Publ. Mat. **45** (2001), 335–341

L'ENVELOPPE LOCALE DES PERTURBATIONS D'UNE UNION DE PLANS TOTALEMENT RÉELS QUI SE COUPENT EN UNE DROITE RÉELLE

Nguyen Quang Dieu

Abstract

In this note by using techniques similar to that of [**2**] and [**3**], we study the local polynomial convexity of perturbation of union of two totally real planes meeting along a real line.

1. Préliminaires

Soit K un compact de $\mathbf{C}^n$. On appelle enveloppe polynômiale de K le compact $\hat{K}$ défini comme l'ensemble des points a de $\mathbf{C}^n$ tels que, pour tout polynôme holomorphe P de n variables, on ait $|P(a)| \leq \underset{z\in K}{\rightarrow}$ $\max|P(z)|$. On dit que K est polynômialement convexe si $\hat{K} = K$. Pour un ensemble fermé arbitraire K dans $\mathbf{C}^n$, un point $a \in K$, on dit que K est localement polynômialement convexe (LPC) en a s'il existe une petite boule U centrée en a tel que $\overline{U} \cap K$ est polynômialement convexe.

L'objet de ce travail est une étude de la convexité polynômiale locale en 0 d'une réunion de deux graphes totalement réels M_1 et M_2 dans $\mathbf{C}^2$ qui satisfont la condition que $T_0M_1 \cap T_0M_2$ est une droite réelle, où T_0M_i est l'espace tangent de M_i en 0.

Il prolonge des résultats dans nos articles précédents [**2**] et [**3**] où nous avons étudié les cas $T_0M_1 = T_0M_2$ et $T_0M_1 \cap T_0M_2 = \{0\}$.

Dans le cas où M_1 est analytique réel, après un changement de coordonnées on peut supposer que $M_1 = \{(z,w) : w = \bar{z}\}$. Comme $T_0M_1 \cap T_0M_2$ est une droite réelle, on déduit que $T_0M_2 = \{(z,w) : w = az + b\bar{z}\}$, où a, b sont des constantes vérifiant

$$|a| = |b-1|, \ ab \neq 0.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 32E20, 46J10.
Mots-clés. Enveloppe polynômiale, convexité polynômiale locale.

Après le changement des coordonnées

$$z' = z/\alpha,\ w' = w/\bar{\alpha}$$

où α satisfait $a\alpha = (\bar{b} - 1)\bar{\alpha}$, le plan T_0M_2 devient $\{(z,w) : w' = \bar{z}' + \lambda\overline{z'} + \bar{\lambda}z'\}$ (où $\lambda = b - 1$). Alors sans perdre de généralité, on peut supposer (dans le cas où M_1 est analytique réel) que

$$(1)\quad M_1 = \{(z,w) : w = \bar{z}\},\ M_2 = \{(z,w) : w = \bar{z} + \lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z + \varphi(z)\},$$

où $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{0,-1\}$ et φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un petit voisinage de $0 \in \mathbf{C}$ satisfaisant $\varphi(0) = \partial\varphi/\partial z(0) = \partial\varphi/\partial\bar{z}(0) = 0$. Notons cette classe comme $\mathcal{C}^1(\{0\})$.

Remarquons que d'une part le seul hyperplan qui contienne $T_0M_1 \cup T_0M_2$ est défini par l'équation $\mathrm{Im}(z+w) = 0$; d'autre part l'intersection $T_0M_1 \cap T_0M_2$ est exactement la droite réelle $l = \{(z,w) : w = \bar{z},\ \lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z = 0\}$, alors la droite complexifiée $\tilde{l}$ de l définie par $\lambda w + \bar{\lambda}z = 0$ est contenue dans l'hyperplan $\mathrm{Im}(z+w) = 0$ si et seulement si $\lambda \in \mathbf{R}$.

Lorsque $\lambda \notin \mathbf{R}$, on conjecture que la réunion $M_1 \cup M_2$ est toujours LPC en 0. Les Propositions 2.2 et 2.3 sont des résultats partiels dans cette direction. Des résultats similaires sont sans doute déjà connus par les spécialistes du sujet, comme l'avait indiqué Franc Forstneric à Pascal Thomas en 1993.

