Publicacions Matemàtiques, Vol **42** (1998), 461–497.

IDÉAUX FERMÉS D'UNE ALGÈBRE DE BEURLING RÉGULIÈRE

Eric Decreux

Abstract

The structure of closed ideals of a regular algebra containing the classical A^∞ is considered. Several division and approximation results are proved and a characterization of those ideals whose intersection with A^∞ is not $\{0\}$ is obtained. A complete description of the ideals with countable hull is given, with applications to synthesis of hyperfunctions.

Introduction

On considère l'algèbre $\mathcal{C}(\Gamma)$ des fonctions à valeurs complexes et continues sur le cercle $\Gamma = \partial D$, D désignant le disque unité ouvert.

Une *hyperfonction* φ sur le cercle Γ est une fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, tendant vers 0 à l'infini. On définit pour φ des coefficients de Fourier par les formules:

$$\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{\varphi}(n) z^n \quad (z \in D)$$

$$\varphi(z) = \sum_{n<0} \hat{\varphi}(n) z^n \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}).$$

Soit $\tilde{\varphi}$ définie par $\begin{cases} \tilde{\varphi}(z) = \varphi(z) & (z \in D) \\ \tilde{\varphi}(z) = -\varphi(z) & (z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}) \end{cases}$.

Le *support de l'hyperfonction* φ est le complémentaire de l'ensemble des $z_0 \in \Gamma$ pour lesquels $\tilde{\varphi}$ possède un prolongement analytique sur un voisinage de z_0. On appellera α l'application $z \mapsto z$. Soit alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\Gamma)$ une algèbre localement multiplicativement convexe et complète, telle que $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{A}$ et telle que l'ensemble des caractères bornés sur $\mathcal{A}$ coincide avec les évaluations aux points de Γ.

Pour $\varphi \in \mathcal{A}^*$, on pose

$$\varphi(z) = \langle(\alpha - z)^{-1}, \varphi\rangle \qquad \text{pour } |z| < 1$$
$$\varphi(z) = -\langle(\alpha - z)^{-1}, \varphi\rangle \quad \text{pour } |z| > 1.$$

Ceci permet d'identifier $\mathcal{A}^*$ à un ensemble $HF_{\mathcal{A}}$ d'hyperfonctions. La dualité est donnée par la formule

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{\varphi}(-n-1).$$

On dira que l'on peut *synthétiser une hyperfonction* $\psi \in HF_{\mathcal{A}}$ *par un ensemble* $M \subset \overline{\mathrm{Vect}(\alpha^n\psi)_{n\in\mathbb{Z}}}^{\omega^*}$ si $\psi \in \tau(M) := \overline{\mathrm{Vect}\{\varphi,\, \varphi \in M\}}^{\omega^*}$. Plusieurs résultats dans la description des idéaux fermés d'une algèbre de fonctions s'expriment en relation avec la synthèse.

Pour décrire les idéaux fermés d'une telle algèbre $\mathcal{A}$, on considère pour E fermé de Γ les ensembles

$$J_{\mathcal{A}}(E) = \overline{\{f \in \mathcal{A},\, \mathrm{Supp}(f) \cap E = \emptyset\}}^{\mathcal{A}}$$
$$\text{et} \quad I_{\mathcal{A}}(E) = \{f \in \mathcal{A},\, f\,|_E \equiv 0\}.$$

Si on note $h(I) = \{z \in \Gamma,\, f(z) = 0,\, (f \in I)\}$, on a $J_{\mathcal{A}}(h(I)) \cup I \subset I_{\mathcal{A}}(h(I))$. On dit que E est *de synthèse* si $J_{\mathcal{A}}(E) = I_{\mathcal{A}}(E)$ (il peut évidemment arriver, comme dans le cas de l'algèbre $\mathcal{O}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma)/\overline{\lim_{|n|\to+\infty}}|\hat{f}(n)|^{\frac{1}{n}} < 1\}$ pour les ensembles infinis que $J_{\mathcal{A}}(E) = I_{\mathcal{A}}(E) = \{0\}$).

Pour un *poids* ω, c'est à dire une application sous-multiplicative de $\mathbb{Z}$ dans $[1, +\infty[$, on considère

$$A_\omega(\Gamma) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\Gamma)/\|f\|_\omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\omega(n) < +\infty \right\}.$$

La théorie des idéaux fermés de $A_\omega(\Gamma)$ est classique pour $\omega \equiv 1$; on retrouve alors le cas de l'algèbre usuelle de N. Wiener $A(\Gamma)$ (cf. par exemple [**12**] et [**13**]).

Si

$$(\mathcal{R}_1) \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log(\omega(n))}{1+n^2} < +\infty,$$

l'algèbre $A_\omega(\Gamma)$ est *régulière* au sens de [**14**, p. 221] et a Γ pour spectre de Gelfand. Dans ce cas, on a pour tout idéal I

$$J_{A_\omega(\Gamma)}(h(I)) \subset I \text{ et } h(J_{A_\omega(\Gamma)}(h(I)) = h(I).$$

De même, si Λ est une famille filtrante croissante (c'est-à-dire si $\sup_{i\in\{1,\dots,k\}} \omega_i \in \Lambda$ pour toute famille finie d'éléments de Λ) on peut considérer

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\omega\in\Lambda} A_\omega(\Gamma).$$

S'il existe un poids σ_0 vérifiant $(\mathcal{R}_1)$ tel que

$$(\mathcal{R}_2) \qquad \omega(n) = O(\sigma_0(n)) \quad (|n| \to +\infty)$$

pour tout $\omega \in \Lambda$, l'algèbre $\mathcal{A}$ est alors régulière. Il résulte immédiatement de la démonstration de [**19**, Th. 2.2] que l'on a la propriété suivante.

Proposition 0.1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre localement multiplicativement convexe et vérifiant $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$. Alors les arcs fermés L non réduits à un point sont des ensembles de synthèse.*

Posons pour $k \geq 1$ $\omega_k = \begin{cases} e^{k\sqrt{|n|}} & (n<0) \\ (n+1)^k & (n\geq 0)\end{cases}$. On s'intéresse ici à l'algèbre

$$\mathcal{B} = \bigcap_{k\geq 1} A_{\omega_k}(\Gamma).$$

Il est immédiat de remarquer que les fonctions de $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ si on observe le critère élémentaire selon lequel une fonction de $L^1(\Gamma)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ si et seulement si $\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^p}\right)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. L'algèbre $\mathcal{B}$ est également clairement une algèbre de Fréchet.

Les conditions de régularité liées aux poids ω_k permettent d'obtenir dans ce cas des propriétés de division et d'approximation particulières. En effet, si ν est une mesure positive singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, on considère S_ν définie sur D et sur $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$ par la formule

$$S_\nu(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\nu(t)\right)$$

$$\left(\text{on pose } S_\nu(+\infty) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\nu(t)\right)\right).$$

On peut définir une hyperfonction S_ν^* en posant

$$S_\nu^*(z) = \frac{1}{S_\nu(z)} - \frac{1}{S_\nu(+\infty)} \qquad (|z| < 1)$$

$$S_\nu^*(z) = -\frac{1}{S_\nu(z)} + \frac{1}{S_\nu(+\infty)} \quad (|z| > 1)$$

et on obtient une description des idéaux $I_{S_\nu} := \tau(S_\nu^*)^\perp$ en termes de division. Le résultat principal est le fait que

$$I_{S_\nu} = S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)),$$

où $I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathcal{B}$ s'annulant avec toutes leurs dérivées sur E.

On obtient également au paragraphe 3 une propriété d'approximation à l'aide de fonctions extérieures pour les fonctions de $I^\infty(E)$ lorsque E vérifie la condition géométrique de Carleson $\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{2}{\mathrm{d}(e^{it},C)}\right) dt < +\infty$. On montre qu'il existe dans ce cas une suite $(F_k)_{k\geq 1}$ de fonctions de $A^\infty \cap I^\infty(E)$, où $A^\infty := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma),\ \hat{f}(n) = 0,\ (n < 0)\}$ telle que l'on ait pour la topologie de $\mathcal{B}$

$$f = \lim_{k\to+\infty} fF_k \quad (f \in I^\infty(E)).$$

On obtient alors une description de tous les idéaux de $\mathcal{B}$ dont l'intersection avec $A^\infty := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma),\ \hat{f}(n) = 0,\ (n < 0)\}$ est non réduite à $\{0\}$ au paragraphe 4. On note, pour $I \subset \mathcal{B}$, et pour $\lambda \in h(I)$, $d_I(\lambda) = \sup\{n \in \mathbb{N},\ f(\lambda) = \cdots = f^{(n)}(\lambda) = 0,\ (f \in I)\}$. On note alors

$$I^{(d)} := \{f \in \mathcal{B},\ f(\lambda) = \cdots = f^{d_I(\lambda)}(\lambda) = 0,\ (\lambda \in h(I))\},$$

et on obtient alors pour tout idéal I tel que $I \cap A^\infty \neq 0$

$$I = I^{(d)} \cap S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$$

où S_ν est une fonction intérieure singulière.

Enfin, on obtient une description complète des idéaux I de $\mathcal{B}$ tels que $h(I)$ est dénombrable. Les calculs sont sensiblement plus simples que dans la situation étudiée dans [**8**]. En particulier, toute hyperfonction $\varphi \in HF_{\mathcal{B}}$ dont le support est dénombrable peut être synthétisée par des dérivées de mesures de Dirac et des hyperfonctions du type S_ν^* où ν est atomique.

Il serait intéressant de voir si, pour certains ensembles parfaits E de mesure nulle, on a $\bigcap_{\mathrm{Supp}\, S_\nu \subset E} I_{S_\nu} = J_{\mathcal{B}}(E)$, ainsi que d'envisager la synthèse pour des ensembles non dénombrables. Cet objectif n'a pas été atteint dans cet article.

1. L'algèbre $\mathcal{B}$ et son dual

1.1. L'algèbre $\mathcal{B}$.

L'algèbre $\mathcal{B}$ apparait comme une intersection d'algèbres à poids.

Un *poids* ω est une application sous-multiplicative de $\mathbb{Z}$ dans $[1,+\infty[$. Il est dit *régulier* si la condition

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log(\omega(n))}{1+n^2} < +\infty$$

est réalisée. Dans ce cas, l'algèbre

$$A_\omega(\Gamma) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\Gamma) / \|f\|_\omega = \sum_{n<0} |\hat{f}(n)|\omega(n) < +\infty \right\}$$

est une algèbre régulière [**14**]. Rappelons que cela signifie que si x est un point de Γ et si A est un compact de Γ, il existe une fonction f de $A_\omega(\Gamma)$ telle que $f(x) = 1$ et $f\mid_A \equiv 0$.

On considère la famille de poids

$$\omega_k(n) = \begin{cases} e^{k\sqrt{|n|}}, & n < 0 \\ (1+n)^k, & n \geq 0 \end{cases}$$

et, clairement,

$$\mathcal{B} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{\omega_k}(\Gamma)$$

est une algèbre de Fréchet régulière pour la famille $(\|\cdot\|_k)_{k\geq 1}$ où $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{\omega_k}$ $(k \geq 1)$.

Remarquons que celle-ci vérifie la propriété de stabilité suivante:

Pour $f \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \Gamma$, $\xi \in \Gamma$, on pose

$$f_\lambda(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(\lambda)}{\xi - \lambda} & \text{pour } \xi \neq \lambda \\ f'(\lambda) & \text{pour } \xi = \lambda. \end{cases} \tag{1.1}$$

On a donc $(\alpha - \lambda) f_\lambda = f - f(\lambda)$ et

$$f_\lambda \in \mathcal{B}, \quad (f \in \mathcal{B},\ \lambda \in \Gamma). \tag{1.2}$$

En effet,

$$f - f(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(\alpha^n - \lambda^n).$$

Il vient alors, les séries étant convergentes dans $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$,

$$f_\lambda = \sum_{n>0} \hat{f}(n)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) \\ - \sum_{n<0} \hat{f}(n)\overline{\alpha}^n(\lambda^{-1} + \cdots + \lambda^n \alpha^{-n-1})$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{n>0} \|\hat{f}(n)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1})\|_p \\
&\quad + \sum_{n<0} \|\hat{f}(n)\overline{\alpha}^n(\lambda^{-1} + \cdots + \lambda^n\alpha^{-n-1})\|_p \\
&\leq \sum_{n>0} |\hat{f}(n)|(\|1\|_p + \cdots + \|\alpha^{n-1}\|_p) \\
&\quad + \sum_{n<0} |\hat{f}(n)|\,\|\alpha^n\|_p(\|1\|_p + \cdots + \|\alpha^{-n-1}\|_p) \\
&\leq \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)| n^{p+1} + \sum_{n<0} |\hat{f}(n)| e^{p\sqrt{|n|}} |n|^{p+1} \\
&\leq K \left(\sum_{n>0} |\hat{f}(n)| n^{p+1} + \sum_{n<0} |\hat{f}(n)| e^{(p+1)\sqrt{|n|}} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Ceci montre que f_λ est un élément de $\mathcal{B}$.

