

SOUS-ENSEMBLES DE COURBES AHLFORS-RÉGULIÈRES ET NOMBRES DE JONES

HERVÉ PAJOT

Abstract

We prove that an Ahlfors-regular set (with dimension one) $E \subset \mathbb{R}^n$ which verifies a β_q -version of P. W. Jones' geometric lemma is included in an Ahlfors-regular curve Γ .

This theorem is due to G. David and S. Semmes, we give a more direct proof.

1. Introduction

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble 1-régulier.

On rappelle qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est 1-régulier (ou Ahlfors-régulier de dimension 1) si et seulement si E est fermé et s'il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $x \in E$, pour tout $R \in]0, \text{diam } E[$,

$$(1) \quad C_0^{-1}R \leq H^1(E \cap B(x, R)) \leq C_0 R.$$

(H^1 désigne la 1-mesure de Hausdorff, voir [M].)

La plus petite constante positive C_0 vérifiant (1) est la constante de régularité de E .

On souhaite relier la géométrie de E à certaines estimations L^2 et pour cela, on s'inspire d'un résultat de Peter Jones.

On définit les nombres β_∞ de Jones pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $t > 0$ par, si $E \cap B(x, t) \neq \emptyset$,

$$(2) \quad \beta_\infty(x, t, E) = \inf_L \sup_{y \in E \cap B(x, t)} \left(\frac{\text{dist}(y, L)}{t} \right)$$

ou l'inf est pris sur toutes les droites L de \mathbb{R}^n , et si $E \cap B(x, t) = \emptyset$, $\beta_\infty(x, t, E) = 0$.

Les β_∞ mesurent dans toute boule la qualité de l'approximation de E par des droites.

A l'aide de ces nombres, Jones a donné une caractérisation des sous-ensembles de courbes rectifiables, ce qui apparait comme une version géométrique du problème du voyageur de commerce.

Théorème 1.1 ([J],[O]). *Soit E un ensemble compact de \mathbb{R}^n .*

Il existe une courbe rectifiable Γ contenant E si et seulement si le nombre

$$(3) \quad \beta^2(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\text{diam } E} \beta_\infty(x, t, E)^2 dx \frac{dt}{t^n}$$

est fini et on a alors

$$(4) \quad \inf_{\Gamma \supset E} H^1(\Gamma) \leq C(\beta^2(E) + \text{diam } E).$$

(ici, l'intégration en x se fait par rapport à la mesure de Lebesgue n -dimensionnelle).

Considérons des versions L^q des β_∞ de Jones.

Pour tout $q \geq 1$, tout $x \in E$, tout $t > 0$, on définit

$$(5) \quad \beta_q(x, t, E) = \inf_L \left(\frac{1}{t} \int_{y \in E \cap B(x, t)} \left(\frac{\text{dist}(y, L)}{t} \right)^q dH^1(y) \right)^{\frac{1}{q}}$$

où l'inf est pris sur toutes les droites L de \mathbb{R}^n .

Le but de cet article est de donner une preuve du résultat suivant.

Soit $q \geq 1$.

Théorème 1.2. *Soit E un ensemble 1-régulier compact de \mathbb{R}^n .*

Si $\beta_q(x, t, E)^2 dH^1(x) \frac{dt}{t}$ définit une mesure de Carleson sur $E \times \mathbb{R}^+$, id est, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$, tout $R > 0$,

$$(6) \quad \int_{y \in E \cap B(x, R)} \int_0^R \beta_q(y, t, E)^2 dH^1(y) \frac{dt}{t} \leq CR,$$

alors $E \subset \Gamma$, où Γ est une courbe Ahlfors-régulière (c'est à dire une courbe vérifiant (1)).

La même construction donne

Théorème 1.3. *Soit E un ensemble 1-régulier compact de \mathbb{R}^n .*

Si

$$(7) \quad \beta_q(E)^2 = \int_E \int_0^{\text{diam } E} \beta_q(x, t, E)^2 dH^1(x) \frac{dt}{t} < \infty,$$

alors $E \subset \Gamma$, où Γ est une courbe de longueur finie, et on a de plus,

$$(8) \quad \inf_{\Gamma \supset E} H^1(\Gamma) \leq C (\beta_q(E)^2 + \text{diam } E).$$

On rappelle qu'un ensemble régulier vérifiant (6) est dit uniformément rectifiable (voir [DS1] ou [DS2]).

G. David et S. Semmes ont donné une preuve du Théorème 1.2 et de sa réciproque. Leur preuve reste valable dans le cas d'ensembles d-réguliers avec $d \geq 2$ et est assez technique. L'argument principal est la décomposition de la couronne de E qui est très pratique et utile, mais qui est très difficile à établir (les paragraphes 2, 7, 8, 9, 12, 13 de [DS1] y sont consacrés).

Notre but est de donner une démonstration plus directe et plus simple du Théorème 1.2. On s'inspire d'un algorithme lié au problème classique du voyageur de commerce, "l'insertion du plus proche voisin" (voir [L]), que Jones avait déjà utilisé dans sa construction.

Remarque. La démonstration de Jones donne le Théorème 1.2 pour $q = \infty$. Ce qui n'est pas le cas si $q \neq \infty$.

Une très belle application du Théorème 1.2 est donnée dans [MMV]. Mattila, Melnikov et Verdera montrent que si, pour un ensemble 1-régulier E , l'opérateur de Cauchy définit un opérateur borné sur $L^2(E)$, c'est à dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(E)$, tout $\varepsilon > 0$,

$$(9) \quad \int_E \left| \int_{E/B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dH^1(\xi) \right|^2 dH^1(z) \leq C \int_E |f|^2$$

alors E vérifie (6) avec $q = 2$ (et non pas $q = \infty$, ce qui ne permet pas d'utiliser le théorème de Jones), et donc, d'après le Théorème 1.2, E est inclus dans une courbe Ahlfors-régulière.

Je tiens à remercier Guy David pour ses nombreux conseils et suggestions.

2. Idée de la preuve du Théorème 1.2 et lemmes préparatoires

Donnons une idée de la construction de P. W. Jones (Théorème 1.1).

Soit E vérifiant (3) et tel que $\text{diam } E = 1$.

On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un ensemble Δ_k de points 2^{-k} denses de E , c'est à dire tels que

- (i) si $x, y \in \Delta_k$ avec $x \neq y$, $\text{dist}(x, y) \geq 2^{-k}$;
- (ii) pour tout $y \in E$, il existe $x \in \Delta_k$ tel que $\text{dist}(x, y) < 2^{-k}$.

On construit par récurrence une suite de courbes (Γ_k) formées de segments dont les extrémités sont les points de Δ_k . En passant à la limite, on obtient une courbe Γ qui contient E .

La difficulté consiste à estimer la longueur ajoutée $l(\Gamma_{k+1}) - l(\Gamma_k)$ en fonction des β_∞ .

Donnons un aperçu des calculs.

Supposons donc que l'on a construit Γ_k et considérons $x \in \Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$. On veut construire à partir de Γ_k une nouvelle courbe passant par x (en ajoutant le moins de longueur possible).

Soit $[y, z]$ le segment de Γ_k le plus près de x .

Les cas de référence sont les suivants.

Cas A. $K^{-1} \text{dist}(x, z) \leq \text{dist}(x, y) \leq K \text{dist}(x, z)$ (où K est une constante positive).

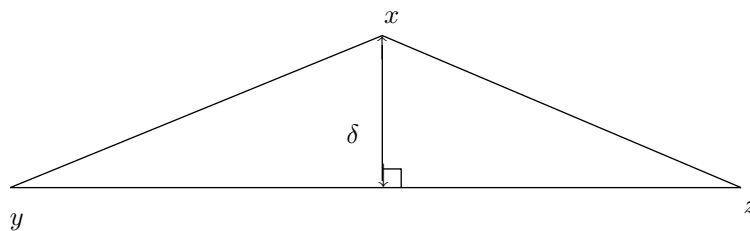


Figure 1

La nouvelle courbe est obtenue à partir de Γ_k en remplaçant le segment $[y, z]$ par les segments $[y, x]$ et $[x, z]$.

Supposons que $\beta_\infty(x, C2^{-k}, E)$ soit très petit (c'est à dire que E est "plat" au voisinage de x à l'échelle 2^{-k}).

Alors, $\delta \sim \beta_\infty(x, C2^{-k}, E)$ (voir Figure 1).

D'où, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$(10) \quad \text{dist}(y, x) + \text{dist}(x, z) - \text{dist}(y, z) \leq C\beta_\infty(x, C2^{-k}, E)^2 2^{-k}.$$

Cas B. $\text{dist}(x, z) \geq K \text{dist}(x, y)$.



Figure 2

La nouvelle courbe est obtenue à partir de Γ_k en ajoutant le segment $[y, 2x - y]$. La longueur ajoutée est alors inférieure à $\frac{1}{3} \text{dist}(y, z)$ (si K est assez grand). En fait, le segment $[y, z]$ ne sera pas changé dans la suite de la construction, donc $[y, z] \subset \Gamma$.