Le lemme suivant, dû essentialement à E. Kallin (voir [**1**], [**4**]) est très utile pour montrer la convexité polynômiale de réunions de compacts polynômialement convexes.

Lemme 1.1 (Lemme de Kallin)**.** *Soient K, L deux compacts polynômialement convexes de $\mathbf{C}^n$. On suppose qu'il existe une fonction p holomorphe dans un voisinage de $\widehat{(K\cup L)}$ satisfaisant les conditions suivantes*

(i) $\widehat{(p(K))} \cap \widehat{(p(L))} = \partial_{\mathbf{C}}\widehat{(p(K))} \cap \partial_{\mathbf{C}}\widehat{(p(L))} = \{0\}$.
(ii) $p^{-1}(0) \cap (K \cup L)$ *est polynômialement convexe.*

Alors $K \cup L$ est polynômialement convexe.

Remerciements 1. Je tiens à remercier mon directeur de recherche Pascal Thomas pour m'avoir proposé ce problème et pour ses nombreux conseils. J'ai eu des discutions très enrichissantes avec Peter DePaepe et Jan Wiegerinck, je leur en suis très reconnaissant.

Finalement, je souhaite remercier le referee pour ses critiques et ses observations.

2. Résultats

Dans cet article, on prend toujours les graphes M_1 et M_2 ayant la forme (1). Pour $r > 0$ nous posons $M_i^r = M_i \cap \{(z,w) : |z| \leq r\}$. Il est facile de voir que $M_1 \cup M_2$ est LPC en 0 si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $M_1^r \cup M_2^r$ est polynômialement convexe en 0. Ecrivons π pour la projection sur la première coordonnée dans $\mathbf{C}^2$, i.e. $\pi(z,w) = z$.

Le premier résultat concerne le cas où la partie quadratique de φ n'est pas nul. Ce résultat est dans le même esprit que la Proposition 2.1 dans [**2**] et la Proposition 3.8 dans [**3**]. Pour $\varphi(z) = a\bar{z}^2$, nous avons

Proposition 2.1. *Soit $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0,-1\}$. Alors, on a*

a) *Si $a \notin \mathbf{R}$ alors pour tout $\varphi^* \in \mathcal{C}^1(\{0\})$ satisfaisant $\varphi^*(z) = o(|z|^2)$, $M_1 \cup M_2^*$ est LPC en 0 où $M_2^* = \{(z,w) : w = \bar{z} + \lambda\bar{z} + \lambda z + a\bar{z}^2 + \varphi^*(z)\}$.*

b) *Si $a \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$ alors il existe φ^* analytique réel dans un petit voisinage de $0 \in \mathbf{C}$ satisfaisant $\varphi^*(z) = O(|z|^3)$, tel que $M_1 \cup M_2^*$ n'est pas LPC en 0.*

Démonstration: a) Définissons le polynôme suivant

$$p(z,w) = z + w + \bar{\alpha}z^2 + \alpha w^2,$$

où α sera choisi plus tard. Il est évident que pour tout α on a $p(M_1) \subset \mathbf{R}$. On va montrer que pour α bien choisi et pour $r > 0$ assez petit $p((M_2^*)^r)$ ne coupe $\mathbf{R}$ qu'en 0. En effet, d'une part on a

$$\begin{aligned} p(z, \bar{z} + \lambda\bar{z} + \lambda z + a\bar{z}^2 + \varphi^*(z)) &= (\lambda+1)(z+\bar{z}) + a\bar{z}^2 \\ &\quad + \bar{\alpha}z^2 + \alpha((\lambda+1)\bar{z} + \lambda z)^2 + o(|z|^2) \\ &= (\lambda+1)(z+\bar{z}) + (a + \alpha(\lambda+1)^2)\bar{z}^2 + (\bar{\alpha} + \alpha\lambda^2)z^2 \\ &\quad + 2\lambda(\lambda+1)\alpha|z|^2 + o(|z|^2). \end{aligned}$$