Pour I idéal d'une des algèbres considérées ci-dessus, on notera

$$h(I) = \{z \in \Gamma / f(z) = 0\,(f \in I)\}$$

l'ensemble des zéros communs à toutes les fonctions de l'idéal I.

Remarque 1.1. Soit A une algèbre de Fréchet commutative unitaire et soit $\widehat{A}$ l'ensemble des caractères χ continus de A. Pour $x \in A$, notons $\mathrm{Sp}(x)$ le spectre de x dans A. Alors $\mathrm{Sp}(x) = \{\chi(x)\}_{\chi \in \hat{A}}$. Si I est un idéal fermé de A, posons $Z(I) = \{\chi \in \widehat{A} / I \subset \mathrm{Ker}\,(\chi)\}$ et soit π la surjection canonique de A sur $\frac{A}{I}$. Alors l'application $\chi \to \chi \circ \pi$ est une bijection de $\widehat{\left(\frac{A}{I}\right)}$ sur $Z(I)$. On en déduit que si I est un idéal fermé de $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{B}$, $\mathrm{Sp}(\pi(f)) = f(h(I))$. Donc si $f \in \mathcal{B}$, $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in h(I)$, alors il existe $g \in \mathcal{B}$ et $h \in I$, tels que

$$fg = 1 + h.$$

On considère maintenant deux types d'idéaux particuliers. Si E est un fermé de Γ, on note $I(E)$ (resp. $I_\omega(E)$) l'ensemble des fonctions de $\mathcal{B}$ (resp. de $A_\omega(\Gamma)$) s'annulant sur E et on note $J(E)$ (resp. $J_\omega(E)$) l'adhérence dans $\mathcal{B}$ (resp. dans $A_\omega(\Gamma)$) de l'ensemble des fonctions nulles au voisinage de E. On dit de même que dans [**12**] qu'une fonction est *de synthèse* pour E dans $\mathcal{B}$ (resp. dans $A_\omega(\Gamma)$) si elle appartient à $J(E)$ (resp. $J_\omega(E)$). Le fait que l'algèbre $A_\omega(\Gamma)$ soit régulière implique alors que, E étant un fermé de Γ,

$$h(I_\omega(E)) = h(J_\omega(E)) = E$$

et que pour tout idéal fermé I de $A_\omega(\Gamma)$ tel que $h(I) = E$, on a

$$J_\omega(E) \subset I \subset I_\omega(E).$$

D'autre part, de même que dans [**8**], [**19**], on a

$$\overline{J(E)}^{A_{\omega_k}} = J_{\omega_k}(E) \tag{1.3}$$

$$J(E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} J_{\omega_k}(E) \tag{1.4}$$

$$\text{et}\quad J(E) \subset I \subset I(E) \tag{1.5}$$

pour tout idéal fermé I de $\mathcal{B}$ tel que $h(I) = E$.

Dans toute la suite, on notera $\alpha : z \mapsto z$ l'application identité; on a donc, pour $f \in \mathcal{B}$

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\alpha^n \tag{1.6}$$

la série étant convergente au sens de la topologie de $\mathcal{B}$.

1.2. Hyperfonctions, description du dual de $\mathcal{B}$.

Le dual $\mathcal{B}^*$ de l'algèbre $\mathcal{B}$ pourra être interprété comme un ensemble d'hyperfonctions.

Définition 1.1. Une hyperfonction φ sur le cercle Γ est une fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, tendant vers 0 à l'infini.

L'ensemble des hyperfonctions sera noté $HF(\Gamma)$.

On définit pour l'hyperfonction φ des coefficients de Fourier par les formules:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n\geq 0} \hat{\varphi}(n)z^n \quad (z\in D) \\ \varphi(z) &= \sum_{n<0} \hat{\varphi}(n)z^n \quad (z\in \mathbb{C}\backslash\overline{D}) \end{aligned} \tag{1.7}$$

et on pose

$$\varphi^+ = \varphi \mid_{\mathbb{C}}, \quad \varphi^- = \varphi \mid_{\mathbb{C}\backslash\overline{D}}. \tag{1.8}$$

Pour $\varphi \in HF(\Gamma)$, on définit $\tilde{\varphi} \in HF(\Gamma)$ par les formules $\tilde{\varphi}^+ = \varphi^+$ et $\tilde{\varphi}^- = -\varphi^-$. On définit le support de φ comme le plus petit fermé $E \subset \Gamma$ tel que $\tilde{\varphi}$ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}\backslash E$. Cet ensemble sera noté $\mathrm{Supp}(\varphi)$. Si E est un ensemble fermé du cercle on pose $HF(E) = \{\varphi \in HF(\Gamma)/\,\mathrm{Supp}(\varphi) \subset E\}$.

Remarquons que si $f \in L^1(\Gamma)$, on peut considérer f comme une hyperfonction en posant

$$f^+(z) := \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)z^n \quad (z \in D)$$

$$f^-(z) := \sum_{n<0} \hat{f}(n)z^n \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}).$$

On voit donc que les coefficients de Fourier de la fonction f (définis par les formules usuelles) et de l'hyperfonction f (définis par (1.7)) coincident. Ces notations sont celles de [**10**] et diffèrent légèrement de celles de [**8**]. On peut de même identifier $\mathcal{D}(\Gamma)$, l'ensemble des distributions sur Γ, à l'ensemble $\left\{\varphi \in HF(\Gamma))/\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|\hat{\varphi}(n)|}{\log|n|} < +\infty\right\}$ (cf. par exemple [**13**, p. 163]).

Il apparait alors que si ω est un poids, on a:

$$(A_\omega(\Gamma))^* = HF_\omega(\Gamma)$$

qui est défini par

$$HF_\omega(\Gamma) := \left\{\varphi \in HF(\Gamma)/\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{|\hat{\varphi}(-n)|}{\omega(n)}\right) < +\infty\right\},$$

la dualité étant définie pour $f \in A_\omega(\Gamma)$, $\varphi \in HF_\omega(\Gamma)$ par la formule

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{\varphi}(-n-1) \tag{1.9}$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \left[\varphi(r\zeta) + \varphi\left(\frac{\zeta}{r}\right)\right] f(\zeta)\,d\zeta \tag{1.10}$$

la dernière égalité étant un résultat classique (voir par exemple [**8**], [**10**]).

En appliquant ceci à ω_k, il est immédiat de constater que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^* &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A^*_{\omega_k}(\Gamma)\\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\varphi \in HF(\Gamma)/ \sup_{n\geq 0}\left(\frac{|\hat{\varphi}(n)|}{e^{k\sqrt{n}}}\right) < +\infty,\ \sup_{n\leq 0}\left(\frac{|\hat{\varphi}(n)|}{|n|^k}\right) < +\infty\right\}\\ &= \left\{\varphi \in HF(\Gamma)/ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log^+|\hat{\varphi}(n)|}{\sqrt{n}} < \infty,\ \overline{\lim_{n\to-\infty}} \frac{\log^+|\hat{\varphi}(n)|}{\log|n|} < \infty\right\}.\end{aligned}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{B}^*$, en utilisant la notation (1.7), on obtient immédiatement les formules suivantes:

$$\hat{\varphi}(n) = \langle \alpha^{-n-1}, \varphi\rangle \tag{1.11}$$

ainsi que

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \langle(\alpha-\lambda)^{-1},\varphi\rangle & |\lambda|<1\\ -\langle(\alpha-\lambda)^{-1},\varphi\rangle & |\lambda|>1.\end{cases} \tag{1.12}$$

De plus, les formules (1.9) et (1.10) restent valables pour $f \in \mathcal{B}$ et $\varphi \in \mathcal{B}^*$, ainsi que pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

On sait aussi [**2**], [**8**], [**17**] aussi que si E est un fermé de Γ et si $\varphi \in \mathcal{B}^* \cap HF(E)$, on a les estimations suivantes, où N est un entier positif dépendant de φ

$$\log^+(\varphi^+(z)) = O(\mathrm{d}(z,E)^{-1}) \quad (|z|\to 1^-) \tag{1.13}$$

$$\varphi^-(z) = O(\mathrm{d}(z,E)^{-N}) \quad (|z|\to 1^+) \tag{1.14}$$

où $\mathrm{d}(z,E)$ désigne la distance de z à l'ensemble E.

On aura à considérer par la suite certains types et certaines classes de fonctions analytiques usuelles. Rappelons brièvement quelques définitions classiques.

On dit qu'une fonction f analytique sur D est dans la *classe de Nevanlinna* si elle vérifie la condition

$$\sup_{r\in[0,1[} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta < \infty.$$

On notera dans la suite $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions de la classe de Nevanlinna.

Le produit de Blaschke associé à $m \geq 0$ et à une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de D vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|z_n|) < +\infty$ est le produit (convergent uniformément sur les compacts de D) de la forme

$$B(z) = z^m \prod_{n\geq 1} \frac{\overline{z_n}}{|z_n|} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \quad (z \in D).$$

Une fonction intérieure singulière $S = S_\mu$ est une fonction définie de D dans $\mathbb{C}$ par

$$S(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\right),$$

μ étant une mesure positive singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans toute la suite, lorsque l'on aura $\mu = t\delta_\lambda$, on notera $S_\mu = S_{t,\lambda}$.

Les fonctions extérieures sont les fonctions de la forme

$$F(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} k(\theta)\,d\theta\right]$$

où k est une fonction réelle intégrable sur le cercle unité.

Les fonctions f de la classe de Nevanlinna vérifient la factorisation suivante:

$$f(z) = \lambda B(z)\frac{S_1(z)}{S_2(z)}F(z) \quad (z \in D) \tag{1.15}$$

où λ est un nombre complexe de module 1, B un produit de Blaschke, F une fonction extérieure et où S_1 et S_2 sont des fonctions intérieures singulières dont le $PGCD$ est égal à 1.

On notera $\mathcal{N}^+$ la *classe de Smirnov* des fonctions de la classe de Nevanlinna sans dénominateur S_2. Remarquons que les coefficients de Taylor d'une fonction $g : z \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ appartenant à $\mathcal{N}^+$ vérifient l' estimation suivante (cf. [**1**, Lemme 5]):

$$a_n = O(e^{\epsilon\sqrt{n}}) \quad (\epsilon > 0). \tag{1.16}$$

Remarquons enfin que l'on peut définir des hyperfonctions de $\mathcal{B}^*$ associées à des fonctions intérieures singulières. Toute fonction intérieure singulière se prolonge en effet en une fonction analytique sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \backslash \Gamma$ en posant

$$S(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\nu(t)\right), \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma)$$

et

$$S(\infty) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\nu(t)\right)$$

Supp(ν) étant défini au sens des distributions, on définit alors une hyperfonction de support égal à Supp(ν) par

$$\begin{cases} S^*(z) := \dfrac{1}{S(z)} - \dfrac{1}{S(\infty)} & (|z| < 1) \\[2ex] S^*(z) := -\dfrac{1}{S(z)} + \dfrac{1}{S(\infty)} & (|z| > 1). \end{cases}$$

Selon les estimations de [**1**, Lemme 5], $S^* \in \mathcal{B}^*$.

Remarquons que l'on peut écrire

$$S^* = \frac{1}{S} - \overline{S} \tag{1.17}$$

où on identifie $\frac{1}{S} \in \mathrm{Hol}(D)$ à une hyperfonction en la prolongeant par 0 sur $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$ et en identifiant $\overline{S} \in L^\infty(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ à une hyperfonction.