Dans les autres cas pour l'insertion de x , on se ramène à un des cas précédents.

On obtient donc

$$(11) \quad \begin{aligned} l(\Gamma) - l(\Gamma_0) &\leq \sum_k (l(\Gamma_{k+1}) - l(\Gamma_k)) \\ &\leq C \sum_k \sum_{x \in \Delta_k} \beta_\infty(x, C2^{-k}, E)^2 2^{-k} + \frac{1}{3} l(\Gamma). \end{aligned}$$

Dans (11), la somme vient du Cas A, le deuxième membre vient du Cas B.

Par construction, $l(\Gamma_0) \leq C \text{diam } E$.

On a ainsi (4)

$$l(\Gamma) \leq C(\beta^2(E) + \text{diam } E).$$

Si $q \neq \infty$, l'estimation dans le Cas A ne peut pas se faire aussi facilement. Nous allons en fait, au lieu d'insérer directement x , insérer un point de E proche à l'échelle 2^{-k} de x tel que l'on puisse estimer la longueur ajoutée en fonction des β_q .

Commençons donc par quelques lemmes.

Lemme 2.1. *Pour tout $1 \leq q < \infty$, tout $x \in E$, tout $t > 0$,*

$$(12) \quad \beta_1(x, t, E) \leq C_0^{1-\frac{1}{q}} \beta_q(x, t, E)$$

où C_0 est la constante de régularité de E .

Ce lemme découle des inégalités de Hölder et de la régularité de E .

Il nous suffit, d'après le Lemme 2.1, de démontrer le Théorème 1.2 pour $q = 1$.

Lemme 2.2. *Pour tout $x \in E$, tout $t > 0$, on a*

$$(13) \quad \beta_\infty(x, t, E) \leq C \beta_1(x, 2t, E)^{\frac{1}{2}}$$

où la constante C ne dépend pas de x et t .

Preuve du Lemme 2.2:

On considère D une droite pour laquelle $\beta_1(x, 2t, E)$ est atteint.

Soit y le point de $E \cap B(x, t)$ le plus loin de D .

Premier cas: $\text{dist}(y, D) > t$.

Alors $\beta_1(x, 2t, E) \geq C$, d'où le Lemme 2.2.

Deuxième cas: $\text{dist}(y, D) \leq t$.

On note $d = \frac{1}{2} \text{dist}(y, D)$.

Pour tout $z \in B(y, d)$, on a

$$\text{dist}(z, D) \geq d.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \beta_1(x, 2t, E) &= \frac{1}{2t} \int_{z \in E \cap B(x, 2t)} \frac{\text{dist}(z, D)}{2t} dz \\ &\geq \frac{1}{4t^2} \int_{z \in E \cap B(y, d)} \text{dist}(z, D) dz \\ &\geq \frac{1}{4t^2} dH^1(E \cap B(y, d)) \\ &\geq \frac{1}{4} C_0^{-1} \left(\frac{d}{t} \right)^2 \\ &\geq C \beta_\infty(x, t, E)^2 \end{aligned}$$

où C_0 est la constante de régularité de E .

Ce qui finit la preuve du Lemme 2.2. ■

Soient A une constante positive très petite, K une constante positive très grande, N un entier très grand.

On va maintenant associer à tout $x \in E$ une suite (x_k) de points de E telle que, pour tout k , si on veut insérer x dans Γ_k , on insérera x_k , dans un premier temps, à la place de x , afin de pouvoir contrôler la longueur ajoutée en termes de β_1 .

Lemme 2.3. *Pout tout $x \in E$, tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe une suite $(x_j)_{j \geq k}$ de points de E telle que*

$$1. \ x_k \in B(x, A2^{-(k+1)N}) \text{ et}$$

$$(14) \quad \text{dist}(x_k, L_k) \leq C\beta_1(x, K2^{-kN}, E)2^{-kN}$$

$$(15) \quad \text{dist}(x_k, L_{k+1}) \leq C\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)2^{-(k+1)N}$$

où L_i , $i = k, k+1$, est une droite telle que

$$\beta_1(x, K2^{-iN}, E) = \frac{1}{K2^{-iN}} \int_{y \in E \cap B(x, K2^{-iN})} \frac{\text{dist}(y, L_i)}{K2^{-iN}} dH^1(y);$$

$$2. \text{ pour tout } j \geq k+1, x_{j+1} \in B(x_j, A2^{-(j+1)N}) \text{ et}$$

$$(16) \quad \text{dist}(x_{j+1}, L_{j+1}) \leq C\beta_1(x_j, K2^{-(j+1)N}, E)2^{-(j+1)N}$$

où L_{j+1} est une droite telle que

$$\begin{aligned} & \beta_1(x_j, K2^{-(j+1)N}, E) \\ &= \frac{1}{K2^{-(j+1)N}} \int_{y \in E \cap B(x_j, K2^{-(j+1)N})} \frac{\text{dist}(y, L_{j+1})}{K2^{-(j+1)N}} dH^1(y). \end{aligned}$$

Remarques. (i) On choisira toujours $x_k = x_{k+1}$, si x_k vérifie la propriété 2 du Lemme 2.3 à l'échelle $2^{-(k+1)N}$. Les propriétés 1 et 2 (pourtant très proches) sont nécessaires pour des raisons techniques.

(ii) Le k dans le Lemme 2.3 correspond à l'échelle à laquelle on veut insérer x .

Preuve du Lemme 2.3:

Soit $x \in E$, $t > 0$.

On considère D une droite pour laquelle $\beta_1(x, t, E)$ est atteint.

D'après l'inégalité de Tchebychev, on a

$$\begin{aligned} H^1(\{y \in E \cap B(x, At) : \text{dist}(y, D) \geq C\beta_1(x, t, E)t\}) &\leq C^{-1}t \\ &\leq 2^{-N}C_0^{-2}H^1(E \cap B(x, At)) \end{aligned}$$

à condition que $C^{-1} \leq 2^{-N}AC_0^{-3}$.

Donc,

$$\begin{aligned} H^1(\{y \in E \cap B(x, At) : \text{dist}(y, D) \leq C\beta_1(x, t, E)t\}) \\ \geq (1 - 2^{-N}C_0^{-2})H^1(E \cap B(x, At)), \end{aligned}$$

où $C_0^{-2}2^{-N}$ est la valeur minimale du rapport

$$\frac{H^1(E \cap B(x, A2^{-(j+1)N}))}{H^1(E \cap B(x, A2^{-jN}))}.$$

En appliquant ce résultat, on obtient le Lemme 2.3. ■

On note x_∞ le point de E limite de la suite (x_j) et on pose $f_{k-1}(x_\infty) = x_k$ et pour tout $j \geq k$, $f_j(x_\infty) = x_j$.

Remarque. On a donc $f_{k-1}(x_\infty) = f_k(x_\infty)$ (Propriété 1 du Lemme 2.3).

On a alors, avec une constante K différente de la précédente,

$$(17) \quad \text{dist}(x_k, D_k) \leq C\beta_1(x_\infty, K2^{-kN}, E)2^{-kN}$$

$$(18) \quad \text{dist}(x_k, D_{k+1}) \leq C\beta_1(x_\infty, K2^{-(k+1)N}, E)2^{-(k+1)N}$$

et pour tout $j \geq k+1$,

$$(19) \quad \text{dist}(x_{j+1}, D_{j+1}) \leq C\beta_1(x_\infty, K2^{-(j+1)N}, E)2^{-(j+1)N}$$

où D_i est une droite telle que

$$\beta_1(x_\infty, K2^{-iN}, E) = \frac{1}{K2^{-iN}} \int_{y \in E \cap B(x_\infty, K2^{-iN})} \frac{\text{dist}(y, D_i)}{K2^{-iN}} dH^1(y).$$

Remarquons que, si x et y sont dans E avec $\text{dist}(x, y) \leq \frac{K}{100}2^{-kN}$, alors

$$(20) \quad \text{dist}(f_k(y), L_k) \leq C\beta_1(x, CK2^{-kN}, E)2^{-kN}$$

où L_k est une droite pour laquelle $\beta_1(x, K2^{-kN}, E)$ est atteint.

Donnons une idée plus précise de la façon dont nous allons modifier la construction de Jones afin de démontrer le Théorème 1.2.

Le but est toujours de construire une suite d'ensembles connexes (Γ_k) qui à la limite donnera Γ .

Dans le paragraphe 3, on construit des ensembles Δ_k de points de E presque 2^{-kN} denses, et on donne les propriétés de récurrence vérifiées par les Γ_k . En particulier, Γ_k contient les points $f_k(x)$ où $x \in \Delta_k$.

On construit ensuite (paragraphe 4) $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ à partir de Γ_k en insérant les points $f_k(x)$ où $x \in \Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$. Les cas de références sont essentiellement les mêmes que dans la construction de Jones. Dans le Cas A, grâce au Lemme 2.3, δ (voir Figure 1) est comparable à $\beta_1(x, C2^{-k}, E)$, et donc l'estimation se fait de la même façon (en utilisant le théorème de Pythagore).