Comme $a \notin \mathbf{R}$, il existe $\alpha \notin \mathbf{R}$ tels que

$$a = \bar{\alpha}\lambda^2 - \alpha(\lambda^2 + 2\lambda), \tag{2}$$

il s'ensuit que pour $r > 0$ assez petit on a

$$\operatorname{Im} p(z, \lambda z + (\lambda+1)\bar{z} + a\bar{z}^2 + \varphi^*(z)) = 2\lambda(\lambda+1)\operatorname{Im}\alpha|z|^2 + o(|z|^2).$$

Donc que pour $r > 0$ suffisamment petit $p((M_2^*)^r) \cap \mathbf{R} = \{0\}$, d'où l'assertion. D'après le lemme de Kallin on a que $M_1 \cup M_2^*$ est LPC en 0.

b) Comme $a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, à partir de (2) on déduit que $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. On divise la démonstration en 2 étapes.

1ère étape. On montre qu'il existe φ^* analytique réel dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ satisfaisant $\varphi^*(z) = O(|z|^3)$ tel que pour $r > 0$ assez petit $M_1^r \cup (M_2^*)^r$ est contenu dans l'hypersurface $\{(z,w) : \operatorname{Im} p(z,w) = 0\}$, où p est le polynôme construit en (a). On veut trouver φ^* avec la régularité désirée et vérifiant dans un petit voisinage de 0 l'identité suivante

$$\operatorname{Im} p(z, \bar z + \lambda z + \lambda \bar z + \varphi(z) + \varphi^*(z)) \equiv 0.$$

Observons que

$$p(z, \bar z + \lambda z + \lambda \bar z + \varphi(z) + \varphi^*(z)) = a_1(z) + a_2(z)\varphi^*(z) + \alpha(\varphi^*(z))^2,$$

où $a_1(z) = p(z, \bar z + \lambda \bar z + \lambda z + \varphi(z))$, $a_2(z) = 1 + O(|z|)$. D'après le choix de α on a $\operatorname{Im} a_1(z) = O(|z|^3)$. Alors on prend $\varphi^* v(z)$ tel que

$$i \operatorname{Im} a_1(z) + a_2(z)\varphi^*(z) + \alpha(\varphi^*(z))^2 \equiv 0.$$

Il suffit de poser

$$\begin{aligned}\varphi^*(z) &= \frac{-a_2(z) + \left(a_2^2(z) - 4\alpha i \operatorname{Im} a_1(z)\right)^{1/2}}{2\alpha} \\ &= \frac{-2i \operatorname{Im} a_1(z)}{a_2(z) + \left(a_2^2(z) - 4\alpha \operatorname{Im} a_1(z)\right)^{1/2}},\end{aligned}$$

où la racine carrée est prise dans le plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. Puis, il est facile de vérifier que φ^* est la fonction désirée.

2ère étape. On prouve que la réunion $M_1 \cup M_2^*$ n'est pas LPC en 0. D'après le Lemme 2.4 dans [**2**] et ce qui a été obtenu dans l'étape précedente on voit que

$$(M_1^r \cup (M_2^*)^r)\hat{} = \underset{t \in \mathbf{R}}{\to} \cup (p^{-1}(t) \cap (M_1^r \cup (M_2^*)^r))\hat{}.$$

Pour calculer chaque terme du côté droit, il est utile de regarder sa projection sur le plan $\{w = 0\}$. Plus précisément on pose,

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &:= \pi(p^{-1}(t) \cap M_1^r) = \{z : |z| \le r,\, p(z, \bar z) = t\} \\ \gamma_2(t) &:= \pi(p^{-1}(t) \cap (M_2^*)^r) = \{z : |z| \le r, \\ &\qquad p(z, \lambda z + (\lambda+1)\bar z + \varphi(z) + \varphi^*(z)) = t\}.\end{aligned}$$