1.3. Produit d'une fonction par une hyperfonction.

On définit pour $f \in \mathcal{B}$, $\varphi \in \mathcal{B}^*$ le produit $f \cdot \varphi$ par

$$\langle g, f \cdot \varphi\rangle = \langle gf, \varphi\rangle \quad (g \in \mathcal{B}). \tag{1.18}$$

Il apparait alors clairement que l'on a:

$$(gf) \cdot \varphi = g(f \cdot \varphi) \quad (f, g \in \mathcal{B},\ \varphi \in \mathcal{B}^*) \tag{1.19}$$

et un calcul élémentaire à partir de (1.10) permet d'obtenir la formule

$$\widehat{f \cdot \varphi}(n) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \hat{f}(p)\hat{\varphi}(n-p) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{1.20}$$

Remarque 1.2. On déduit en particulier de la formule (1.20) que, lorsque les coefficients de Fourier d'indices négatifs de f et φ sont nuls, le produit $f \cdot \varphi$ s'identifie au produit de fonctions holomorphes $f\varphi$.

Remarque 1.3. Il est clair que si $\varphi \in \mathcal{B}^*$, alors l'ensemble $I_\varphi := \{f \in \mathcal{B} / f \cdot \varphi = 0\}$ est un idéal de $\mathcal{B}$. De même que dans ([**13**, App. II et III]) pour les pseudomesures, il résulte de (1.10) que si $\varphi \in \mathcal{B}^*$, $f \in \mathcal{B}$ et si $\mathrm{Supp}(f) \cap \mathrm{Supp}(\varphi) = \emptyset$, alors $f \in I_\varphi$. Autrement dit, on a

$$\{\varphi \in \mathcal{B}^* / \,\mathrm{Supp}(\varphi) \subset E\} \subset J(E)^\perp.$$

Considérons maintenant $\varphi \in \mathcal{B}^*$ et $f \in I_\varphi$. Posons $J = \overline{\mathrm{Vect}\{\alpha^n f\}_{n\in\mathbb{Z}}}$ et soit $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/J$ la surjection canonique. Alors $h(J) = Z(f) := \{\xi \in \Gamma / f(\xi) = 0\}$ donc $\mathrm{Sp}(\pi(\alpha)) = Z(f)$. Il existe $\psi \in (\mathcal{B}/I)^*$ telle que $\varphi = \psi \circ \pi$. On a alors pour $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$

$$\tilde{\varphi}(z) = \langle (\alpha - z \cdot 1)^{-1}, \varphi\rangle = \langle (\pi(\alpha) - z \cdot 1)^{-1}, \psi\rangle$$

qui se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}\backslash Z(f)$. Donc si $\varphi \in \mathcal{B}^*$ et si $f \cdot \varphi = 0$, alors f s'annule sur $\mathrm{Supp}(\varphi)$. En particulier, si $\varphi \in J(E)^\perp$, $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset h(J(E)) = E$ et on a

$$J(E)^\perp = \{\varphi \in \mathcal{B}^* / \,\mathrm{Supp}(\varphi) \subset E\}. \tag{1.21}$$

Notons que l'analogue de (1.21) est vérifié pour toutes les algèbres $A_\omega(\Gamma)$ régulières, cf. [**7**].

Remarque 1.4. Synthèse dans $\mathcal{B}^*$.

On note, pour $M \subset \mathcal{B}^*$

$$\tau(M) = \overline{\mathrm{Vect}\,\{\varphi,\, \varphi \in M\}}^{\omega^*}.$$

On dit que l'on peut synthétiser une hyperfonction ψ par $M \subset \overline{\mathrm{Vect}(\alpha^n\varphi)}^{\omega^*}_{n\in\mathbb{Z}}$ si $\psi \in \tau(M)$. Ceci peut être relié à la description des idéaux de $\mathcal{B}$ en remarquant que, pour $\varphi \in \mathcal{B}^*$,

$$\begin{aligned}\tau[(\alpha^n\varphi)_{n\in\mathbb{Z}}]^\perp &= \{f \in \mathcal{B} / \langle f, \alpha^n \cdot \varphi\rangle \,(n \in \mathbb{Z})\}\\ &= \{f \in \mathcal{B} / \langle \alpha^n, f \cdot \varphi\rangle \,(n \in \mathbb{Z})\}\\ &= \{f \in \mathcal{B} / f \cdot \varphi = 0\}\\ &= I_\varphi.\end{aligned}$$

Plus généralement, on a

$$\tau[(\alpha^n M)_{n\in\mathbb{Z}}]^\perp = \{f \in \mathcal{B} / \forall\, \varphi \in M,\ f \cdot \varphi = 0\}.$$

1.4. Platitude.

Définition 1.2. On dit qu'une fonction f qui est k fois dérivable sur le cercle est *plate au rang* k sur un ensemble E si

$$f\mid_E \equiv f' \mid_E \equiv \cdots \equiv f^{(k)} \mid_E \equiv 0.$$

On dit que f est *plate* sur E si elle y est plate pour tout rang. On notera $I^k(E)$ l'ensemble des fonctions plates au rang k sur E et $I^\infty(E)$ l'ensemble des fonctions plates sur E.

Remarquons que la propriété de stabilité (1.2) implique par récurrence que si $f \in \mathcal{B}$ est plate au rang k en λ, alors $\frac{f}{(\alpha-\lambda)^{k+1}} \in \mathcal{B}$.

Proposition 1.1. *Soit $S = S_\nu$ une fonction intérieure, f un élément de $\mathcal{B}$ tel que $fS \in \mathcal{B}$.*
Alors f est plate sur $\operatorname{Supp}(\nu)$.

Démonstration: Selon [**11**] on sait que $S(z)$, $z \in D$, n'est prolongeable par continuité sur aucun point du support de ν. S étant d'autre part égale à l'intégrale de Poisson $\mathcal{P}(S)$ de ses valeurs au bord (cf. par exemple [**16**, p. 249]), aux points où $\theta \mapsto S(e^{i\theta})$ est continue, $\mathcal{P}(S)(z) = S(z) \to S(e^{i\theta})$ ([**3**, p. 311]), donc si $e^{i\theta} \in \operatorname{Supp}(\nu)$, $f(e^{i\theta}) = 0$. Ceci implique en particulier que si f et Sf appartiennent à $\mathcal{B}$, f est plate sur $\operatorname{Supp}(\nu)$ si $\operatorname{Supp}(\nu)$ est un ensemble parfait, ou plus généralement que f est plate en tout point d'accumulation de $\operatorname{Supp}(\nu)$, grâce à ce qui suit:

Si z_0 est un point isolé de $\operatorname{Supp}(\nu)$, on a $S(z) = e^{t\frac{z+z_0}{z-z_0}} S_\mu(z)$ où $t \in \mathbb{R}$ et $z_0 \notin \operatorname{Supp}(\mu)$. On a alors

$$|S^{(k)}(z)| \underset{z\to z_0}{\sim} \frac{c_k}{|z-z_0|^{2k}},$$

avec $c_k > 0$.

Supposons f non plate en z_0 et soit k le plus petit entier tel que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. En utilisant la formule de Leibnitz, on obtient alors que

$$|(fS)^{(k)}(z)| \underset{z\to z_0}{\sim} \frac{c_k |f^{(k)}(z_0)|}{|z-z_0|^k}$$

ce qui est absurde. Ceci permet de conclure que f est plate également en ces points. ■

Posons

$$\begin{aligned} A^\infty &= \mathcal{C}^\infty(\overline{D}) \cap \mathrm{Hol}(D) \\ &= \{f \in H^\infty(D)/f^{(k)} \in H^\infty(D) \text{ pour } k \geq 1\}. \end{aligned}$$

Il a été montré dans [**17**] que les ensembles C vérifiant la propriété géométrique suivante:

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{2}{\mathrm{d}(e^{it}, C)}\right) dt < \infty \tag{1.22}$$

sont tels qu'il existe $F \in A^\infty$ extérieure plate sur C et telle que l'ensemble des zéros de F est exactement C.

En identifiant $f \in A^\infty$ à $f\,|_\Gamma$, on obtient immédiatement

$$A^\infty = \mathcal{B}^+ := \{f \in \mathcal{B}/\hat{f}(n) = 0 \text{ pour } n < 0\}.$$

La condition géométrique (1.22) caractérise les ensembles de zéros sur le cercle des éléments non nuls de A^∞ et a été introduite par Carleson [**4**]. On désignera par *ensembles de Carleson* les ensembles vérifiant cette condition. De même que plus haut, on notera $\mathrm{Supp}(\nu)$ le support au sens des distributions d'une mesure ν sur le cercle. Rappelons la propriété classique suivante:

Proposition 1.2. *Si $S = S_\nu$ et si* $\mathrm{Supp}(\nu)$ *est un ensemble de Carleson, alors S_ν^* n'est pas une distribution.*

Démonstration: Soit $F \in A^\infty$, extérieure, non nulle et plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. Comme $A^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, si S_ν^* était une distribution, on aurait $F \cdot S_\nu^* = 0$.

Or $F \cdot S_\nu^* \neq 0$. En effet, $A^\infty \subset H^2$, donc $F \in H^2$, et on sait que $\{f \in H^2/f \cdot S_\nu^* = 0\} = S_\nu \cdot H^2$ (voir par exemple [**9**, Prop. 3.12]). ■

2. Idéaux de $\mathcal{B}$ associés à des fonctions intérieures

Définition 2.1. A chaque fonction intérieure singulière S, on associe l'idéal I_S défini par

$$I_S := \{f \in \mathcal{B},\, f \cdot S^* = 0\}.$$

Si l'on considère l'hyperfonction $\varphi = S^*$ associée à S, ces idéaux correspondent aux idéaux I_φ des Remarques 1.3 et 1.4.

On va montrer le théorème suivant:

Théorème 2.1. *Soit ν une mesure singulière positive et soit $E = \mathrm{Supp}(\nu)$.*

Alors $I_{S_\nu} = S_\nu I^\infty(E) \subset I^\infty(E)$.

La démonstration du théorème va reposer sur plusieurs lemmes.

Lemme 2.1. *Soient $f \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{B}^*$ telle que $\widehat{\varphi}(n) = 0$, $(n < 0)$.*

Les coefficients de Fourier de l'hyperfonction $f \cdot \varphi$ vérifient

$$\sum_{n<0} |\widehat{f \cdot \varphi}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} < +\infty.$$

Démonstration: Il existe $K > 0$ tel que $|\hat{\varphi}(n)| = O(e^{K\sqrt{n}})$, $n \to \infty$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{n<0} |\widehat{f \cdot \varphi}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} \\
&= \sum_{n<0} \left| \sum_{p\geq 0} \widehat{\varphi}(p) \hat{f}(n-p) \right| e^{k\sqrt{|n|}} \\
&\leq M \sum_{n<0} \sum_{p\geq 0} e^{K\sqrt{p}} |\hat{f}(n-p)| e^{k\sqrt{|n|}} \\
&\leq M \sum_{p\geq 0} e^{K\sqrt{p}} \sum_{n<0} |\hat{f}(n-p)| e^{k\sqrt{|n|+p}} \\
&\leq M \sum_{p\geq 0} e^{K\sqrt{p}} \sum_{l<-p} |\hat{f}(l)| e^{k\sqrt{|l|}} \\
&\leq M \sum_{p\geq 0} e^{K\sqrt{p}} \sum_{l<-p} |\hat{f}(l)| e^{(k+2K)\sqrt{|l|}} e^{-2K\sqrt{p}} \\
&\leq M \sum_{p\geq 0} e^{-K\sqrt{p}} \sum_{l<-p} |\hat{f}(l)| e^{(k+2K)\sqrt{|l|}} < +\infty. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarquons que cette propriété est en particulier vérifiée pour les hyperfonctions correspondant à une fonction φ de $\mathcal{N}$ (prolongée par 0 sur $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$). En effet, d'après [**1**, Lemme 5], il existe dans ce cas un nombre positif K tel que

$$|\widehat{\varphi}(n)| = O(e^{K\sqrt{n}}) \quad (n \geq 0).$$

Corollaire 2.1. *Soient ν une mesure positive singulière et E un fermé du cercle contenant* $\mathrm{Supp}(\nu)$. *Alors $S_\nu \cdot I^\infty(E) \subset I^\infty(E)$, et l'application $f \mapsto S_\nu f$ est continue sur $I^\infty(E)$.*

Démonstration: Le produit $S_\nu f$ définit clairement une fonction de $\mathcal{C}^\infty$ plate sur E. Le lemme permet de conclure que $S_\nu f \in \mathcal{B}$. Par ailleurs, si $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $S_\nu f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ dans $\mathcal{B}$, on a $g = 0$ dans $L^\infty(\Gamma)$, donc dans $\mathcal{B}$.