Dans le paragraphe 5, on construit à partir de $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ l'ensemble Γ_{k+1} en remplaçant les points $f_k(x)$, où $x \in \Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$, par les points $f_{k+1}(x)$. Par passage à la limite, on obtiendra un ensemble Γ connexe, Ahlfors-régulier de dimension 1 contenant E (paragraphe 6). Ce qui suffit pour prouver le Théorème 1.2, puisque tout ensemble connexe, compact et de H^1 -mesure finie est une courbe rectifiable (voir [DS2], Théorème 1.8 de la partie I, ainsi que le chapitre 1 de la partie II).

3. Hypothèses de récurrence

On suppose que $\text{diam } E = 1$.

On se donne des grandes constantes positives K_1, K_2, K_3 . On choisit K_3 très grande devant K_2 qui elle dominera K_1 . Les constantes K et A du Lemme 2.3 sont telles que K est très grande devant K_1, K_2 et K_3 alors que A est très petite par rapport à ces mêmes constantes. L'entier N est choisi tel que $2^{-N} \ll K_3^{-1}$.

On notera $l(\cdot)$ la longueur d'un segment ou d'un arc de courbe.

Commençons par construire des ensembles $(\Delta_j)_j$ de points de E qui seront presque des réseaux de points 2^{-jN} denses.

Pour cela, on considère $\Delta_0 = \{x_\infty, y_\infty\}$ où x et y sont des points de E tels que $\text{diam } E = \text{dist}(x, y)$ et x_∞ et y_∞ sont les points limites de x et y donnés par le Lemme 2.3.

Supposons que l'on ait construit Δ_{j-1} .

On considère \tilde{A}_j un ensemble maximal de points de E tels que

1. si $x, y \in \tilde{A}_j$, $x \neq y$, alors $\text{dist}(x, y) \geq 2(K_1 + 2A)2^{-jN}$;
2. si $x \in \tilde{A}_j$, $y \in \Delta_{j-1}$, $x \neq y$, alors $\text{dist}(x, y) \geq 2(K_1 + 2A)2^{-jN}$.

Soit $A_j = \{x_\infty : x \in \tilde{A}_j\}$.

On pose alors $\Delta_j = A_j \cup \Delta_{j-1}$.

Par construction, Δ_j a les propriétés suivantes:

- (i) On dira que $x \in \Delta_j$ est de la l -ième génération si $x \in A_l = \Delta_l / \Delta_{l-1}$ (ce qui signifie essentiellement que x a été inséré à la l -ième étape). Tout point x de Δ_j de la l -ième génération est

point limite d'une suite $(f_i(x))_{i \geq l-1}$ de points de E vérifiant les propriétés du Lemme 2.3.

Rappel. Si $x \in A_j$, alors $f_j(x) = f_{j-1}(x)$.

(ii) Si $x, y \in \Delta_j$ avec $x \neq y$,

$$(21) \quad \text{dist}(x, y) \geq 2K_1 2^{-jN},$$

d'où, si A est assez petit,

$$(22) \quad \text{dist}(f_j(x), f_j(y)) \geq K_1 2^{-jN}.$$

(iii) Pour tout $y \in E$ avec $y \notin \Delta_j$, il existe $x \in \Delta_j$ tel que

$$(23) \quad \text{dist}(x, y) \leq 2(K_1 + 2A) 2^{-jN}.$$

Comme K_2 domine K_1 ,

$$(24) \quad \text{dist}(x, y) \leq K_2 2^{-jN}.$$

Supposons maintenant que l'on ait construit des ensembles connexes $\Gamma_0, \dots, \Gamma_k$ formés de segments avec les propriétés suivantes.

(P_0) $\Gamma_0 = [f_0(x) + K_2^2(f_0(y) - f_0(x)), f_0(y) + K_2^2(f_0(x) - f_0(y))]$ où x et y sont les points de Δ_0 .

(P_1) $\tilde{\Delta}_j \subset \Gamma_j$ où, pour $j = 0, \dots, k-1$, $\tilde{\Delta}_j = \{f_j(x), x \in \Delta_j\}$. Les points de $\tilde{\Delta}_j$ sont des extrémité de segments de Γ_j .

Notation.

On distingue parmi les segments de Γ_j deux types de segments particuliers:

Un segment L de Γ_j est principal si $L = [f_j(x), f_j(y)]$ où $x, y \in \Delta_j$.

Un segment principal est de la l -ième génération si une de ses extrémité est de la l -ième génération, l'autre étant d'une génération précédente.

D'après la propriété (ii) de Δ_j , si L est un segment principal de Γ_j ,

$$(25) \quad l(L) \geq K_1 2^{-jN}.$$

Un segment L de Γ_j est non principal si $L = [f_j(x), a_j(x)]$ où $x \in \Delta_j$ et $a_j(x)$ n'est pas dans $\tilde{\Gamma}_j$. L'extrémité $a_j(x)$ est l'extrémité d'un seul segment.

Remarque. Γ_k peut contenir des segments qui ne sont pas d'un des deux types précédents. Ils interviendront de manière naturelle dans la suite de la construction.

(P_2) Si L est un segment non principal de Γ_j ,

$$(26) \quad l(L) \geq K_1 K_2^2 2^{-jN}.$$

(P_3) Tout point $f_j(x)$, $x \in \Delta_j$, est une extrémité d'au moins deux segments de Γ_j (dont un principal), l'extrémité d'au plus un segment non principal.

(P_4) Tout point $f_j(x)$, $x \in \Delta_j$, vérifie la propriété du cône:

Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ fixé (θ est indépendant des autres constantes).

Si tous les segments principaux de Γ_j ayant pour extrémité $f_j(x)$ sont dans un cône de sommet $f_j(x)$ d'angle θ , alors $f_j(x)$ est l'extrémité d'un segment non principal $[f_j(x), a_j(x)]$.

Remarque. Ceci implique que, si $f_j(x)$ est l'extrémité d'un seul segment principal de Γ_j , alors il est l'extrémité d'un segment non principal.

4. Construction de $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ à partir de Γ_k

Soit Γ_k l'ensemble connexe vérifiant les propriétés décrites au paragraphe précédent.

On va, dans ce paragraphe, construire à partir de Γ_k un ensemble connexe $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ contenant les points $f_k(x)$, $x \in A_{k+1} = \Delta_{k+1}/\Delta_k$.

On considère x le point de A_{k+1} le plus loin de Δ_k . On suppose que $x \notin \Gamma_k$ sinon il n'y a rien à faire.

Soit y le point de Δ_k le plus près de x .

On suppose dans un premier temps qu'il existe un segment principal $[f_k(y), f_k(z)]$ de Γ_k avec $z \in \Delta_k$ tel que l'on ait la propriété (*):

(*) la projection de $f_k(x)$ sur la droite engendrée par $f_k(y)$ et $f_k(z)$ est à l'intérieur du segment $[f_k(y), f_k(z)]$.

Remarque. Les Cas A I et A II suivants sont très proches des Cas A et B de Jones décrits au paragraphe 2. Les estimations sur la longueur ajoutée par l'insertion de $f_k(x)$ se font de la même manière que celles de Jones, c'est à dire soit en fonction de β_1 (Cas A I), soit en fonction de la longueur d'un segment de Γ_k (Cas A II).

Cas A I. $K_3^{-1} \text{dist}(f_k(x), f_k(z)) \leq \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \leq K_3 \text{dist}(f_k(x), f_k(z))$.

Soit $\Gamma_{k+1}^{(1)}$ la courbe obtenue à partir de Γ_k en remplaçant le segment $[f_k(y), f_k(z)]$ par les segments $[f_k(y), f_k(x)]$ et $[f_k(x), f_k(z)]$.

Cette transformation sera appelée par la suite transformation A (elle correspond au Cas A de Jones, voir le paragraphe 2).

On cherche maintenant à évaluer $\Delta = l(\Gamma_{k+1}^{(1)}) - l(\Gamma_k)$.

Soit ε_0 une constante positive très petite.

Supposons dans un premier temps que $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$.

• $f_k(x)$



Figure 3

On considère D_k une droite pour laquelle

$$\beta_1(x, K2^{-kN}, E) = \frac{1}{K2^{-kN}} \int_{y \in E \cap B(x, K2^{-kN})} \frac{\text{dist}(y, D_k)}{K2^{-kN}} dH^1(y).$$

Alors, d'après le Lemme 2.3 et (20), si K est assez grand par rapport à K_3 et A ,

$$(27) \quad \text{dist}(f_k(x), D_k) \leq C\beta_1(x, K2^{-kN}, E)2^{-kN}$$

$$(28) \quad \text{dist}(f_k(y), D_k) \leq C\beta_1(x, K2^{-kN}, E)2^{-kN}$$

$$(29) \quad \text{dist}(f_k(z), D_k) \leq C\beta_1(x, K2^{-kN}, E)2^{-kN}.$$

D'où, si on note D la droite engendrée par $f_k(y)$ et $f_k(z)$,

$$(30) \quad \text{dist}(f_k(x), D) \leq C\beta_1(x, K2^{-kN}, E)2^{-kN}.$$

Donc, par le théorème de Pythagore,

$$(31) \quad \begin{aligned} \Delta &= \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) + \text{dist}(f_k(x), f_k(z)) - \text{dist}(f_k(y), f_k(z)) \\ &\leq C\beta_1(x, K2^{-kN}, E)^2 2^{-kN}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \geq \varepsilon_0$.