Nous affirmons qu'il existe un domaine borné dont le bord est $\gamma_1(t) \cup \gamma_2(t)$. Pour cela, on réecrit $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ de facon plus précise. Dans les coordonnées $z = (x, y)$, la courbe $\gamma_2(t)$ devient

$$\begin{aligned}\gamma_2(t) = \{(x,y) : {}&2(\lambda+1)x + 2\alpha(1+\lambda^2)(x^2 - y^2) \\ &+ 2\alpha\lambda(\lambda+1)(x^2+y^2) + o(x^2+y^2) = t\}.\end{aligned}$$

D'après le théorème des fonctions implicites on a

$$\gamma_2(t) = \{(x,y) : x = g_2(t,y) = \frac{t}{2(\lambda+1)} + \frac{\alpha(1-\lambda)}{1+\lambda}y^2 + o(|t| + y^2)\}.$$

Un raisonnement similaire (et plus facile) nous donne

$$\gamma_1(t) = \{(x,y) : x = g_1(t,y) := \frac{t}{2} + \alpha y^2 + o(|t| + y^2)\}.$$

Notons que

$$g_1(t,y) - g_2(t,y) = \frac{\lambda t}{2(\lambda+1)} + \frac{2\alpha\lambda}{1+\lambda}y^2 + o(|t| + y^2).$$

Comme $\lambda \neq 0$, on voit facilement que les deux courbes $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ se coupent exactement en 2 points pour tout t assez petit satisfaisant $\alpha t < 0$.

Donc elles entoureront un domaine borné $\Omega(t)$. Puis au vu du théorème des fonctions implicites pour les fonctions holomorphes on obtient une fonction holomorphe $q(z,t)$ dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^2$ satisfaisant $p(z, q(z,t)) \equiv t$. Finalement, il suit du principe du module maximum que pour t assez petit l'enveloppe $(p^{-1}(t) \cap (M_1^r \cup (M_2^*)^r))\widehat{}$ est le graphe de q au dessus de $\Omega(t)$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Remarque 1. On peut trouver une proposition analogue à la Proposition 2.1 en remplacant φ par une polynôme quadratique plus général. Les détails sont laissés au lecteur.

Proposition 2.2. *Soit φ une fonction à valeurs réelles dans $\mathcal{C}^1(\{0\})$. Alors $M_1 \cup M_2$ n'est pas LPC en 0 si et seulement si*

(i) *λ est réel.*

(ii) *Pour t assez proche de l'origine l'ensemble $\{z : \operatorname{Re} z = t/2,\ 2\lambda \operatorname{Re} z + \varphi(z) = 0\}$ contient au plus 1 composante connexe.*

Démonstration: Remarquons que l'application $p(z,w) = z + w$ envoie les deux graphes M_1, M_2 sur $\mathbf{R}$. Alors d'après le Lemme 2.4 dans [**2**] on voit que $M_1 \cup M_2$ est LPC en 0 si et seulement si, pour tout t assez petit l'ensemble

$$S_t = p^{-1}(t) \cap (M_1 \cup M_2)$$

est polynômialement convexe, cela est le cas si et seulement si $\pi(S_t)$ est polynômialement convexe. Notons que

$$\pi(p^{-1}(t) \cap M_1) = \{z : \operatorname{Re} z = t/2\}$$
$$\pi(p^{-1}(t) \cap M_2) = \{z : z + \bar{z} + \bar{\lambda} z + \lambda \bar{z} + \varphi(z) = t\}.$$

Il s'ensuit que

$$\pi(p^{-1}(t)\cap M_1)\cap\pi(p^{-1}(t)\cap M_2)=\{z:\operatorname{Re}z=t/2,\ \bar\lambda z+\lambda\bar z+\varphi(z)=0\}.$$

On considère deux cas:

(a) Si λ n'est pas réel, alors la courbe γ définie par l'équation $\{\lambda\bar z+\lambda z+\varphi(z)=0\}$ coupe la droite $\operatorname{Re}z=t/2$ en exactement un point pour t assez petit. Donc S_t est polynômialement convexe.

(b) Si λ est réel, alors $\pi(S_t)$ est polynômialement convexe si et seulement si l'intersection de γ et de la droite $\operatorname{Re}z=t/2$ contient au plus 1 composante connexe. D'où le résultat. □

Le dernier résultat montre la conjecture mentionnée au début de cet article, avec une forte hypothèse sur l'intersection $M_1\cap M_2$.