La continuité de l'application $f \mapsto S_\nu f$ sur $I^\infty(E)$ résulte alors du théorème du graphe fermé (on aurait pu aussi déduire directement cette continuité des calculs du lemme). ■

Si $\varphi \in \mathrm{Hol}(D)$, on pose $\varphi_r(z) = \varphi(rz)$ pour $|z| < 1$.

Lemme 2.2. *Si $g \in I^\infty(E)$, alors $gS_r \to gS$ dans $\mathcal{B}$.*

Démonstration: On pose $S = S_\nu$. Montrons que pour $k \geq 1$

$$\sum_{n<0} |\widehat{gS - gS_r}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} 0.$$

On observe que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n<0} \left| \sum_{p\geq 0} \hat{g}(n-p)(1-r^p)\hat{S}(p) \right| e^{k\sqrt{|n|}} \\
&\leq \sum_{p\geq 0} (1-r^p) \sum_{l<-p} |\hat{g}(l)| e^{k\sqrt{|l|-p}} \\
&\leq \sum_{p\geq 0} (1-r^p) \sum_{l<-p} |\hat{g}(l)| e^{2k\sqrt{|l|}} e^{-k\sqrt{p}} \\
&\leq \sum_{l<0} |\hat{g}(l)| e^{2k\sqrt{|l|}} \sum_{p\geq 0} (1-r^p) e^{-k\sqrt{p}}
\end{aligned}$$

ce qui implique que l'on a bien la limite annoncée.

Il suffit alors de montrer que $gS_r - gS \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ pour la topologie de $\mathcal{C}^\infty$ pour avoir la propriété voulue.

On est donc amené à examiner les termes issus de la formule de Leibnitz de la forme

$$g^{(k)}(z)[S^{(p)}(z) - S^{(p)}(rz)].$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_j$ et des entiers $q_1, \ldots, q_j$ tels que

$$S^{(p)}(z) = \left(\prod_{l \leq j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_l(e^{it}, z)}{(e^{it} - z)^{q_l}} \, d\nu(t) \right) S(z).$$

Posons $q = \sum_{l=1}^{j} q_j$. Il vient alors:

$$\begin{aligned} &|g^{(k)}(z)[S^{(p)}(z) - S^{(p)}(rz)]| \\ &\qquad \leq M|g^{(k)}(z)| \left[\frac{1}{\mathrm{d}(z, \mathrm{Supp}(\nu))^q} + \frac{1}{\mathrm{d}(rz, \mathrm{Supp}(\nu))^q} \right]. \end{aligned}$$

En remarquant comme dans [**8**, Lemme 4.9] que $\mathrm{d}(re^{it}, E) \geq \frac{1}{2} \, \mathrm{d}(e^{it}, E)$, on voit qu'il existe pour $m \geq 0$ un réel $K > 0$ tel que

$$|(gS_r)^{(m)}(z) - (gS)^{(m)}(z)| \leq K \, \mathrm{d}(z, \mathrm{Supp}(\nu))$$

pour $0 \leq r < 1$ et $|z| \leq 1$.

Comme $(gS_r)^{(m)}(z) \underset{r \to 1^-}{\longrightarrow} (gS)^{(m)}(z)$ uniformément sur tout compact de $\overline{D} \setminus \mathrm{Supp}(\nu)$, on en déduit que $gS - gS_r \underset{r \to 1^-}{\longrightarrow} 0$ pour la topologie de $\mathcal{C}^\infty$. ∎

Lemme 2.3. *Si $S = S_{t,\lambda}$, la relation $f \cdot S^* = 0$ implique que f est plate en λ.*

Démonstration: Posons $S = S_{t,\lambda}$.

Alors $\mathrm{Supp}(S^*) = \{\lambda\}$, donc, d'après (1.21), $J(\lambda) \subset I_S$ et $h(I_S) \subset \{\lambda\}$. On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f(\lambda) = \cdots = f^{(K-1)}(\lambda) = 0$ et $f^{(K)}(\lambda) \neq 0$. Posons $g = \frac{f}{(\alpha - \lambda)^K}$. Alors $g \in \mathcal{B}$ et $g(\lambda) \neq 0$. D'après la Remarque 1.1, il existe $h \in \mathcal{B}$ et $l \in I_S$ tels que $gh = 1 + l$.

On en déduit que

$$(\alpha - \lambda)^K \cdot S^* = 0. \tag{2.1}$$

Or la relation (2.1) implique que S^* doit alors être une combinaison linéaire de la mesure de Dirac en λ et de ses $(K-1)$ premières dérivées (il suffit de faire un développement de Taylor de f en λ dans l'expression $\langle f, S^* \rangle$, $(f \in \mathcal{B})$ pour s'en assurer).

L'hyperfonction S^* serait alors ici une distribution, ce qui est exclu pour S_ν^* lorsque $\mathrm{Supp}(\nu)$ est comme ici un ensemble de Carleson d'après la Proposition 1.2.

La fonction f est donc plate en λ. ∎

Lemme 2.4. *Si $S = S_\nu$, la relation $f \cdot S^* = 0$ implique que f est plate sur* $\mathrm{Supp}(\nu)$.

Démonstration: Si $f \cdot S^* = 0$, selon la Remarque 1.3, on a $f \equiv 0$ sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. Ceci implique que f est plate sur la partie parfaite de ce support. Si $\mathrm{Supp}(\nu)$ admet un point isolé λ, il existe un élément g de $\mathcal{B}$ tel que $g(\lambda) = 1$ et $g \equiv 0$ sur un voisinage compact E_λ de $\mathrm{Supp}(\nu)\backslash\{\lambda\}$.

D'autre part, il existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait la décomposition de mesures

$$\nu = \nu' \oplus t\delta_\lambda$$

où $\lambda \notin \mathrm{Supp}(\nu')$.

On a alors $S_\nu = S_{\nu'} S_{t,\lambda}$.

Puisque g est un élément de $\mathcal{B}$, on peut écrire

$$(gf) \cdot S^* = g(f \cdot S^*) = 0$$

et, comme g est nulle au voisinage de $\mathrm{Supp}(\nu')$, $gS_{\nu'} \in \mathcal{B}$, et on a

$$f(gS_{\nu'} \cdot S^*) = (gS_{\nu'})f \cdot S^* = 0. \tag{2.2}$$

Remarquons que pour $p \geq 1$, l'application

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{B}, (A_{\omega_p})^*) & \to & (A_{\omega_p})^* \\ (f, \varphi) & \longmapsto & f \cdot \varphi \end{array}$$

est une application bilinéaire continue.

Si l'on définit φ_r pour $\varphi \in (A_{\omega_p})^*$ par

$$\varphi_r(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) r^{|n|} \xi^n \quad (\xi \in \Gamma)$$

on a clairement

$$\varphi_r \underset{r \to 1^-}{\longrightarrow} \varphi \text{ dans } (A_{\omega_p})^*.$$

Soit $p \geq 1$ tel que S^*, $S^*_{\nu'}$ et $S^*_{t,\lambda} \in (A_{\omega_p})^*$. On a dans $(A_{\omega_p})^*$, d'après (1.17)

$$\begin{aligned} (gS_{\nu'}) \cdot S^* &= (gS_{\nu'}) \cdot \left(\frac{1}{S} - \overline{S}\right) \\ &= \lim_{r \to 1^-} g(S_{\nu'})_r \frac{1}{S_r} - gS_{\nu'}\overline{S} \\ &= \lim_{r \to 1^-} g \frac{1}{(S_{t,\lambda})_r} - g\overline{S_{t,\lambda}} \\ &= g \cdot \left(\frac{1}{S_{t,\lambda}} - \overline{S_{t,\lambda}}\right) \\ &= g \cdot S^*_{t,\lambda}. \end{aligned}$$

On a donc en revenant à la formule (2.2)

$$fg \cdot S^*_{t,\lambda} = 0$$

ce qui implique selon le Lemme 2.3 que la fonction fg est plate en λ, puis, puisque $g(\lambda) = 1$, que f est plate en λ. $\blacksquare$

On peut alors démontrer le Théorème 2.1.

Démonstration: On pose à nouveau $S = S_\nu$.

Si $f = Sg$, où g est une fonction de $\mathcal{B}$ plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$, alors selon le Corollaire 2.1, f est une fonction de $\mathcal{B}$ plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. On a selon le Lemme 2.2 la propriété

$$Sg = \lim_{r \to 1^-} S_r g \text{ dans } \mathcal{B}$$

et, comme il existe p tel que $S^* \in (A_{\omega_p})^*$, on a dans $(A_{\omega_p})^*$, de même que dans la démonstration du Lemme 2.4,

$$\begin{aligned}(Sg) \cdot S^* &= Sg \cdot \left(\frac{1}{S} - \overline{S}\right) \\ &= \lim_{r \to 1^-} (gS_r) \frac{1}{S_r} - g = 0\end{aligned}$$

donc

$$SI^\infty(E) \subset I_S.$$

Réciproquement, si $f \cdot S^* = 0$, $f \cdot \frac{1}{S} = f\overline{S}$.

Comme f est plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$, $f \cdot \overline{S} \in \mathcal{C}^\infty$ et $f \cdot \overline{S}$ est plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. On déduit du Lemme 2.1 que $\sum_{n<0} |\widehat{f \cdot \overline{S}}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} < +\infty$ pour tout $k \geq 1$ et par conséquent $f \cdot \overline{S} \in \mathcal{B}$.

On a alors

$$f = (f \cdot \overline{S})S \in SI^\infty(E)$$

donc

$$I_S \subset SI^\infty(E). \quad \blacksquare$$

Corollaire 2.2. *Soit E un fermé du cercle et soit S_ν une fonction intérieure singulière telle que* $\mathrm{Supp}(\nu) \subset E$. *Alors $S_\nu \cdot I^\infty(E) \subset I^\infty(E)$ est fermé et l'application $f \mapsto \overline{S_\nu} f$ est continue de $S_\nu \cdot I^\infty(E)$ sur $I^\infty(E)$.*

Démonstration: D'après le Corollaire 2.1, $S_\nu \cdot I^\infty(E) \subset I^\infty(E)$ et l'application $f \mapsto S_\nu f$ est continue sur $I^\infty(E)$.

On a $S_\nu \cdot I^\infty(E) \subset (S_\nu \cdot I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))) \cap I^\infty(E)$.

Soit $f = S_\nu g \in (S_\nu \cdot I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))) \cap I^\infty(E)$ et soit $\lambda \in E \backslash \mathrm{Supp}(\nu)$. Alors S_ν est continue et de module 1 au voisinage de λ. Comme f est plate en λ, g l'est également. On a donc

$$S_\nu \cdot I^\infty(E) = S_\nu \cdot I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)) \cap I^\infty(E).$$

D'après le Théorème 2.1, on obtient

$$S_\nu \cdot I^\infty(E) = \{f \in I^\infty(E)/f \cdot S_\nu^* = 0\}$$

donc $S_\nu \cdot I^\infty(E)$ est fermé dans $\mathcal{B}$.

Soit $\varphi : S_\nu \cdot I^\infty(E) \to I^\infty(E)$ l'application $f \longmapsto f\overline{S_\nu}$. Si $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et si $((\varphi(f_n))_{n\geq 0}$ admet une limite b au sens de la topologie de $\mathcal{B}$, alors comme $\varphi(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans L^∞, $b = 0$ et la continuité résulte du théorème du graphe fermé. ■

On obtient alors le résultat de division suivant:

Théorème 2.2. *Soit $E \subset \Gamma$ un fermé contenant* $\mathrm{Supp}(\nu)$. *Alors $J(E) = S_\nu J(E)$ et les applications $f \mapsto S_\nu f$ et $f \mapsto \overline{S_\nu} f$ sont continues sur $J(E)$.*

Démonstration: Comme $J(E) \subset I^\infty(E)$, la continuité sur $J(E)$ de l'application $f \mapsto S_\nu f$ résulte du Corollaire 2.1.