On a alors d'après le Lemme 2.2,

$$\beta_1(x, K2^{-kN+1}, E) \geq C^{-1} \beta_\infty(x, K2^{-kN}, E)^2 \geq C^{-1} \varepsilon_0^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} (32) \quad \Delta = l(\Gamma_{k+1}^{(1)}) - l(\Gamma_k) &\leq \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) + \text{dist}(f_k(x), f_k(z)) \\ &\leq (1 + K_3) \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \\ &\leq C(1 + K_3) K_2 2^{-kN} \text{ d'après (24)} \end{aligned}$$

$$(33) \quad \leq C \frac{(1 + K_3) K_2}{\varepsilon_0^4} \beta_1(x, K2^{-kN+1}, E)^2 2^{-kN}.$$

Donc,

$$(34) \quad \Delta \leq C \beta_1(x, K2^{-kN+1}, E)^2 2^{-kN}.$$

Cas A II. $\text{dist}(f_k(y), f_k(x)) \leq K_3^{-1} \text{dist}(f_k(z), f_k(x))$.

$\Gamma_{k+1}^{(1)}$ est obtenu en ajoutant à Γ_k le segment principal $[f_k(y), f_k(x)]$ et le segment non principal

$$[f_k(x), f_k(x) + K_2^2(f_k(x) - f_k(y))].$$

Cette transformation sera appelée par la suite transformation B (elle correspond au Cas B de Jones, voir paragraphe 2).



Figure 4

On a alors $\Delta = l(\Gamma_{k+1}^{(1)}) - l(\Gamma_k) = (K_2^2 + 1) \text{dist}(f_k(y), f_k(x))$.

Supposons que $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$.

Si $[f_k(y), f_k(z)]$ est un segment de la k-ième génération, on a

$$\begin{aligned} (35) \quad \Delta &\leq C(K_2^2 + 1) K_3^{-1} \text{dist}(f_k(x), f_k(z)) \\ &\leq C(K_2^2 + 1) K_3^{-1} \text{dist}(f_k(y), f_k(z)). \end{aligned}$$

Si $[f_k(y), f_k(z)]$ est un segment de la j-ième génération (avec $j < k$), on a

$$(36) \quad \Delta \leq C(K_2^2 + 1) K_3^{-1} \frac{\text{dist}(f_j(y), f_j(z))}{2^{(k-j)N}}.$$

Ceci vient du fait que d'une étape à une autre, les longueurs sont divisées par deux. Ainsi, sur la Figure 4, on suppose que $x' \in \Delta_{k+2}$ et qu'il sera inséré à l'étape $k+2$ par une transformation B. Alors, $\text{dist}(f_{k+1}(x'), f_{k+1}(y))$ est de l'ordre de $\frac{1}{2} \text{dist}(f_k(x), f_k(y))$.

Remarques.

1. La longueur l du segment non principal $[f_k(x), f_k(x) + K_2^2(f_k(x) - f_k(y))]$ vérifie

$$\begin{aligned} l &= K_2^2 \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \\ &\geq K_2^2 K_1 2^{-kN}. \end{aligned}$$

On retrouve l'inégalité (26) du paragraphe 3.

2. Puisque $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$, le segment $[f_k(y), f_k(z)]$ ne subira qu'un nombre borné de transformations B (en $f_k(y)$).
3. Ce cas est très proche du Cas B de Jones (voir paragraphe 2): on verra que le segment $[y, z]$ est inclus dans Γ . Ceci est dû essentiellement au fait que, pour tout $j \geq k$, $[f_j(y), f_j(z)] \subset \Gamma_j$ ne subira que des transformations B. En effet, x est le point de Δ_{k+1} le plus loin de Δ_k et il est déjà trop près de y . Donc, si N est assez grand, aucun point $x' \in \Delta_j$, $j \geq k$, ne peut être à égale distance de y et z , c'est à dire vérifier les conditions du Cas A I.

On voit alors, d'après (35) et (36), que la longueur totale ajoutée lors de toutes ces transformations B sera, en choisissant bien les constantes K_2 , K_3 , A et N , très petite devant la longueur de $[y, z]$.

Si $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \geq \varepsilon_0$, on retrouve pour Δ l'estimation (34).

Supposons maintenant qu'il n'existe pas de $z \in \Delta_k$ tel que l'on ait la propriété (*) pour $[f_k(y), f_k(z)]$. On va alors essayer de se ramener aux cas de référence A I et A II.

On suppose dans un premier temps que $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$.

Cas B I. $f_k(y)$ est l'extrémité d'un segment principal $[f_k(y), f_k(z)]$ avec

$$\text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \leq K_3^{-1} \text{dist}(f_k(x), f_k(z)).$$

On peut alors utiliser une transformation B:

On construit $\Gamma_{k+1}^{(1)}$ à partir de Γ_k en ajoutant le segment principal $[f_k(y), f_k(x)]$ et le segment non principal $[f_k(x), f_k(x) + K_2^2(f_k(x) - f_k(y))]$.

Les estimations sur $l(\Gamma_{k+1}^{(1)}) - l(\Gamma_k)$ sont les mêmes que (35) et (36).

Cas B II. Pour tout segment principal $[f_k(y), f_k(z)]$ dont $f_k(y)$ est une extrémité,

$$(37) \quad \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \geq K_3^{-1} \text{dist}(f_k(x), f_k(z)).$$

Donc,

$$(38) \quad \begin{aligned} l([f_k(y), f_k(z)]) &\leq (K_3 + 1) \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \\ &\leq C(K_3 + 1)K_2 2^{-kN} \text{ d'après (24)} \\ &\ll K 2^{-kN} \text{ par choix de } K. \end{aligned}$$

On ne peut plus utiliser le même argument que dans le Cas B II, car le segment $[f_k(x), f_k(z)]$ est trop court. On va alors passer à l'échelle inférieure, c'est à dire insérer des points de $\tilde{\Delta}_{k+2}$.

On va montrer dans un premier temps que $f_k(x)$ est l'extrémité d'un segment non principal.

On distingue deux cas.

- Soit $f_k(y)$ est l'extrémité d'un seul segment principal (on dira que $f_k(y)$ est un bout de Γ_k), alors, d'après les hypothèse de récurrence (propriété du cône), $f_k(y)$ appartient à un segment non principal.
- Soit $f_k(y)$ est l'extrémité de plusieurs segments principaux de Γ_k .

Soient L et L' deux segments principaux de Γ_k dont $f_k(y)$ est une extrémité (voir Figure 5).

Puisque $\text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \geq K_1 2^{-kN}$, et que la projection de $f_k(x)$ sur la droite contenant L et celle sur la droite contenant L' sont en dehors de L et L' respectivement, l'angle entre L et L' est plus petit que $\frac{\pi}{2}$.

De plus, comme $\beta_\infty(x, K 2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$, et puisque $l(L)$ et $l(L')$ sont inférieurs à $K 2^{-kN}$ d'après (38) et que les extrémités de L et L' sont dans E , l'angle entre L et L' est très petit (d'autant plus petit que ε_0 est petit).

Donc, si ε_0 est très petit devant θ , tous les segments principaux de Γ_k contenant $f_k(y)$ sont dans un cône de sommet $f_k(y)$ et d'angle θ .

On en déduit, d'après la propriété du cône, que $f_k(y)$ est l'extrémité d'un segment non principal de Γ_k .

Remarque. Un tel point a été à une génération précédente un bout.

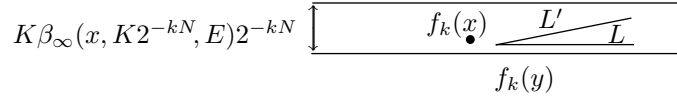


Figure 5

Donc, dans tous les cas, $f_k(y)$ est l'extrémité d'un segment non principal $[f_k(y), a_k(y)]$ de Γ_k .

D'après (24), $\text{dist}(x, y) \leq K_2 2^{-jN}$.

Donc, si A est assez petit, $\text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \leq 2K_2 2^{-jN}$.

D'où, d'après (26),

$$(39) \quad \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \leq 2K_1^{-1} K_2^{-1} l([f_k(y), a_k(y)]).$$

On considère alors x_0, \dots, x_{l+1} les points de Δ_{k+2} tels que

- $x_0 = y$ et $x_{l+1} = x$;
- x_i et x_{i+1} sont voisins dans Δ_{k+2} (voir Figure 6).