Proposition 2.3. *Supposons que $M_1\cap M_2$ est une courbe analytique réelle et $\lambda\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$. Alors $M_1\cup M_2$ est LPC en 0.*

Démonstration: D'abord, on observe que la condition que $M_1\cap M_2$ est une courbe analytique réelle implique que l'équation

$$\bar\lambda z+\lambda\bar z+\varphi(z)=0$$

définit une courbe analytique réelle, passant par l'origine. Il s'ensuit qu'il existe une fonction analytique réelle à valeurs réelles $h\in\mathcal{C}^1(\{0\})$ tel que

$$\bar\lambda z+\lambda\bar z+\varphi(z)=(\bar a z+a\bar z+h(z))g(z),$$

ou g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de 0 satisfaisant $ag(0)=\lambda\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$.

Ensuite, écrivons $\tilde h(z,w)$ la fonction complexifiée de h, posons

$$H(z,w)=\bar a z+aw+\tilde h(z,w).$$

Clairement H est une fonction holomorphe dans un voisinage de $0\in\mathbf{C}^2$. De plus $H(M_1)$ est contenue dans la droite réelle. On montre que pour $r>0$ suffisamment petit, $H(M_2^r)\cap\mathbf{R}=\{0\}$. En effet, pour z assez proche de l'origine, un calcul élémentaire similaire à celui de la preuve de la Proposition 2.1(a) nous donne

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Im}H(z,\ \bar z+\lambda\bar z+\bar\lambda z+\varphi(z))|\\&\qquad=|(\bar a z+a\bar z+h(z))|\,|\operatorname{Im}(ag(z))|+o(|(\bar a z+a\bar z+h(z))g(z)|).\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Im}(ag(0))\neq 0$ on déduit que pour r assez petit on a $H(M_2^r)\cap\mathbf{R}=\{0\}$. D'après le lemme de Kallin on obtient le résultat desiré. □

Voici les grandes lignes d'une autre démonstration de la Proposition 2.3 suggérée par le referee, elle permet une interprétation plus géométrique de notre résultat.

Après un changement biholomorphe (local) des coordonnées, on peut supposer que M_1 est $\mathbf{R}^2$, de plus $M_1 \cap M_2$ est la droite $x = 0$, où $z = x + iy$. Il n'est pas difficile de voir que l'application $p(z, w) = w$ envoie M_1 sur l'axe réel et M_2 sur un ensemble qui recontre l'axe réel en un seul point. D'après le lemme de Kallin on achève la démonstration.

Les résultats de cet article et nos résultats précédents [**2**], [**3**] suggèrent la conjecture suivante:

Conjecture. *Soient M_1 et M_2 des graphes totalement réels dans $\mathbf{C}^2$, dont l'intersection contient l'origine. Alors soit $M_1 \cup M_2$ est localement polynômialement convexe à l'origine, soit son enveloppe locale est une union de surfaces de Riemann.*

Références

[1] E. Kallin, Fat polynomially convex sets, in: *"Function algebras"* (Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras, Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, Ill., 1966, pp. 149–152.

[2] N. Q. Dieu, Local polynomial convexity of tangentials unions of totally real graphs in $\mathbf{C}^2$, *Indag. Math. (N.S.)* **10(3)** (1999), 349–355.

[3] N. Q. Dieu, Local hulls of unions of totally real graphs lying in real analytic hypersurfaces, *Michigan Math. J.* **47(2)** (2000), 335–351.

[4] E. Stout, *"The theory of uniform algebras"*, Bogden and Quigley, Inc., Tarrytown-on-Hudson, N.Y., 1971.

Department of Mathematics
University of Education (Dai Hoc Su Pham Hanoi)
Cau Giay, Tu Liem, Hanoi
Vietnam
E-mail address: `ngquang@hn.vnn.vn`

Primera versió rebuda el 7 de juny de 2000,
darrera versió rebuda el 15 de juny de 2001.