On remarque que $S_\nu J(E) \subset I^\infty(E)$ est un idéal de $\mathcal{B}$. Soit $f \in J(E)$ et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}$ nulles au voisinage de E telles que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$. Alors $S_\nu f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S_\nu f$. Comme $S_\nu f_n$ est nulle au voisinage de E pour tout $n \geq 1$, $S_\nu f \in J(E)$ et $S_\nu J(E) \subset J(E)$.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $J(E)$ telle que

$$S_\nu f_n \underset{n\to+\infty}{\to} g \text{ avec } g \in \mathcal{B}.$$

Comme $S_\nu I^\infty(E)$ est fermé, $g \in S_\nu I^\infty(E)$. Alors, d'après le Corollaire 2.2

$$f_n = \overline{S_\nu} S_\nu f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{S_\nu} g \in I^\infty(E).$$

Donc $\overline{S_\nu} g = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \in J(E)$ et $g \in S_\nu \cdot J(E)$. Donc $S_\nu J(E)$ est un idéal fermé de $\mathcal{B}$.

Mais $|S_\nu| = 1$ sur $\Gamma\backslash E$ donc $h(S_\nu J(E)) = h(J(E)) = E$ et d'après (1.5), on obtient

$$J(E) \subset S_\nu J(E).$$

Donc $J(E) = S_\nu J(E)$. La continuité de l'application $f \mapsto \overline{S_\nu} f$ sur $J(E)$ résulte alors du Corollaire 2.2. ■

3. Propriétés de division et d'approximation dans $\mathcal{B}$ à l'aide de fonctions extérieures

Il résulte de (1.2) que si $f \in \mathcal{B}$ est plate au rang k en λ, alors $\frac{f}{(\alpha-\lambda)^k} \in \mathcal{B}$. On dispose d'un résultat de division plus général lorsque f est plate sur un ensemble C de Carleson.

Posons, pour $z \in D$

$$\delta(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log(\tilde{d}(e^{i\theta}, C))\, d\theta\right]$$

où le rapport $\frac{\tilde{d}(e^{it},C)}{\mathrm{d}(e^{it},C)}$ et son inverse sont bornés sur $\Gamma\backslash C$ et où $\tilde{d}(e^{it}, C)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Gamma\backslash C$.

On choisit $\tilde{d}(e^{it}, C) = (\beta_\nu - t)(t-\alpha_\nu)$, où α_ν et β_ν sont les arguments des extrémités des arcs du complémentaire de C et où τ_ν est la longueur de ces arcs, quand $t \in (\alpha_\nu, \beta_\nu)$.

Alors δ est une fonction extérieure qui s'étend par continuité à $\overline{D}$ et le rapport $\frac{\log|\delta(e^{it})|}{\log \mathrm{d}(e^{it},C)}$ et son inverse sont bornés. On a alors la propriété:

Proposition 3.1. *Soient $f \in \mathcal{B}$, plate sur un ensemble de Carleson C, et δ la fonction précédente associée à C.*

Alors $\frac{f}{\delta}$ est plate sur C et $\frac{f}{\delta} \in \mathcal{B}$.

Démonstration: Il est immédiat de constater que le quotient de fonctions $\frac{f}{\delta}$ définit une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma\backslash C)$, qui s'étend par continuité en une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ plate sur C.

Pour vérifier que $\frac{f}{\delta}$ est un élément de $\mathcal{B}$, remarquons que $\frac{1}{\delta}$ qui est analytique dans D et appartient à la classe de Smirnov définit une hyperfonction nulle sur $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$ et appartenant à $\mathcal{B}^*$. Le Lemme 2.1 indique alors que l'on a pour $k \geq 1$

$$\sum_{n<0}\left|\widehat{f\cdot\left(\frac{1}{\delta}\right)}(n)\right| e^{k\sqrt{|n|}} < +\infty.$$

Dans ce qui suit, on identifie de même qu'en (1.2) une fonction de $L^1(\Gamma)$ à l'hyperfonction ayant les mêmes coefficients de Fourier. On va montrer que l'hyperfonction $f \cdot \frac{1}{\delta}$ coincide avec l'hyperfonction associée à la fonction g définie par

$$g(e^{it}) = \frac{f(e^{it})}{\delta(e^{it})}.$$

Notons h l'hyperfonction $f \cdot \frac{1}{\delta} - g$.

Considérons (cf. (1.22)) une fonction θ extérieure et plate sur C. Le produit $\theta\delta$ est donc une fonction de A^∞, extérieure et plate sur C. On remarque que l'on a, au sens du produit d'une fonction par une hyperfonction l'égalité

$$(\theta\delta) \cdot h = 0.$$

On a en effet $(\theta\delta)g = \theta f$ au sens des fonctions, donc au sens de (1.20). D'autre part, d'après (1.19)

$$(\theta\delta)\left(f \cdot \frac{1}{\delta}\right) = (\theta\delta f) \cdot \frac{1}{\delta} = f\left(\theta\delta \cdot \frac{1}{\delta}\right) = f \cdot \theta 1 = f\theta.$$

Comme les coefficients de Fourier négatifs de $(\theta\delta) \cdot h^+$ sont nuls, $\theta\delta$ étant holomorphe, $[(\theta\delta) \cdot h^-]^- = 0$.

On définit alors un élément l de l'espace de Hardy usuel H^2 en posant

$$\overline{\hat{l}(n)} = \begin{cases} \hat{h}(-n-1) & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

et on a:

$$l \perp (\theta\delta)H^2.$$

Selon le théorème de Beurling, $(\theta\delta)H^2 = H^2$, ce qui implique que $l = 0$.

On en déduit que $h^- = 0$, puis que $h^+ = 0$. La fonction g et l'hyperfonction $f \cdot \frac{1}{\delta}$ ont donc les mêmes coefficients de Fourier et d'après ce qui précède, $g \in \mathcal{B}$. ■

On déduit alors d'un résultat d'approximation de [**17**] la propriété suivante.

Proposition 3.2. *Si C est un ensemble de Carleson, il existe une suite de fonctions extérieures $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

(1) *$F_k \in A^\infty$ et F_k est plate sur C $(k \geq 1)$.*
(2) *Pour toute fonction $h \in \mathcal{B}$, plate sur C, la suite $(hF_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers h dans $\mathcal{B}$.*

Démonstration: Pour $q \geq 0$, posons

$$U_q := \{f \in \mathrm{Hol}(D) / f^{(k)} \in H^\infty,\ 0 \leq k \leq q\}.$$

Il résulte de la démonstration de ([**17**, Th. 3.3, p. 1269]) qu'il existe une suite de fonction extérieures $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1) et telle que pour tout $p \geq 1$, il existe $q = q(p) \geq p + 2$ tel que

$$\|hF_k - h\|_p \to 0 \quad (h \in U_q).$$

On vérifie que cette suite satisfait les conditions de la proposition. En effet, pour $p \geq 1$, il existe $N \geq 1$ tel que $\delta^N \in U_q \subset A_{\omega_p}(\Gamma)$. Alors $\frac{f}{\delta^N} \in \mathcal{B}$ d'après la Proposition 3.1 et on a

$$\begin{aligned}\|fF_k - f\|_p &= \left\| \frac{f}{\delta^N}(\delta^N F_k - \delta^N) \right\|_p \\ &\leq \left\| \frac{f}{\delta^N} \right\|_p \|\delta^N F_k - \delta^N\|_p \to 0 \quad (k \to \infty). \ \blacksquare\end{aligned}$$

Notons que la Proposition 3.2 s'applique en particulier aux ensembles finis.

4. Étude des idéaux I tels que $A^\infty \cap I \neq \{0\}$

Lemme 4.1. *Soit I un idéal fermé de $\mathcal{B}$. Si $I \cap A^\infty \neq \{0\}$, alors $\mathcal{B} = A^\infty + I$ et $h(I)$ est un ensemble de Carleson.*

Démonstration: Puisque $I \cap A^\infty \neq \{0\}$, $J := I \cap A^\infty$ est un idéal fermé de A^∞ non réduit à $\{0\}$. On considère la surjection canonique

$$\pi : A^\infty \longrightarrow A^\infty / J$$

et l'application f_λ, $\lambda \in \overline{D}$

$$f_\lambda : z \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} & \text{si } z \neq \lambda \\ f'(\lambda) & \text{si } z = \lambda. \end{cases}$$

L'application f_λ appartient alors à A^∞ et si $f \in J$ et $f(\lambda) = 0$, on a

$$(\alpha - \lambda) f_\lambda = f.$$

Si $\lambda \in D$, on obtient $f_\lambda = (\alpha - \lambda)^{-1} f \in I \cap A^\infty = J$. On en déduit que $h(J) = \{\lambda \in \overline{D},\, f(\lambda) = 0\,(f \in J)\}$ est contenu dans Γ. Comme $\sigma(\pi(\alpha)) = h(J)$, $\pi(\alpha) - \lambda \cdot 1$ est inversible pour tout $\lambda \in D$. Comme $J \subset I$, $h(I) \subset h(J)$ et $h(I)$ est donc un ensemble de Carleson.

Soit maintenant $f \in J$, $\lambda \in D$. On a:

$$(\alpha - \lambda) f_\lambda = f - f(\lambda)$$

d'où

$$-f(\lambda)(\pi(\alpha)-\lambda)^{-1}=\pi(f_\lambda).$$

On en déduit que $\|(\pi(\alpha)-\lambda)^{-1}\|_{\omega_p}|f(\lambda)|$ est bornée et selon [**1**, Lemme 5], il existe C indépendante de p et $M_p>0$ tels que

$$\|(\pi(\alpha)-\lambda)^{-1}\|_{\omega_p}\le M_p e^{\frac{C}{1-|z|}}.$$

Ceci implique d'après une estimation classique (cf. [**5**, p. 131, Prop. 1.6]), que

$$\|\pi(\alpha)^{-n}\|_{\omega_p}=O(e^{C\sqrt{n}})\quad (n\to+\infty).$$

Pour $f\in\mathcal{B}$, on pose alors

$$\delta(f)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\pi(\alpha)^n.$$

δ est alors un homomorphisme continu et surjectif de $\mathcal{B}$ à valeurs dans A^∞/J et on a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} A^\infty \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{B} \arrow[dl, "\delta"] \arrow[d, "\theta"] \\ A^\infty/J \arrow[r, "\tilde{i}"] & \mathcal{B}/I \end{tikzcd}$$

Ici, i désigne l'injection naturelle de A^∞ dans $\mathcal{B}$, θ la surjection canonique de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}/I$ et $\tilde{i}$ l'application vérifiant $\tilde{i}\circ\pi=\theta\circ i$.