On va insérer ces points dans Γ_k .

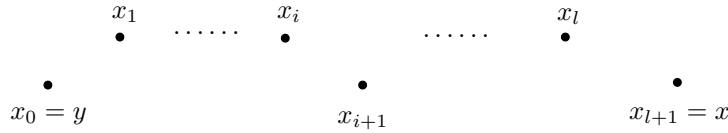


Figure 6

Remarques.

1. Les points x_1, \dots, x_l existent si N est choisi assez grand.
2. l est borné d'après (21).
3. On peut "ordonner" les x_i , car, puisque $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$, ils sont tous proches d'une même droite.

Soit x_i ($i \in \{1, \dots, l\}$) le point le plus près du milieu du segment $[x, y]$.

Le point x_i vérifie la propriété (*). Donc, les seuls cas pour l'insertion de x_i sont les Cas A I et A II.

Premier cas: $K_3^{-1} \text{dist}(f_k(x), f_{k+1}(x_i)) \leq \text{dist}(f_k(y), f_{k+1}(x_i)) \leq K_3 \text{dist}(f_k(x), f_{k+1}(x_i))$.

Alors, on utilise une transformation A et on construit $\tilde{\Gamma}_{k+1}^{(1)}$ en ajoutant à Γ_k les segments $[f_k(y), f_{k+1}(x_i)]$ et $[f_{k+1}(x_i), f_k(x)]$.

Remarque. $f_{k+1}(x) = f_k(x)$ car $x \in A_{k+1}$.

Par un calcul identique à (31),

$$\begin{aligned} l([f_k(y), f_{k+1}(x_i)]) + l([f_{k+1}(x_i), f_k(x)]) \\ \leq l([f_k(x), f_k(y)]) + C\beta_1(x, K2^{-kN}, E)^2 2^{-kN}. \end{aligned}$$

Deuxième cas: $\text{dist}(f_k(y), f_{k+1}(x_i)) \leq K_3^{-1} \text{dist}(f_{k+1}(x_i), f_k(x))$. (on suppose que x_i est plus proche de y que de x , le cas inverse est identique).

On utilise une transformation B. $\tilde{\Gamma}_{k+1}^{(1)}$ est construit en ajoutant les segments $[f_k(y), f_k(x)]$, $[f_k(y), f_{k+1}(x_i)]$ et $[f_{k+1}(x_i), K_2^2(f_{k+1}(x_i) - f_k(y))]$.

On a alors par un calcul identique à (35),

$$\begin{aligned} (40) \quad l(\tilde{\Gamma}_{k+1}^{(1)}) - l(\Gamma_k) &\leq l([f_k(y), f_k(x)]) + (1 + K_2^2)l([f_k(y), f_{k+1}(x_i)]) \\ &\leq (1 + (1 + K_2^2)K_3^{-1})l([f_k(y), f_k(x)]). \end{aligned}$$

Puis, on considère $x_{i'}$, $i \neq i'$, $i' \in \{1, \dots, l\}$, le point le plus près du milieu de $[x_i, x]$ (ou, au choix, du milieu de $[y, x_i]$). On construit $\tilde{\Gamma}_{k+1}^{(2)}$ à partir de $\tilde{\Gamma}_{k+1}^{(1)}$ en insérant $f_{k+1}(x_{i'})$ par une transformation A ou B.

Et, on insère de cette façon tous les points x_1, \dots, x_l .

Soit $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{k+1}$ l'ensemble connexe ainsi obtenu.

On construit $\Gamma_{k+1}^{(1)}$ à partir de $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{k+1}$ en ajoutant le segment $[f_{k+1}(x), a_{k+1}(x)]$ où $a_{k+1}(x)$ est un point tel que $l([f_{k+1}(x), a_{k+1}(x)]) = K_1 K_2^2 2^{-(k+1)N}$ (voir Figure 7). Ce segment ne sera pas modifié lors de la construction de Γ_{k+1} et puisqu'il n'est pas principal, on le choisit avec cette longueur afin que la propriété (26) soit préservée.

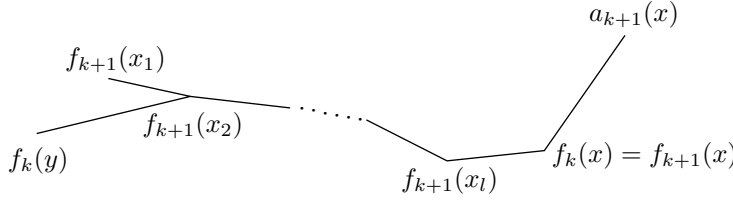


Figure 7

Il nous reste à estimer $l(\Gamma_{k+1}^{(1)}) - l(\Gamma_k)$.

La somme totale des longueurs ajoutée par les transformations A est, par un calcul identique à celui effectué dans le Cas A I, majorée par

$$C\beta_1(x, CK2^{-kN}, E)^2 2^{-kN} + C \sum_{i=1}^l \beta_1(x_i, CK2^{-(k+1)N}, E)^2 2^{-(k+1)N}.$$

La somme totale des longueurs ajoutée par les transformations B est majorée par un calcul identique à (35) et d'après (39) et (40),

$$\begin{aligned}
 & C(1 + (1 + K_2^2)K_3^{-1})l([f_k(y), f_k(x)]) \\
 & + C(1 + K_2^2)K_3^{-1} \sum_{i, i'} l([f_{k+1}(x_i), f_{k+1}(x_{i'})]) \\
 (41) \quad & \leq C(1 + (1 + K_2^2)K_3^{-1})K_1^{-1}K_2^{-1} \text{dist}(f_k(y), a_k(y)) \\
 & + C(1 + K_2^2)K_3^{-1} \sum_{i, i'} \text{dist}(f_{k+1}(x_i), f_{k+1}(x_{i'})).
 \end{aligned}$$

où la somme se fait sur les indices i, i' de $\{1, \dots, l+1\}$ tel que le segment $[f_{k+1}(x_i), f_{k+1}(x_{i'})]$ a subi une transformation B.

On en déduit

$$\begin{aligned}
 l(\tilde{\Gamma}_{k+1}) - l(\Gamma_k) & \leq C\beta_1(x, CK2^{-kN}, E)^2 2^{-kN} \\
 & + C \sum_{i=1}^l \beta_1(x_i, CK2^{-(k+1)N}, E)^2 2^{-(k+1)N} \\
 & + C(1 + (1 + K_2^2)K_3^{-1})K_1^{-1}K_2^{-1} \text{dist}(f_k(y), a_k(y)) \\
 & + C(1 + K_2^2)K_3^{-1} \sum_{i, i'} \text{dist}(f_{k+1}(x_i), f_{k+1}(x_{i'})).
 \end{aligned}$$

De plus, d'après (26),

$$(42) \quad l([f_{k+1}(x), a_{k+1}(x)]) = K_1 K_2^2 2^{-(k+1)N} \leq 2^{-N} l([f_k(y), a_k(y)]).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 l(\Gamma_{k+1}^{(1)} - l(\Gamma_k)) & \leq C\beta_1(x, CK2^{-kN}, E)^2 2^{-kN} \\
 (43) \quad & + C \sum_{i=1}^l \beta_1(x_i, CK2^{-(k+1)N}, E)^2 2^{-(k+1)N} \\
 & + C((1 + (1 + K_2^2)K_3^{-1})K_1^{-1}K_2^{-1} + 2^{-N}) \text{dist}(f_k(y), a_k(y)) \\
 (44) \quad & + C(1 + K_2^2)K_3^{-1} \sum_{i, i'} \text{dist}(f_{k+1}(x_i), f_{k+1}(x_{i'})).
 \end{aligned}$$

Remarques.

1. Pour un tel point y , une telle transformation n'arrivera qu'une fois lors de la construction de Γ .
2. Les points $f_{k+1}(x_i)$, $i = 1, \dots, l$, ne seront pas modifiés avant la construction de Γ_{k+3} .

Si $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \geq \varepsilon_0$ (donc $\beta_1(x, K2^{-kN+1}, E) \geq C^{-1}\varepsilon_0^2$), on obtient $\Gamma_{k+1}^{(1)}$ en ajoutant les segments $[f_k(y), f_k(x)]$ et $[f_k(x), f_k(x) + K_2^2(f_k(x) - f_k(y))]$ et on a alors par un calcul identique à (34),

$$(45) \quad \begin{aligned} l(\Gamma_k^{(1)}) - l(\Gamma_k) &\leq C2^{-kN} \\ &\leq C\beta_1(x, K2^{-kN+1}, E)2^{-kN}. \end{aligned}$$

On pose $\Delta_{k+1}^{(1)} = \Delta_k \cup \{x\}$.

Soit x' le point de A_{k+1} le plus loin de $\Delta_{k+1}^{(1)}$ et on suppose que $x' \notin \Gamma_{k+1}^{(1)}$. On construit à partir de $\Gamma_{k+1}^{(1)}$ un ensemble connexe contenant $f_k(x')$ en utilisant la méthode décrite précédemment. Puis, on applique cet algorithme pour tous les points de A_{k+1} .

