac{A(u^n)}{t_n} \le \int_\Omega \frac{F(x,u^n(x))}{t_n}\,dx + \frac{\langle h,u^n\rangle}{t_n} + \frac{C}{t_n}.$$

Par conséquent, en utilisant le lemme de Fatou, il vient:

$$\begin{aligned}A(v) &\le \liminf A(v^n)\\ &\le \liminf\left\{\int_\Omega \frac{F(x,u^n(x))}{t_n}\,dx + \frac{\langle h,u^n\rangle}{t_n} + \frac{C}{t_n}\right\}\\ &\le \limsup\left\{\int_\Omega \frac{F(x,u^n(x))}{t_n}\,dx + \sum_{i=1}^m \frac{\|h_i\|_{-1,p_i'}\|v_i^n\|_{1,p_i}}{t_n^{1/p_i'}} + \frac{C}{t_n}\right\}\\ &\le \limsup \int_\Omega \frac{F(x,u^n(x))}{t_n}\,dx.\end{aligned}$$

Il en résulte, en utilisant (6), que:

$$A(v) - \int_{\prod v_i \neq 0} F_\infty(x)|v|^\alpha(x)\,dx \leq 0$$

avec $v \in \nu$ et $B(v) = 1$. Ce qui contredit l'hypothèse (1) du théorème 1, d'où la coercivité de I.

I étant faiblement s.c.i et coercive, il existe donc $u \in \nu$ tel que:

$$I(u) = \inf_{v \in \nu} I(v)$$

donc

$$\frac{I(u + \varepsilon\varphi) - I(u)}{\varepsilon} \geq 0, \, \forall\, \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^m, \, \varepsilon > 0.$$

Prenant $\varphi = (0, \dots, 0, e, 0, \dots, 0)$, $e \in \mathcal{D}(\Omega)$ au rang i, $1 \leq i \leq m$, il vient:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}[I(u+\varepsilon\varphi) - I(u))] = \frac{1}{\varepsilon}\Bigg\{&\frac{1}{p_i}(\|u_i + \varepsilon e\|_{1,p_i}^{p_i} - \|u_i\|_{1,p_i}^{p_i}) \\ &- \int_\Omega [F(x,(u+\varepsilon\varphi)(x)) - F(x,u(x))\,dx]\Bigg\} \\ &- \langle h_i, e\rangle.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a:

$$F(x,(u+\varepsilon\varphi)(x)) - F(x,u(x)) = \varepsilon f_i(x, \theta^\varepsilon(x))e(x)$$

où $\theta^\varepsilon(x) = (\theta_1^\varepsilon(x), \dots, \theta_m^\varepsilon(x))$ avec

$$\min\{u_i(x), u_i(x) + \varepsilon e(x)\} \leq \theta_i^\varepsilon(x) \leq \max\{u_i(x), u_i(x) + \varepsilon e(x)\}.$$

Par conséquent, il existe $k_i \in W_0^{1,p_i}(\Omega) \subset L^{p_i^*}(\Omega) \subset L^{\alpha_i^*}(\Omega)$ tel que:

$$|\theta_i^\varepsilon(x)| \leq k_i(x) \text{ p.p } x \in \Omega \text{ et pour } \varepsilon \in]0,1[.$$

Ainsi, il existe $k_i \in \nu$ tel que:

$$|f_i(x, \theta^\varepsilon(x))| \leq a_i|k_i(x)|^{\alpha^*} + b_i(x).$$

Comme pour $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon}(F(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x)) - F(x,u(x)) \to f_i(x,u(x))e(x) \text{ p.p dans } \Omega,$$

il résulte par utilisation du lemme de Fatou que:

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla e \geq \int_\Omega f_i(x,u(x))e(x)\,dx + \langle h_i, e\rangle \tag{7}$$

pour tout $e \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $i \in \{1,\dots,m\}$.

Prenant $-e$ au lieu de e dans (7), on déduit que $u = (u_1,\dots,u_m)$ est solution faible de (S), d'où la fin de la démonstration du théorème 1. ■

Remarque 2.

Un résultat similaire au théorème 1 peut être déduit de [**F-M-T**] sous l'hypothèse $i(f_\infty) > 0$ où

$$f_\infty(x) = \lim_{|t|\to+\infty} \frac{\hat{f}(t,x,u)}{|u|^\alpha(x)}$$

avec $\hat{f} : t \to \hat{f}(t,x,u) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} f_i(x, t^{1/p_1}u_1,\dots,t^{1/p_m}u_m)t^{1/p_i}u_i$.

Il est clair cependant que:

$$F_\infty(x) \leq f_\infty(x) \text{ p.p } x \in \Omega \tag{8}$$

donc que:

$$i(F_\infty) \geq i(f_\infty).$$

La condition $i(F_\infty) > 0$ considérée ici est donc plus faible que $i(f_\infty) > 0$.

En effet, prenant $m = 1$, c'est-à-dire:

$$f_\infty(x) = \limsup_{|s|\to+\infty} \frac{1}{p_1}\frac{f(x,s)}{|s|^{p_1-2}s}$$

et $F_\infty(x) = \limsup\limits_{|s|\to+\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^{p_1}}$ et, prenant $f_1(x,s) = a(x)|s|^{p_1-2}s\sin(s)$ avec $a(x)$ une fonction non inférieure à "la première valeur propre" $\lambda_1(f_\infty)$ de l'opérateur $-\Delta_{p_1}v - f_\infty|v|^{p_1-2}v$ avec condition nulle sur le bord, on obtient $f_\infty(x) = a(x)$ et $F_\infty(x) \equiv 0$.

References

[An] O. Anane, Thèse, Université Libre de Bruxelles (1988).

[An-Go] O. Anane et J. P. Gossez, Strongly nonlinear elliptic problems near resonance: a variational approach, *Comm. Part. Diff. Eq.* **15** (1990), 1141–1159.

[B-O] H. Brezis et L. Oswald, Remarks on sublinear elliptic equations, *Nonlin. Anal. T.M.A.* **10(1)** (1986), 55–64.

[D-S] J. I. Diaz et E. Saa, Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires, *C.R. Acad. Sci. Paris* **305, I** (1987), 521–524.

[E-Go] A. El Hachimi et J. P. Gossez, A note on a resonance condition for a quasilinear elliptic problem, to appear in *Nonlin. Anal. T.M.A.*

[F-M-T] P. Felmer, R. Manasevich et F. de Thélin, Existence and uniqueness of positive solutions for certain quasilinear elliptic systems, *Comm. in P.D.E.* **17** (1992), 2013–2029.

[G] J. V. A. Gonçalves, On nonresonant sublinear elliptic problems, *Nonlin. Anal. T.M.A.* **15(10)** (1990), 915–920.

[T] F. de Thélin, Première valeur propre d'un système elliptique non linéaire, *Rev. Math. Appl.* Univ. de Chile **13(1)** (1992), p. 1–8.

[T-V] F. de Thélin et J. Vélin, Existence et non existence de solutions non triviales pour des systèmes elliptiques non linéaires, *C.R. Acad. Sci. Paris* **313, série 1** (1991), 589–592.

[V] J. Vélin, Thèse, Université Paul Sabatier (1991).

Laboratoire M.I.P.
Université Paul Sabatier
31062 Toulouse Cédex
FRANCE

Rebut el 24 de Maig de 1995