On a alors $\delta(\alpha^n)=\pi(\alpha^n)$ et $(\tilde{i}\circ\delta)(\alpha^n)=\tilde{i}(\pi(\alpha^n))=\theta(\alpha^n)$ pour $n\ge 0$. Comme $\tilde{i}\circ\delta$ et θ sont des homomorphismes, on a

$$(\tilde{i}\circ\delta)(\alpha^n)=\theta(\alpha^n)\text{ pour }n\in\mathbb{Z}.$$

Par continuité, on obtient $\tilde{i}\circ\delta=\theta$ et $\tilde{i}$ est surjective puisque θ l'est. Donc, pour $f\in\mathcal{B}$, il existe $g\in A^\infty$ tel que

$$\theta(f)=(\tilde{i}\circ\pi)(g)=\theta(g)$$

et $f-g\in I$. ■

Corollaire 4.1. *Soit I un idéal fermé de $\mathcal{B}$. Si $I\cap A^\infty\neq\{0\}$, alors*

$$I=\overline{[\bigcup_{n\le 0}\alpha^n(A^\infty\cap I)]}.$$

Démonstration: On pose $H = \overline{[\bigcup_{n\leq 0} \alpha^n(A^\infty \cap I)]}$. Alors H est un idéal fermé de $\mathcal{B}$, $H \subset I$ et $A^\infty \cap I \subset H$. D'après le lemme, $\mathcal{B} = A^\infty + H$. Soit $f \in I$. Il existe $g \in A^\infty$ et $h \in H$ tels que $f = g + h$. Comme $H \subset I$, $h \in I$ donc $g \in A^\infty \cap I \subset H$ et $f \in H$. $\blacksquare$

Pour l'énoncé suivant, on adopte les conventions $S_0 = 1$ et $I^\infty(\emptyset) = \mathcal{B}$. Pour $I \subset \mathcal{B}$, et pour $\lambda \in h(I)$, on pose $d_I(\lambda) = \sup\{n \in \mathbb{N},\ f(\lambda) = \cdots = f^{(n)}(\lambda) = 0,\ (f \in I)\}$. On note alors

$$I^{(d)} := \{f \in \mathcal{B},\ f(\lambda) = \cdots = f^{d_I(\lambda)}(\lambda) = 0,\ (\lambda \in h(I))\}.$$

On obtient le théorème suivant:

Théorème 4.1. *Soit I un idéal fermé de $\mathcal{B}$ tel que $I \cap A^\infty \neq \{0\}$. Alors $h(I)$ est un ensemble de Carleson et il existe une mesure singulière $\nu \geq 0$ avec $\mathrm{Supp}(\nu) \subset h(I)$ telle que*

$$I = I^{(d)} \cap S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)).$$

Démonstration: On a $I \subset I^{(d)}$.

Soit $J = I \cap A^\infty$. Comme $h(J) \subset \Gamma$, d'après la description de Taylor-Williams [**17**] des idéaux fermés de A^∞, il existe une mesure singulière $\nu \geq 0$ telle que

$$J = (J^{(d)} \cap A^\infty) \cap S_\nu[I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu) \cap A^\infty].$$

Si $f \in I$, on a $f = \lim_{n\to+\infty} \alpha^{-p_n} f_n$ avec $f_n \in J$. Il existe donc $g_n \in A^\infty \cap I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$ telle que $f = \lim_{n\to+\infty} S_\nu \alpha^{-p_n} g_n$. Comme $S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu) = \{g \in \mathcal{B},\ g \cdot S_\nu^* = 0\}$ est fermé dans $\mathcal{B}$, on a $f \in S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$ et $I \subset S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$. On a donc

$$I \subset I^{(d)} \cap S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)).$$

On a d'autre part $J \subset I$, donc $I^{(d)} \subset J^{(d)}$. Si $\lambda \in h(J)$ et si $p \leq d_J(\lambda)$, on a $f^{(p)}(\lambda) = 0$ pour $f \in \bigcup_{n\geq 0} \alpha^{-n} J$, donc pour toute $f \in I$ d'après le Corollaire 4.1. Donc $h(I) = h(J)$ et $I^{(d)} = J^{(d)}$. Soit $f \in I^{(d)} \cap (S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))) \cap A^\infty$. Alors $f \in J^{(d)} \cap A^\infty$ et il existe $g \in I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$ telle que $f = S_\nu g$. Donc $f \cdot S_\nu^* = 0$ et en particulier $\widehat{f \cdot \overline{S_\nu}}(n) = 0$ pour $n < 0$. Alors $g = f \cdot \overline{S_\nu} \in \mathcal{B} \cap H^2 = A^\infty$ et $f \in S_\nu[I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)) \cap A^\infty]$. Donc $f \in J$ et

$$[I^{(d)} \cap (S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))] \cap A^\infty = J = I \cap A^\infty$$

et, d'après le Corollaire 4.1

$$I = I^{(d)} \cap [S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)). \quad \blacksquare$$

Lemme 4.2. *Si $f \in A^\infty$ et $\varphi \in \mathcal{B}^*$, alors $(f \cdot \varphi)^+ - f \cdot \varphi^+ \in A^\infty(D)$.*

Démonstration: Soit $n \geq 0$. On a

$$\widehat{(f \cdot \varphi)^+}(n) - \widehat{(f \cdot \varphi^+)}(n) = \widehat{f \cdot \varphi}(n) - \sum_{p=0}^{n} \hat{f}(p)\hat{\varphi}(n-p)$$
$$= \sum_{p \geq n+1} \hat{f}(p)\hat{\varphi}(n-p).$$

Or il existe $M_1 \geq 0$ et $K \geq 0$ tels que $|\hat{\varphi}(m)| \leq M_1 |m|^K$ pour $m \leq 0$, et pour tout $l \geq 0$, il existe $M_2 \geq 0$ tel que $|\hat{f}(m)| \leq \frac{M_2}{m^{l+K+2}}$ pour $m \geq 1$. On obtient donc pour tout $n \geq 0$ et pour $l \geq 0$

$$(n+1)^l |\widehat{(f \cdot \varphi)^+}(n) - \widehat{(f \cdot \varphi^+)}(n)| \leq M_1 M_2 \sum_{p \geq n+1} \frac{(n+1)^l}{p^{l+K+2}} (p-n)^K$$
$$\leq M_1 M_2 \sum_{p \geq n+1} \frac{1}{p^{K+2}} (p-n)^K$$
$$\leq M \sum_{p \geq n+1} \frac{1}{p^2} < +\infty. \ \blacksquare$$

Pour $\varphi \in \mathcal{B}^*$, lorsque $\varphi^+ \in \mathcal{N}$, on note $S(\varphi)$ le dénominateur de φ^+ dans (1.15) et on note $\nu(\varphi)$ la mesure positive qui définit $S(\varphi)$. On a alors le théorème suivant:

Théorème 4.2. *Soit $f \in A^\infty$ et $\varphi \in \mathcal{B}^*$.*

Si $f \cdot \varphi = 0$, $f \neq 0$, alors $\varphi^+ \in \mathcal{N}$, $f \cdot S(\varphi)^* = 0$ et $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *est un ensemble de Carleson. Réciproquement, si* $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *est un ensemble de Carleson et $\varphi^+ \in \mathcal{N}$, alors*

$$\mathrm{Supp}(\nu(\varphi)) \subset \mathrm{Supp}(\varphi),\ (S(\varphi) I^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi))) \cap A^\infty \subset I_\varphi$$
$$\text{et} \quad I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \cap S(\varphi) I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu(\varphi))).$$

Démonstration: D'après la Remarque 1.3, $f\,|_{\mathrm{Supp}(\varphi)}= 0$ donc $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un ensemble de Carleson. Si $f\cdot\varphi = 0$, $f\cdot\varphi^+ = -f\cdot\varphi^-$. Pour $n \geq 0$, on a:

$$\begin{aligned}|\widehat{f\cdot\varphi^+}(n)| &= \left| -\sum_{p\geq 0} \hat{f}(p)\widehat{\varphi^-}(n-p)\right| \\ &= \left|\sum_{p\geq n+1} \hat{f}(p)\hat{\varphi}(n-p)\right| \\ &= \left|\sum_{q\geq 1} \hat{f}(n+q)\hat{\varphi}(-q)\right|.\end{aligned}$$

Il existe alors $k \geq 1$ tel que

$$|\widehat{f\cdot\varphi^+}(n)| \leq C\sum_{q\geq 1} |\hat{f}(n+q)|q^k$$

et on obtient pour tout $p \geq 1$

$$\begin{aligned}n^p|\widehat{f\cdot\varphi^+}(n)| &\leq C\sum_{q\geq 1} |\hat{f}(n+q)|q^k n^p \\ &\leq C\sum_{q\geq 1} |\hat{f}(n+q)|(n+q)^{p+k} < +\infty.\end{aligned}$$

Donc $f\cdot\varphi^+ \in A^\infty$ (ces calculs sont analogues à ceux de [**8**, Lemme 4.10]).

En particulier, $f\cdot\varphi^+$ est bornée et $\varphi^+ \in \mathcal{N}$. Posons $S = S(\varphi)$ et soit $\nu = \nu(\varphi)$. D'après (1.15), il existe F extérieure, U intérieure telles que $\varphi^+ = \frac{UF}{S}$, et telles que le $PGCD$ de U et S est égal à 1. On a $fUF = Sf\varphi^+$ donc S divise le facteur intérieur de f. D'après [**17**, Th. 4.7], f est plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. Posons $g = \frac{f}{S} \in H^2$. Comme $|S(\xi)| = 1$ pour $\xi \notin \mathrm{Supp}(\nu)$, g coincide presque partout sur Γ avec une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. Donc $g \in A^\infty \cap I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$. D'après le Théorème 2.1, on a $f\cdot S^* = 0$.

Supposons maintenant que $\varphi^+ \in \mathcal{N}$ et que $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un ensemble de Carleson. Alors d'après [**8**, Lemme 5.2], $\mathrm{Supp}(\nu(\varphi)) \subset \mathrm{Supp}(\varphi)$. Posons à nouveau $S = S(\varphi)$ et soit $f \in SI^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi)) \cap A^\infty$. Alors

$$f\cdot\frac{1}{S} = f\cdot\overline{S} \in \{g \in L^\infty(\Gamma)/|\hat{g}(n)| = 0\,(n<0)\} = H^\infty.$$

Avec les notations ci-dessus, on a $f \cdot \varphi^+ = \frac{f}{S} UF \in \mathcal{N}^+$. Mais $f \cdot \varphi^-$ est bornée sur $\Gamma \setminus \operatorname{Supp}(\varphi)$ d'après (1.14), donc $f \cdot \varphi^+$ aussi. Comme $f \cdot \varphi^+ \in \mathcal{N}^+$, $f \cdot \varphi^+ \in H^\infty$. D'après le Lemme 4.2, $(f \cdot \varphi)^+ \in H^\infty$. Donc $f \cdot \varphi$ est une distribution, et $\operatorname{Supp}(f \cdot \varphi) \subset \operatorname{Supp}(\varphi)$. D'après la Proposition 3.2, il existe une suite $(F_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $I^\infty(\operatorname{Supp}(\varphi)) \cap A^\infty$ tels que $fF_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f$ dans $\mathcal{B}$. On a donc, au sens de la convergence simple des coefficients de Fourier

$$f \cdot \varphi = \lim_{k \to +\infty} (fF_k) \cdot \varphi = \lim_{k \to +\infty} F_k(f \cdot \varphi) = 0.$$

Donc

$$SI^\infty(\operatorname{Supp}(\varphi)) \cap A^\infty \subset I_\varphi.$$

D'après le Corollaire 4.1

$$SI^\infty(\operatorname{Supp}(\varphi)) \subset I_\varphi.$$

Par ailleurs, si $f \in I_\varphi \cap A^\infty$, alors $f \cdot S^* = 0$, donc $f \in SI^\infty(\operatorname{Supp}(\nu(\varphi))) \cap A^\infty$. On a donc

$$SI^\infty(\operatorname{Supp}(\varphi)) \subset I_\varphi \subset SI^\infty(\operatorname{Supp}(\nu(\varphi))).$$

Comme $I_\varphi \cap A^\infty \neq \{0\}$, il existe d'après le Théorème 4.1 une mesure singulière $\nu_1 \geq 0$ telle que

$$S_{\nu_1} I^\infty(\operatorname{Supp}(\varphi)) \subset I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \cap S_{\nu_1} I^\infty(\operatorname{Supp}(\nu_1)).$$

Donc

$$SI^\infty(\operatorname{Supp}(\varphi)) \subset S_{\nu_1}(I^\infty(\operatorname{Supp}(\nu_1))$$

et

$$S_{\nu_1}(I^\infty(\operatorname{Supp}(\varphi)) \subset SI^\infty(\operatorname{Supp}(\nu(\varphi))).$$

De même que dans la démonstration du Théorème 4.1, on a

$$[SI^\infty(\operatorname{Supp}(\nu((\varphi))] \cap A^\infty \subset SH^\infty \text{ et } S_{\nu_1} I^\infty(\operatorname{Supp}(\nu_1) \cap A^\infty \subset S_{\nu_1} H^\infty.$$

Comme $I^\infty(\operatorname{Supp}(\varphi))$ contient des fonctions extérieures, S divise S_{ν_1} et S_{ν_1} divise S. Donc $\nu_1 = \nu(\varphi)$, ce qui achève la démonstration. ■

5. Étude des idéaux tels que $h(I)$ est un ensemble dénombrable de Γ

5.1. Cas où $h(I) = \{\lambda\}$, $\lambda \in \Gamma$.

Rappelons que pour $\lambda \in \Gamma$, on note $S_{t,\lambda}$ la fonction intérieure singulière définie par

$$S_{t,\lambda}(z) = e^{t\frac{z+\lambda}{z-\lambda}}, \quad (z \in D)$$

et $S^*_{t,\lambda}$ l'hyperfonction associée.