Soit $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ l'ensemble connexe (qui contient tous les $f_k(x)$, $x \in A_{k+1}$) ainsi obtenu.

Remarque. $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ vérifie la propriété du cône. En effet, les seuls points $f_k(x)$, $x \in A_{k+1}$, pouvant poser un problème, sont ceux insérés par une transformation B. Or, par construction, ces points appartiennent à un segment non principal.

5. Construction de Γ_{k+1} à partir de $\tilde{\Gamma}_{k+1}$

On transforme $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ pour obtenir Γ_{k+1} , en appliquant ce qui suit

- (i) Pour tout $x \in \Delta_{k+1}$, on remplace $f_k(x)$ par $f_{k+1}(x)$.

On rappelle que $f_k(x) = f_{k+1}(x)$ si $x \in A_{k+1}$ ou si $f_k(x)$ vérifie la propriété 2 du Lemme 2.3 à l'échelle $2^{-(k+1)N}$.

Ainsi, $f_k(x)$ est remplacé par $f_{k+1}(x)$ si $f_k(x)$ est relativement loin d'une droite D_{k+1} minimisant $\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)$.

- (ii) Considérons une extrémité d'un segment de $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ n'appartenant pas à Δ_{k+1} (ni à Δ_{k+2}). Alors, ce point est l'extrémité d'un seul segment de $\tilde{\Gamma}_{k+1}$. On note $a_k(x)$ ce point et $[f_k(x), a_k(x)]$ ce segment. Alors, le point $a_k(x)$ devient le point $a_{k+1}(x)$ avec

- $l([f_k(x), a_k(x)]) = l([f_{k+1}(x), a_{k+1}(x)])$;
- $a_{k+1}(x)$ appartient à la droite $(f_k(x), a_k(x))$ (voir Figure 8).

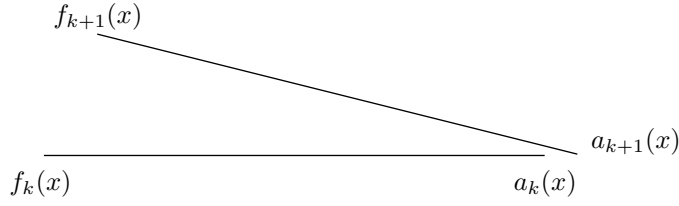


Figure 8

Il nous faut maintenant estimer $l(\Gamma_{k+1}) - l(\tilde{\Gamma}_{k+1})$.

Le but est de contrôler la longueur ajoutée quand on remplace $f_k(x)$ par $f_{k+1}(x)$

- soit en termes de β_1 ;
- soit en montrant que la longueur ajoutée est très petite devant 2^{-kN} (qui est comparable à la longueur d'un segment non principal de la k -ième génération) dans le cas où $f_k(x)$ est l'extrémité d'un segment non principal ou devant la longueur d'un segment principal de Γ_k (ayant subi une transformation B) contenant $f_k(x)$ de telle sorte que la longueur totale ajoutée aux différentes étapes sera petite devant la longueur d'un segment de Γ contenant x (voir la Remarque 3 dans le Cas A II du paragraphe précédent).

Remarque. Comme pour un segment ayant subi une transformation B, un segment non principal ne subira, dans la suite de la construction, que des modifications benignes, essentiellement données par le (ii) du début du paragraphe.

Il est inutile de s'intéresser au cas des segments non principaux, car leur longueur est préservée d'après ce qui précède.

Considérons le cas d'un segment $[f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)]$, où x, y sont dans Δ_k .

On a alors pour ce segment 2 cas: soit il n'a pas été transformé (Cas A I), soit il a subi une transformation B (Cas A II). En fait, on va voir que ces deux cas sont très proches.

Cas A I. $[f_k(y), f_k(x)]$ est un segment qui n'a pas subi aucune transformation (ni A, ni B) à cette étape.

On suppose dans un premier temps que $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$.

On va en fait montrer qu'un tel segment subira aux échelles suivantes que des transformations B.

Soit $z \in E$ tel que la projection de z sur $(f_k(x), f_k(y))$ est dans $[f_k(x), f_k(y)]$.

On suppose en outre que z vérifie

$$(46) \quad \text{dist}(f_k(x), f_k(z)) \leq 10K_1 2^{-(k+1)N}.$$

Remarque. Tous les points de A_{k+1} dont la projection sur $(f_k(x), f_k(y))$ est dans $[f_k(x), f_k(y)]$ vérifie (46) (éventuellement avec $f_k(y)$ à la place de $f_k(x)$), sinon le segment $[f_k(x), f_k(y)]$ aurait été modifié.

Alors,

$$\begin{aligned} \text{dist}(f_k(y), f_k(z)) &\geq K_1 2^{-kN} - 10K_1 2^{-(k+1)N} \\ &\geq K_1(1 - 10 \cdot 2^{-N}) 2^{-kN}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \text{dist}(f_k(x), f_k(z)) &\leq \frac{10 \cdot 2^{-N}}{1 - 10 \cdot 2^{-N}} \text{dist}(f_k(y), f_k(z)) \\ &\leq K_3^{-1} \text{dist}(f_k(y), f_k(z)) \end{aligned}$$

car $2^{-N} \ll K_3^{-1}$.

Or, tout point $z \in \Delta_l$, $l > k + 1$, tel que la projection de $f_l(z)$ sur $(f_l(x), f_l(y))$ est dans $[f_l(x), f_l(y)]$ vérifie (46), donc il ne pourra être inséré que par une transformation B.

Si $[f_k(x), f_k(y)]$ est de la j -ième génération avec $j \leq k$, alors, d'après (25),

$$\begin{aligned} \text{dist}(f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)) - \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) &\leq 2A 2^{-(k+1)N} \\ &\leq CAK_1^{-1} \frac{\text{dist}(f_j(x), f_j(y))}{2^{(k-j)N}}. \end{aligned}$$

Si $\beta_\infty(x, K 2^{-kN}, E) \geq \varepsilon_0$, alors

$$(48) \quad l([f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)]) - l([f_k(x), f_k(y)]) \leq 2A 2^{-(k+1)N} \leq C\beta_1(x, K 2^{-kN}, E)^2 2^{-kN}.$$

Cas A II. $[f_k(x), f_k(y)]$ a subi une transformation B. Alors, d'après le Lemme 2.3, si le segment est de la k -ième génération,

$$(49) \quad \text{dist}(f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)) - \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \leq 2A 2^{-(k+1)N},$$

donc d'après (25),

$$(50) \quad \text{dist}(f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)) - \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \leq AK_1^{-1} \text{dist}(f_k(x), f_k(y)).$$

Si maintenant $[f_k(x), f_k(y)]$ est un segment de la j -ième génération avec $j < k$,

$$(51) \quad \text{dist}(f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)) - \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \leq CAK_1^{-1} \frac{\text{dist}(f_j(x), f_j(y))}{2^{(k-j)N}}.$$

Il nous faut reste à considérer le cas de segments $[f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)]$ où $x \in \Delta_k$, $y \in A_{k+1}$.

Considérons $x \in \Delta_k$, et supposons que $\beta_\infty(x, K2^{-k}, E) \leq \varepsilon_0$.

Alors $f_{k+1}(x)$ est une extrémité d'au plus deux segments dont les autres extrémités sont des points du type $f_{k+1}(y)$ avec $y \in A_{k+1}$.

Cas B I. il y en a exactement deux $f_{k+1}(y)$ et $f_{k+1}(z)$ (y et z sont dans A_{k+1}).

Alors $f_{k+1}(y) = f_k(y)$ et $f_{k+1}(z) = f_k(z)$.

On suppose que $f_k(x) \neq f_{k+1}(x)$ (sinon rien n'a été modifié).

Le calcul de la longueur ajoutée est identique à celui de (31).

Ainsi, si on note D_{k+1} une droite minimisant $\beta_1(x, K2^{-kN}, E)$, on a, d'après (20),

$$\begin{aligned} \text{dist}(f_k(x), D_{k+1}) &> C\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)2^{-(k+1)N} \\ \text{dist}(f_{k+1}(x), D_{k+1}) &\leq C\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)2^{-(k+1)N} \\ \text{dist}(f_{k+1}(y), D_{k+1}) &\leq C\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)2^{-(k+1)N} \\ \text{dist}(f_{k+1}(z), D_{k+1}) &\leq C\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)2^{-(k+1)N}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\text{dist}(f_{k+1}(x), D) \leq C\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)2^{-(k+1)N}$$

où D est la droite engendrée par $f_k(y)$ et $f_k(z)$.