On notera également $S_a := \{S_{t,\lambda},\ t \in \mathbb{R}^{+*},\ \lambda \in \Gamma\}$, et $I(\lambda)$ (resp. $J(\lambda)$) les ensembles $I(\{\lambda\})$ (resp. $J(\{\lambda\})$).

Commençons par établir une propriété d'approximation pour des fonctions de synthèse en λ.

Remarquons tout d'abord que l'on peut déduire d'un résultat de [**1**] de manière analogue à [**8**] le lemme suivant:

Lemme 5.1. *Soit $p \geq 1$. Il existe $q \geq 1$ tel que pour toute fonction $\theta \in A^\infty$ plate au point λ, on a*

$$\theta \cdot S_{q,\lambda} \in J_{\omega_p}(\lambda).$$

Démonstration: Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\theta}{(\alpha-\lambda)^k} \in A^\infty$. On considère alors la surjection canonique $\pi : A_{\omega_p}(\Gamma) \to A_{\omega_p}(\Gamma)/_{J_{\omega_p}(\lambda)}$.

Comme $h(J_{\omega_p}(\lambda)) = \{\lambda\}$, $\mathrm{Spec}(\pi(\alpha)) = \{\lambda\}$ selon la Remarque 1.1. D'autre part, si T est défini par $T(\pi(f)) = \pi(\alpha f)$, on a:

$$\begin{cases} \|T^n\|_p = \|\pi(\alpha^n)\|_p = O(|n|^p) & (n > 0) \\ \|T^n\|_p = \|\pi(\alpha^n)\|_p = O(e^{p\sqrt{|n|}}) & (n \leq 0). \end{cases}$$

Si $f \in A^{p+2} := \{g \in H^\infty / g^{(i)} \in H^\infty\,(i \leq p+2)\}$, posons $f(T) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)T^n$. Posons $g = (\alpha-\lambda)^{4p+5}S_{2p^2,\lambda}$. Il résulte de [**1**, Th. 2], que $g(T) = 0$, c'est à dire que $\pi(g) = 0$. On a alors

$$\pi(\theta S_{2p^2,\lambda}) = \pi\left(\frac{\theta}{(\alpha-\lambda)^{4p+5}}\right)\pi(g) = 0. \quad \blacksquare$$

On en déduit la proposition suivante:

Proposition 5.1. *Pour toute fonction $f \in J(\lambda)$, il existe une suite $(e_p)_{p\geq 0}$ d'éléments de $J(\lambda)$ telle que, pour la topologie de $\mathcal{B}$, $f = \lim_{p\to+\infty} fe_p$.*

Démonstration: Soit $p \geq 1$. D'après la Proposition 3.2, il existe $u_p \in I^\infty(\lambda)$ tel que

$$\|f - fu_p\|_p < \frac{1}{2p}.$$

Soit $q \geq 1$ tel que $f \cdot S_{q,\lambda} \in J_{\omega_p}(\lambda)$. D'après le Théorème 2.2, $f\overline{S_{q,\lambda}} \in J(\lambda)$. Comme $J(\lambda)$ est dense dans $J_{\omega_p}(\lambda)$ d'après (1.3), il existe $v_p \in J(\lambda)$ tel que $\|u_pS_{q,\lambda} - v_p\|_p < \frac{1}{2(1+\|f\overline{S_{q,\lambda}})\|_p)}$.

Posons $e_p = \overline{S_{q,\lambda}}v_p \in J(\lambda)$.

On a alors

$$\begin{aligned}\|f - fe_p\|_p &= \|f - fu_p + f\overline{S_{q,\lambda}}S_{q,\lambda}u_p - f\overline{S_{q,\lambda}}S_{q,\lambda}e_p\|_p \\ &\leq \frac{1}{2p} + \|f\overline{S_{q,\lambda}}\|_p\|u_pS_{q,\lambda} - v_p\|_p < \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Pour $q \geq p$, on a $\|f - fe_q\|_p \leq \|f - fe_q\|_q < \frac{1}{q}$, donc $(fe_p)_{p\geq 1}$ converge vers f dans $\mathcal{B}$. ■

Lemme 5.2. *Soient ν_1 et ν_2 des mesures positives telles que $\mathcal{C} =$ Supp$(\nu_1 + \nu_2)$ soit un ensemble de Carleson. Alors, pour $\theta \in I^\infty(\mathcal{C})$, on a*

(i) $$\theta S_{\nu_1+\nu_2} \cdot S^*_{\nu_1} = 0$$

(ii) $$\theta S_{\nu_1} \cdot S^*_{\nu_1+\nu_2} = \theta \cdot S^*_{\nu_2}.$$

Démonstration: L'égalité (i) résulte immédiatement du fait que, d'après le Théorème 2.1, $I_{S_{\nu_1+\nu_2}} \subset I_{S_{\nu_1}} \cap I_{S_{\nu_2}}$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{B}^*$. L'application $f \mapsto \widehat{f\cdot\varphi}(n)$ est continue sur $\mathcal{B}$. D'autre part, l'application $f \mapsto f \cdot S_\nu$ est continue sur $I^\infty(\mathcal{C})$ d'après le Corollaire 2.1.

On considère l'ensemble L des fonctions $\theta \in I^\infty(C)$ vérifiant (ii). D'après ce qui précède, L est fermé. D'après (1.19), on a $(fg)\cdot\varphi = f \cdot (g \cdot \varphi)$ $(f, g \in \mathcal{B}, \varphi \in \mathcal{B}^*)$. L est donc un idéal de $\mathcal{B}$.

Soit $\theta \in A^\infty \cap I^\infty(\mathcal{C})$. D'après la Remarque 1.2, on a

$$(\theta S_{\nu_1}) \cdot \frac{1}{S_{\nu_1+\nu_2}} = \theta \cdot \frac{1}{S_{\nu_2}}$$

et on a dans $L^\infty(\Gamma) \subset \mathcal{B}^*$

$$(\theta S_{\nu_1}) \cdot \overline{S_{\nu_1+\nu_2}} = \theta \cdot \overline{S_{\nu_2}}.$$

On en déduit que $A^\infty \cap I^\infty(\mathcal{C}) \subset L$. Le fait que $I^\infty(\mathcal{C}) = L$ résulte alors immédiatement de la Proposition 3.2. ■

Corollaire 5.1. *Soit $\theta \in I^\infty(\lambda)$. On a pour $\lambda \in \Gamma$*

(i) $\qquad \theta S_{t,\lambda} \cdot S^*_{s,\lambda} = 0 \qquad (0 \le s < t)$

(ii) $\qquad \theta S_{t,\lambda} \cdot S^*_{s,\lambda} = \theta \cdot S^*_{s-t,\lambda} \quad (0 \le t \le s).$

En particulier

$$\langle \theta S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda}\rangle = 0 \qquad (0 \le s < t)$$

$$\textit{et} \quad \langle \theta S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda}\rangle = \langle \theta, S^*_{s-t,\lambda}\rangle \quad (0 \le t \le s).$$

Démonstration: (i) et (ii) sont des conséquences directes du lemme, en remarquant que $S^*_{0,\lambda} = 0$. On en déduit que si $f \in I^\infty(\lambda)$, on a $\langle \theta f S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda}\rangle = 0$ $(0 \le s < t)$ et $\langle \theta f S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda}\rangle = \langle \theta f, S^*_{s-t,\lambda}\rangle$ $(0 \le t \le s)$. D'après la Proposition 3.2, il existe une suite $(f_k)_{k\ge1}$ d'éléments de $I^\infty(\lambda)$ telle que $\theta f_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$. Comme l'application $g \mapsto S_{t,\lambda} g$ est continue sur $I^\infty(\lambda)$, ceci achève la démonstration du corollaire. ■

Lemme 5.3. *Soit $\lambda \in \Gamma$, $\theta \in I^\infty(\lambda)$, $s > 0$. Si $\langle \theta, S^*_{t,\lambda}\rangle = 0$ pour tout $t < s$, alors $\theta \cdot S^*_{s,\lambda} = 0$.*

Démonstration: Il résulte de [**6**, p. 150 et 151] que l'application $t \mapsto (\alpha-\lambda)^{2k+3} S_{t,\lambda}$ est une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans A_{ω_k} pour tout $k \ge 1$ et que $\|(\alpha-\lambda)^{2k+3} S_{t,\lambda}\|_{A_{\omega_k}} = O(t^k)$. Par conséquent, l'intégrale de Bochner $\int_0^{+\infty} e^{t\frac{\lambda+u}{\lambda-u}} \theta S_{t,\lambda}\, dt$ est convergente dans A^∞ pour $\theta \in I^\infty(\lambda)$ et $|u| > 1$, puisque $\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda+u}{\lambda-u}\right) < 0$. Comme les caractères commutent avec les intégrales de Bochner, on obtient par calcul direct en évaluant chacun des deux membres de l'équation en $\xi \in \Gamma$ la formule suivante (qui est une variante de la formule de la résolvante des semi-groupes analogue à celles utilisées dans [**6**, p. 150] et [**8**, Lemme 5.11])

$$(5.1) \quad (u-\lambda) f (\alpha-\lambda)(\alpha-u)^{-1} = 2\lambda \int_0^{+\infty} e^{t\frac{\lambda+u}{\lambda-u}} f S_{t,\lambda}\, dt \quad (f \in I^\infty(\lambda),\ |u| > 1).$$

Soit maintenant $\theta \in I^{\infty}(\lambda)$ vérifiant $\langle \theta, S^*_{t,\lambda} \rangle = 0$ pour $t < s$.

Soit $t \geq 0$. On a alors d'après le corollaire

$$\begin{aligned} &\langle \theta S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda} \rangle = 0 && \text{si } s \leq t \\ \text{et}\quad &\langle \theta S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda} \rangle = \langle \theta, S^*_{s-t,\lambda} \rangle && \text{si } t \leq s. \end{aligned}$$

Il résulte alors de (5.1) que

$$\begin{aligned} (u-\lambda)\langle f(\alpha-\lambda)(\alpha-u)^{-1}, S^*_{s,\lambda} \rangle &= 2\lambda \int_0^{+\infty} e^{t\frac{\lambda+u}{\lambda-u}} \langle f S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda} \rangle \, dt \\ &= 2\lambda \int_0^{s} e^{t\frac{\lambda+u}{\lambda-u}} \langle f, S^*_{s-t} \rangle \, dt = 0 \\ &\qquad\qquad (|u| > 1). \end{aligned}$$

Posons $\varphi = (\alpha-\lambda) f \cdot S^*_{s,\lambda}$. On a $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \{\lambda\}$ et $\langle (\alpha-u)^{-1}, \varphi \rangle = 0$ pour $|u| > 1$. Il résulte de (1.12) que $\varphi^- = 0$. Comme $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \{\lambda\}$, $\varphi = 0$. On obtient $(\alpha-\lambda) f \cdot S^*_{s,\lambda} = 0$. Soit $g \in I^{\infty}(\lambda)$. Comme $\frac{g}{(\alpha-\lambda)} \in \mathcal{B}$, on obtient $fg \cdot S^*_{s,\lambda} = 0$. Le fait que $f \cdot S^*_{s,\lambda} = 0$ résulte alors de la Proposition 3.2. ■

Soit I un idéal fermé de $\mathcal{B}$. En remarquant que $S^*_{0,\lambda} = 0$, on pose pour $\lambda \in \Gamma$

$$m_I(\lambda) = \sup\{t \geq 0,\ S^*_{t,\lambda} \in I^{\perp}\}, \tag{5.2}$$

et, de même que plus haut, pour $\lambda \in h(I)$

$$d_I(\lambda) = \sup\{n \in \mathbb{N} / f(\lambda) = \cdots = f^{(n)}(\lambda) = 0\, (f \in I)\}. \tag{5.3}$$

Si $m_I(\lambda) > 0$, on a $d_I(\lambda) = +\infty$ d'après le Théorème 2.1.