D'où, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \text{dist}(f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)) + \text{dist}(f_{k+1}(x), f_{k+1}(z)) \\ \leq C\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)2^{2-(k+1)N} \\ + \text{dist}(f_k(y), f_k(z)) \\ \leq C\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)2^{2-(k+1)N} \\ + \text{dist}(f_k(y), f_k(x)) + \text{dist}(f_k(x), f_k(z)). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 (52) \quad & \text{dist}(f_{k+1}(y), f_{k+1}(x)) + \text{dist}(f_{k+1}(x), f_{k+1}(z)) \\
 & - \text{dist}(f_k(y), f_k(x)) \\
 & - \text{dist}(f_k(x), f_k(z)) \\
 & \leq C\beta_1(x, K2^{-(k+1)N}, E)^2 2^{-(k+1)N}.
 \end{aligned}$$

Cas B II. il y en a un seul $f_{k+1}(x)$ ($y \in A_{k+1}$) alors $f_{k+1}(y) = f_k(y)$.

Premier cas: $f_k(x)$ est l'extrémité d'un segment $[f_k(x), f_k(z)]$ de Γ_k tel que

$$(53) \quad l([f_k(x), f_k(z)]) \geq K2^{-kN}.$$

Si K est très grand devant 2^N , ce segment ne peut subir qu'une transformation B (car à cause de la propriété de densité de Δ_k , aucun point de E ne peut être à une distance comparable de x et z , voir Figure 9).



Figure 9. Aucun point de E n'est dans la zone hachurée.

Soit $k_0 \leq k$ le plus petit indice tel que

$$(54) \quad l([f_{k_0}(x), f_{k_0}(z)]) \geq K2^{-k_0N}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 (55) \quad & \text{dist}(f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)) - \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \\
 & \leq 2A2^{-(k+1)N} \\
 & \leq 2CAK^{-1}2^{-N} \frac{\text{dist}(f_{k_0}(x), f_{k_0}(z))}{2^{(k-k_0)N}}.
 \end{aligned}$$

Deuxième cas: Tout segment principal de Γ_k dont $f_k(x)$ est une extrémité est de longueur inférieure à $K2^{-kN}$.

Si $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$, alors d'après la propriété du cône (comme dans le Cas B II du paragraphe précédent), $f_{k+1}(x)$ appartient à un segment non principal $[f_{k+1}(x), a_{k+1}(x)]$.

On a

$$(56) \quad \text{dist}(f_{k+1}(x), f_{k+1}(y)) - \text{dist}(f_k(x), f_{k+1}(y)) \leq CA2^{-(k+1)N}.$$

Supposons maintenant que

$$\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \geq \varepsilon_0 \quad (\text{donc } \beta_1(x, K2^{-kN+1}, E) \geq C^{-1}\varepsilon_0^2).$$

$f_k(x)$ est l'extrémité d'un nombre borné de segments de $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ dont l'autre extrémité est un point de A_{k+1} , donc la longueur totale "perdue" Δ (pour ces segments) quand on remplace $f_k(x)$ par $f_{k+1}(x)$ est majorée par

$$(57) \quad \Delta \leq CA2^{-(k+1)N} \leq \tilde{C}\beta_1(x, K2^{-kN+1}, E)^2 2^{-kN}.$$

On a donc obtenu

$$(58) \quad l(\Gamma_{k+1}) - l(\Gamma_k) = l_{k+1}^{(1)} + l_{k+1}^{(2)} + l_{k+1}^{(3)} + l_{k+1}^{(4)}$$

avec

- $l_{k+1}^{(1)}$ est la "longueur totale ajoutée" par l'insertion de points de E suivant la transformation A.

D'après (31) et (34), on a

$$(59) \quad l_{k+1}^{(1)} \leq C \sum_{x \in \Delta_{k+1}} \beta_1(x, K2^{-k}, E)^2 2^{-k}.$$

- $l_{k+1}^{(2)}$ est la "longueur totale ajoutée" par l'insertion de points de E suivant la transformation B (sans compter les segments créés dans le Cas B II du paragraphe 4), lorsque le β_∞ est petit.
- $l_{k+1}^{(3)}$ est la "longueur totale ajoutée" quand on remplace $f_k(x)$ par $f_{k+1}(x)$, $x \in \Delta_k$.

$$l_{k+1}^{(3)} = l(\Gamma_{k+1}) - l(\tilde{\Gamma}_{k+1}).$$

- $l_{k+1}^{(4)}$ est la "longueur totale ajoutée" quand on insère un segment dans le Cas B II du paragraphe 4.

Il est clair, d'après le choix de l'ensemble A_{k+1} , que Γ_{k+1} vérifie les mêmes propriétés que Γ_k à l'échelle $2^{-(k+1)N}$.

6. Fin de la construction de Γ

Soit Γ l'ensemble connexe obtenu en itérant la construction précédente.

On a, d'après (24), $E \subset \Gamma$.

Nous allons maintenant évaluer $l(\Gamma)$.

On a, d'après (58),

$$(60) \quad l(\Gamma) - l(\Gamma_0) \leq \sum_k l_k^{(1)} + \sum_k l_k^{(2)} + \sum_k l_k^{(3)} + \sum_k l_k^{(4)}.$$

Or, d'après (59),

$$(61) \quad \sum_k l_k^{(1)} \leq C \sum_k \sum_{x \in \Delta_k} \beta_1(x, K2^{-k}, E)^2 2^{-k}.$$

Il nous faut maintenant évaluer les trois autres sommes. Le but est de montrer qu'elles sont petites devant la longueur de Γ .

Commençons par quelques remarques.

- Γ contient des segments $[x, y]$ où x et y sont dans un Δ_k pour un certain k . Donc, pour tout $j \geq k$, $[f_j(x), f_j(y)] \subset \Gamma_j$.

On note $S^{(1)}$ cet ensemble de segments.

On dira qu'un tel segment est de la k -ième génération si $[f_k(x), f_k(y)]$ est un segment de Γ_k et un des deux points x ou y n'est pas dans Δ_{k-1} .

En fait, ce segment a subi, à partir de la k -ième étape, que des transformations B, et à chaque étape, le nombre de transformations B est borné (si β_∞ est petit).

Remarque. Si le segment $[f_k(x), f_k(y)]$, x et y dans Δ_k , a subi une transformation B, alors aucun de ses "successeurs" $[f_j(x), f_j(y)]$, $j \geq k$, ne subira A (voir Remarque 3 dans le Cas A II du paragraphe 4). Ceci implique que seuls les segments de $S^{(1)}$ ont une contribution à $\sum_k l_k^{(2)}$.

On en déduit que pour un tel segment, si A est assez grand, il existe $k_0 \geq k$ tel que, pour tout $j \geq k_0$,

$$(62) \quad l([f_j(x), f_j(y)]) \geq K2^{-jN}.$$

Évaluons $\text{dist}(f_k(x), f_k(y))$ par rapport à $\text{dist}(x, y)$.

On a, d'après (49),

$$(63) \quad |\text{dist}(x, y) - \text{dist}(f_k(x), f_k(y))| \leq 2A \sum_{j \geq k} 2^{-(j+1)N}$$

$$(64) \quad \leq 2A 2^{-kN}.$$

Donc, d'après (25),

$$(65) \quad |\text{dist}(x, y) - \text{dist}(f_k(x), f_k(y))| \leq 2AK_1^{-1} \text{dist}(f_k(x), f_k(y)).$$

D'où,

$$(66) \quad \text{dist}(f_k(x), f_k(y)) \leq \frac{1}{1 - 2AK_1^{-1}} \text{dist}(x, y).$$

- Γ contient de segments $[x, a_\infty(x)]$ pour lesquels il existe k tel que
 - $x \in \Delta_k$;
 - $a_\infty(x)$ est le point limite d'une suite $(a_j(x))_{j \geq k}$ où $[f_j(x), a_j(x)] \subset \Gamma_j$ et $a_{j+1}(x)$ est construit à partir de $a_j(x)$ en suivant le procédé décrit au début du paragraphe précédent.

(Pour tout $j \geq k$, $a_j(x) \notin \Delta_j$).

Soit $S^{(2)}$ l'ensemble de ces segments.

On dira que $[x, a_\infty(x)]$ est de la k -ième génération si k est le plus petit indice pour lequel les propriétés précédentes sont vérifiées.

Pour un tel segment, pour tout $j \geq k$, on a

$$(67) \quad \text{dist}(x, a_\infty(x)) = \text{dist}(f_j(x), a_j(x)).$$

Remarque. Un tel segment vient d'une transformation B.

Commençons par évaluer $\sum_k l_k^{(2)}$, c'est à dire la longueur ajoutée par des transformations B, et pour cela considérons $[x, y] \in S^{(1)}$ de la k -ième génération.