D'autre part, si $s < m_I(\lambda)$, il existe $t > s$ tel que $f \cdot S^*_{t,\lambda} = 0$ $(f \in I)$. Donc $f \in S_{t,\lambda} I^{\infty}(\lambda) \subset S_{s,\lambda} I^{\infty}(\lambda)$ et $f \cdot S^*_{s,\lambda} = 0$.

Si $0 < m_I(\lambda) < +\infty$, il résulte alors du Lemme 5.3 que $f \cdot S^*_{m_I(\lambda),\lambda} = 0$ (on aurait pu aussi déduire ce résultat de la continuité de l'application $t \mapsto \widehat{f \cdot S^*_{t,\lambda}}(n)$ pour $f \in I^{\infty}(\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}$, qui se vérifie facilement). On a donc pour tout idéal fermé I de $\mathcal{B}$

$$f \cdot S^*_{s,\lambda} = 0 \quad (f \in I,\ 0 \leq s \leq m_I(\lambda)). \tag{5.4}$$

On obtient alors la classification suivante:

Proposition 5.2. *Soit I idéal fermé de $\mathcal{B}$ tel que $h(I) = \{\lambda\}$. Alors*

(1) *Si $m_I(\lambda) = +\infty$, alors $I = J(\lambda) = \bigcap\limits_{t>0} S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda)$.*

(2) *Si $0 < m_I(\lambda) < +\infty$, alors $I = S_{m_I(\lambda),\lambda} \cdot I^\infty(\lambda)$.*

(3) *Si $m_I(\lambda) = 0$, alors $I = I^{d_I(\lambda)}(\lambda)$.*

Démonstration:

• $m_I(\lambda) = +\infty$.

Soit $f \in I$ et $t \geq 1$. Comme $f \cdot S^*_{t,\lambda} = 0$, on a d'après le Théorème 2.1, $f \in S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda)$. Donc $f \in \bigcap\limits_{t\geq 1} S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda)$ et $I \subset \bigcap\limits_{t>0} S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda)$. D'après le Lemme 5.1 et la relation (1.4), on a $\bigcap\limits_{t>0} S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda) \subset J(\lambda)$. Comme d'après (1.5), $J(\lambda) \subset I$, on obtient (1).

• $0 \leq m_I(\lambda) < +\infty$.

Soit $\varphi \in I^\perp$.

On a toujours $J(\lambda) \subset I$, donc $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \{\lambda\}$ et $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un ensemble de Carleson. A partir des estimations (1.13), on peut voir comme dans [**2**, Prop. 2.6] que $\varphi^+ \in \mathcal{N}$. D'après le Théorème 4.2,

$$I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \cap S(\varphi) I^\infty(\nu(\varphi))$$

donc ou bien

$$I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \supset I^\infty(\lambda)$$

ou bien il existe $t > 0$ tel que

$$I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \cap S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda) = S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda).$$

Comme $S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda) = \{f \in \mathcal{B} / f \cdot S^*_{t,\lambda} = 0\}$, $t \leq m_I(\lambda)$. On a donc dans tous les cas $S_{m_I(\lambda),\lambda} I^\infty(\lambda) \subset I$ et $I \cap A^\infty \neq 0$. D'après le Théorème 4.1, ou bien

$$I = I^{d_I(\lambda)}$$

ou bien il existe $t_1 > 0$ tel que

$$I = S_{t_1,\lambda} I^\infty(\lambda).$$

Dans le deuxième cas

$$I = \{f \in \mathcal{B} / f \cdot S^*_{t_1,\lambda} = 0\}$$

et $t_1 = m_I(\lambda) > 0$, et dans le premier cas, on a $m_I(\lambda) = 0$, et $I = I^{d_I(\lambda)}$. ■

5.2. Cas où $h(I)$ est dénombrable.

On peut maintenant donner une description des idéaux de $\mathcal{B}$ tels que $h(I)$ est une partie dénombrable de Γ.

On note

$$I^a = \{f \in \mathcal{B},\ / \forall S \in S_a \text{ telle que } S^* \in I^\perp,\ \langle f, S^* \rangle = 0\}$$

et à nouveau

$$I^{(d)} = \{f \in \mathcal{B}/f \text{ est plate à l'ordre } d_I(\lambda),\ (\lambda \in h(I))\}.$$

Théorème 5.1. *Si I est un idéal de $\mathcal{B}$ tel que $h(I)$ est dénombrable, alors*

$$I = I^a \cap I^{(d)}.$$

Démonstration: On a clairement $I \subset I^a \cap I^{(d)}$.

Soit $f \in I^a \cap I^{(d)}$. Posons $J = \{g \in \mathcal{B},\ f \cdot g \in I\}$.

On va montrer que $h(J) = \emptyset$. Soit λ un point isolé de $h(J)$. L'algèbre $\mathcal{B}$ étant régulière, il existe un élément u de $\mathcal{B}$ tel que $\lambda \notin \mathrm{Supp}(1-u)$ et $\mathrm{Supp}(u) \cap (h(J) \backslash \{\lambda\}) = \emptyset$.

Alors $u(1-u) \in J(h(J))$, et donc $u(1-u) \in J$.

Soit

$$H = \{g \in \mathcal{B},\ gu \in J\} = \{g \in \mathcal{B},\ guf \in I\}.$$

Alors $h(H) \subset h(J)$, et d'autre part, $1-u \in H$, donc $h(H) \subset \{\lambda\}$. Supposons que $d_I(\lambda) < +\infty$ et soit $g \in I$ tel que $g^{d_I(\lambda)} \neq 0$. Alors

$$\frac{f}{(\alpha-\lambda)^{d_I(\lambda)+1}} \in \mathcal{B} \text{ et } h = \frac{g}{(\alpha-\lambda)^{d_I(\lambda)+1}} \in \mathcal{B}$$

avec $h(\lambda) \neq 0$. On a

$$hf = \frac{f}{(\alpha-\lambda)^{d_I(\lambda)+1}} \quad g \in I.$$

Donc $h \in J$, ce qui contredirait le fait que $\lambda \in h(J)$. Donc $d_I(\lambda) = +\infty$ et $f \in I^\infty(\lambda)$.

Si $m_I(\lambda) = +\infty$, alors d'après (5.4) et le Lemme 5.3, on a $f \cdot S^*_{q,\lambda} = 0$ $(q \geq 1)$ et $f \in J(\lambda)$. Selon la Proposition 5.1, il existe une suite $(e_p)_{p \geq 1}$ d' éléments de $J(\lambda)$ telle que

$$f = \lim_{p \to +\infty} f e_p.$$

Comme $h(H) \subset \{\lambda\}$, $J(\lambda) \subset H$. Donc $e_p uf \in I$ et $uf \in I$.

Supposons $m_I(\lambda) < +\infty$. On considère d'abord le cas où $0 < m_I(\lambda) < +\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $g \in I$ tel que $g \cdot S^*_{m_I(\lambda)+\epsilon} \neq 0$.

Mais, selon (5.4) et le Lemme 5.3, on obtient

$$\begin{cases} g \cdot S^*_{m_I(\lambda),\lambda} = 0 \\ f \cdot S^*_{m_I(\lambda),\lambda} = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} g = S_{m_I(\lambda),\lambda} l \\ f = S_{m_I(\lambda),\lambda} h, \end{cases}$$

où l et h sont des fonctions de $I^\infty(\lambda)$. Il vient alors

$$lf = lS_{m_I(\lambda),\lambda} h = gh \in I$$

donc $l \in J \subset H$ et selon le Corollaire 5.1 $l \cdot S^*_{\epsilon,\lambda} = lS_{m_I(\lambda),\lambda} \cdot S^*_{m_I(\lambda)+\epsilon,\lambda} = gS^*_{m_I(\lambda)+\epsilon,\lambda} \neq 0$ et $m_H(\lambda) = 0$.

Dans le cas où $m_I(\lambda) = 0$, cette propriété est également vérifiée puisque $H \supset I$. Par conséquent, selon la classification de la Proposition 5.2, on a $H = I^{(p)}(\lambda)$ où $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En particulier $I^\infty(\lambda) \subset H$. Donc $(F_k)_{k\geq 1} \in H$ $(k \geq 1)$, où $(F_k)_{k\geq 1}$ est la suite d'éléments de $I^\infty(\lambda)$ donnée par la Proposition 3.2.

On a alors $F_k uf \in I$, et on en déduit à nouveau que $uf \in I$.

On a donc dans tous les cas $uf \in I$. Donc $u \in J$.

Comme $u(\lambda) = 1$, $h(J)$ ne peut pas avoir de point isolé. Comme il est dénombrable, il est nécessairement vide.

On a finalement

$$J = \mathcal{B}, \quad I = I^a \cap I^{(d)}. \quad \blacksquare$$

Remarque 5.1. En considérant l'idéal I_φ, on en déduit que les éléments φ de $\mathcal{B}^*$ de support dénombrable sont synthétisables (au sens de la Remarque 1.4) par des mesures de Dirac et leurs dérivées successives et des hyperfonctions associées à des fonctions intérieures singulières définies par des mesures de Dirac.

Références

1. A. ATZMON, Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces, *Acta Math.* **144** (1980), 27–63.
2. A. ATZMON, Operators with resolvent of bounded characteristic, *Integral Equations Operator Theory* **6**, Birkhäuser Verlag, Basel (1983), 779–803.
3. C. A. BERENSTEIN ET R. GAY, "*Complex variables, an introduction*," Graduate Text in Mathematics **125**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.
4. L. CARLESON, Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, *Acta Math.* **87** (1952), 325–345.
5. I. COLOJOARA ET C. FOIAS, "*Theory of generalized spectral operators*," Gordon and Breach, New York, 1968.
6. J. ESTERLE, Quasimultipliers, representation of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras, in "*Radical Banach algebras and automatic continuity*," (Long Beach, Calif, 1981), Lecture Notes in Mathematics **975**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983, pp. 66–162.
7. J. ESTERLE, Distributions on Kronecker sets, strong forms of uniqueness, and closed ideals of A^+, *J. Reine Angew. Math.* **450** (1994), 43–82.
8. J. ESTERLE, Closed ideals in certain Beurling algebras and synthesis of hyperdistributions, *Studia Math.* **120** (1996), 113–153.
9. J. ESTERLE, Singular inner functions and biinvariant subspaces for dissymetric weighted shifts, *J. Funct. Anal.* **144** (1997), 64–104.
10. J. ESTERLE ET A. VOLBERG, Asymptotically holomorphic functions, quasianalytic weights and shift invariant subspaces, Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux, Prépublication no. 19 (Avril 1996).
11. K. HOFFMANN, "*Banach spaces of analytic functions*," Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
12. J. P. KAHANE, "*Séries de Fourier absolument convergentes*," Erg. der Math. **50**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
13. J. P. KAHANE ET R. SALEM, "*Ensembles parfaits et séries trigonométriques*," Deuxième édition, Hermann, Paris, 1994.
14. Y. KATZNELSON, "*An introduction to Harmonic Analysis*," Wiley, Paris-New York, 1968.
15. B. KORENBLUM, Closed ideals in the rings A^n, *Functional Anal. Appl.* **6** (1972), 203–214.

16. W. Rudin, "*Real and Complex Analysis*," McGraw-Hill Mathematics series, Third Edition, New York, 1987.
17. B. A. Taylor et D. L. Williams, Ideals in ring of analytic functions with boundary values, *Canad. J. Math.* **22** (1970), 1266–1283.
18. M. Zarrabi, Contractions à spectre dénombrable et propriétes d'unicité des fermés dénombrables du cercle, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), 251–263.
19. E. H. Zerouali, Ensembles universels de synthèse pour les algèbres de Beurling, *Bull. Sci. Math.* **118** (1994), 209–223.

UFR Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
351 Cours de la libération
33 405 Talence cedex
FRANCE

e-mail: decreux@math.u-bordeaux.fr

Rebut el 2 de desembre de 1997