La somme totale l des longueurs des segments construits au cours des différentes étapes selon la transformation B et ayant pour extrémité $f_j(x)$ ou $f_j(y)$ avec $j \geq k$ (lorsque $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$ ou $\beta_\infty(y, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$) vérifie, d'après (35) et (36),

$$(68) \quad l \leq C(K_2^2 + 1)K_3^{-1} \sum_{j \geq k} \frac{\text{dist}(f_k(x), f_k(y))}{2^{(k-j)N}}$$

$$(69) \quad \leq 2C(K_2^2 + 1)K_3^{-1} \text{dist}(f_k(x), f_k(y)).$$

Donc, d'après (66),

$$(70) \quad l \leq \frac{2C(K_2^2 + 1)K_3^{-1}}{1 - 2AK_1^{-1}} \text{dist}(x, y).$$

D'où, si A est assez petit et si K_3 est assez grand par rapport à K_2 ,

$$(71) \quad l \leq \frac{1}{1000} l([x, y]).$$

On en déduit

$$(72) \quad \sum_k l_k^{(2)} \leq \frac{1}{1000} l(\Gamma).$$

Évaluons maintenant $\sum_k l_k^{(4)}$.

D'après (44),

$$(73) \quad \begin{aligned} \sum_k l_k^{(4)} &\leq C \sum_k \sum_{x \in \Delta_k} \beta_1(x, CK2^{-kN}, E)^2 2^{-kN} \\ &+ \sum_{L \in S^{(2)}} (C(1 + (1 + K_2^2)K_3^{-1})K_1^{-1}K_2^{-1} + 2^{-N}) l(L). \end{aligned}$$

Donc, si K_3 , N sont assez grands,

$$(74) \quad (C(1 + (1 + K_2^2)K_3^{-1})K_1^{-1}K_2^{-1} + 2^{-N}) \sum_{L \in S^{(2)}} l(L) \leq \frac{1}{1000} l(\Gamma).$$

Remarque. On n'a pas tenu compte dans (44) de la somme en i et i' qui a déjà été comptabilisé dans $\sum_k l_k^{(2)}$.

Il nous reste à évaluer $\sum_k l_k^{(3)}$.

On a d'après (48), (52) et (57),

$$(75) \quad \sum_k l_k^{(3)} \leq C \sum_k \sum_{x \in \Delta_k} \beta_1(x, CK2^{-kN}, E)^2 2^{-kN} + \sum_k \tilde{l}_k^{(3)}$$

où $\tilde{l}_k^{(3)}$ est la "longueur totale ajoutée" quand on remplace $f_k(x)$ par $f_{k+1}(x)$, $x \in \Delta_{k+1}$, lorsque $\beta_\infty(x, K2^{-kN}, E) \leq \varepsilon_0$ (en dehors du Cas B I du paragraphe 5).

Notons $\tilde{l} = \sum_k \tilde{l}_k^{(3)}$ et évaluons la contribution à \tilde{l} des segments de $S^{(1)}$ puis de $S^{(2)}$.

Si $[x, y]$ est un segment de $S^{(1)}$ de la k -ième génération, sa "contribution" Δ à \tilde{l} est majorée d'après (47), (50), (51) et (55) par

$$(76) \quad CAK_1^{-1} \sum_{j \geq k} \frac{\text{dist}(f_k(x), f_k(y))}{2^{(j-k)N}} + 2CAK^{-1} 2^{-N} \sum_{j \geq k_0} \frac{\text{dist}(f_{k_0}(x), f_{k_0}(y))}{2^{(j-k_0)}}$$

où $k_0 \leq k$ est le plus petit indice tel que, pour tout $j \geq k_0$,

$$\text{dist}(f_j(x), f_j(y)) \geq K2^{-jN} \text{ (voir (62)).}$$

Remarque. Le second membre vient du premier cas du Cas B II du paragraphe précédent.

Par un calcul identique à (66),

$$(77) \quad \text{dist}(f_{k_0}(x), f_{k_0}(y)) \leq \frac{1}{1 - 2AK_1^{-1}} l([x, y]).$$

Donc, d'après (66) et (77),

$$(78) \quad \Delta \leq \left(\frac{CAK_1^{-1}}{1 - 2AK_1^{-1}} + \frac{2CAK^{-1}2^{-N}}{1 - 2AK_1^{-1}} \right) l([x, y]).$$

D'où, si K_1 , K et N sont assez grands, A est assez petit,

$$(79) \quad \Delta \leq \frac{1}{1000} l([x, y]).$$

Si $[x, a_\infty(x)]$ est un segment de $S^{(2)}$ de la k -ième génération, sa contribution Δ à \tilde{l} est majorée d'après (56) par

$$\begin{aligned} \Delta &\leq CA \sum_{j \geq k} 2^{-kN} \\ &\leq 2CA2^{-kN} \\ &\leq 2CAK_2^{-2} K_1^{-1} \text{dist}(f_k(x), a_k(x)) \text{ d'après (26)} \\ &\leq 2CAK_2^{-2} K_1^{-1} \text{dist}(x, a_\infty(x)). \end{aligned}$$

Donc, si K_2 est assez grand par rapport à K_1 et A ,

$$(80) \quad \Delta \leq \frac{1}{1000} l([x, a_\infty(x)]).$$

On a donc d'après (79) et (80),

$$(81) \quad \tilde{l} \leq \frac{1}{1000} l(\Gamma).$$

Donc, d'après (60), (61), (72), (74), (75) et (81),

$$(82) \quad \begin{aligned} l(\Gamma) - l(\Gamma_0) &\leq C \sum_k \sum_{x \in \Delta_k} \beta_1(x, K2^{-k}, E)^2 2^{-k} + \frac{1}{1000} l(\Gamma) \\ &\quad + \frac{1}{1000} l(\Gamma) + \frac{1}{1000} l(\Gamma). \end{aligned}$$

D'où, d'après (6) et la construction de Γ_0 (propriété (P_0) du paragraphe 3),

$$(83) \quad l(\Gamma) \leq C \operatorname{diam} E.$$

Remarque. On peut utiliser ce qui précède afin de construire la courbe rectifiable Γ du Théorème 1.3.

Alors, d'après (7) et (82), on a

$$(84) \quad l(\Gamma) \leq C (\beta(E)^2 + \operatorname{diam} E).$$

Il nous reste à montrer que pour tout $x \in \Gamma$, tout $R \in]0, \operatorname{diam} \Gamma[$, (1) est vrai.

Notons que, pour tout ensemble connexe, l'inégalité de gauche de (1) est toujours vérifiée.

Soient $x \in \Gamma$, $0 < R < \operatorname{diam} \Gamma$.

On considère l'entier k tel que $2^{-(k+1)N} \leq R \leq 2^{-kN}$.

On note $\Gamma(x, R) = \Gamma \cap B(x, R)$ et pour tout $j > 0$, $\Gamma_j(x, R) = \Gamma_j \cap B(x, R)$.

Par un calcul identique à l'évaluation de $l(\Gamma)$, on a

$$(85) \quad l(\Gamma(x, R)) - l(\Gamma_k(x, R)) \leq C \sum_{j \geq k} \sum_{x \in \Delta_j} \beta_1(x, K2^{-jN}, E)^2 2^{-jN}.$$

D'où, d'après (6),

$$(86) \quad l(\Gamma(x, R)) - l(\Gamma_k(x, R)) \leq CR.$$

Or d'après (25) et (21), il est clair que le nombre de segments de Γ_k intersectant $B(x, R)$ est borné, et donc $l(\Gamma_k(x, R)) \leq CR$.

D'où pour tout $x \in \Gamma$, tout $R \in]0, \operatorname{diam} \Gamma[$,

$$(87) \quad H^1(\Gamma \cap B(x, R)) \leq CR.$$

Donc Γ est une courbe Ahlfors-régulière.

Ce qui termine la preuve du Théorème 1.2.

References

- [DS1] G. DAVID AND S. SEMMES, “*Singular integrals and rectifiable sets in \mathbb{R}^n : Au delà des graphes lipschitziens*,” Astérisque **193**, Société Mathématique de France, 1991.
- [DS2] G. DAVID AND S. SEMMES, “*Analysis of and on uniformly rectifiable sets*,” Math. Surveys and Monographs **38**, American Mathematical Society, 1993.
- [J] P. W. JONES, Rectifiable sets and the travelling salesman problem, *Invent. Math.* **102** (1990), 1–15.
- [L] E. L. LAWLER ET AL. (ÉDITEURS), “*The traveling salesman problem*,” Wiley Intersciences Series in Discrete Mathematics, John Wiley & Sons, 1985.
- [M] P. MATTILA, “*Geometry of sets and measures in euclidean spaces*,” Cambridge studies in advanced mathematics **44**, Cambridge University Press, 1995.
- [MMV] P. MATTILA, M. MELNIKOV AND J. VERDERA, The Cauchy integral, analytic capacity and uniform rectifiability, *Ann. of Math.* (à paraître) (1996).
- [O] K. OKIKIOLU, Characterization of subsets of rectifiable curves in \mathbb{R}^n , *J. London Math. Soc. (2)* **46** (1992), 336–348.

Université Paris-Sud
 Mathématiques
 Bâtiment 425
 91405 Orsay cedex
 FRANCE

e-mail: herve.pajot@math.u-psud.fr

Rebut el 17 de Juliol de 1996