Publ. Mat. **46** (2002), 441–451

PINCEAUX LINÉAIRES DE FEUILLETAGES SUR $\mathbb{CP}(3)$ ET CONJECTURE DE BRUNELLA

Dominique Cerveau

A mon ami Tatsuo Suwa pour son 60$^{\text{ème}}$ anniversaire

Abstract

The general element of a pencil of Cod 1 foliation in $\mathbb{CP}(3)$ either has an invariant surface or contains a subfoliation by algebraic curves.

1. Introduction

On considère sur l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}(3)$ un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ de codimension un et de degré ν. Un tel feuilletage est nécessairement singulier et se définit en coordonnées homogènes $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ par la donnée d'une 1-forme:

$$\omega = \sum_{i=0}^{3} A_i(x)\, dx_i$$

où les A_i sont des polynômes homogènes de degré $(\nu + 1)$ assujettis à satisfaire les conditions suivantes:

(i) $\quad \omega \wedge d\omega = 0 \qquad$ (intégrabilité)

(ii) $\quad \sum x_i \cdot A_i(x) = 0 \qquad$ (condition d'Euler)

(iii) $\quad \operatorname{Cod} S(\omega) \geq 2, \qquad$ avec $S(\omega) = \{A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0\}$.

L'ensemble $S(\omega)$ est le lieu singulier de ω; son projectivisé $S(\mathcal{F})$ le lieu singulier de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$.

Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les immersions maximales de surfaces $\mathcal{L}$ dont le plan tangent $T_m\mathcal{L}$ est prescrit en chaque point $m \in \mathcal{L}$ par le champ de 2 plans induit sur $\mathbb{CP}(3) - S(\mathcal{F})$ par $\omega : T_m\mathcal{L} = [\ker \omega(m)]$.

La forme ω est définie à constante multiplicative non nulle près.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 32S65.
Mots-clés. Pinceaux de feuilletages.

Ainsi l'espace $\mathcal{F}(3,\nu)$ des feuilletages de codimension un et de degré ν sur l'espace $\mathbb{CP}(3)$ s'identifie à un ouvert de Zariski d'une sous variété algébrique $\overline{\mathcal{F}(3,\nu)}$ d'un certain espace projectif, précisément le projectivisé des 1-formes ω satisfaisant (i), (ii) et (iii). Evidemment le groupe $PGL(4,\mathbb{C})$ agit sur $\overline{\mathcal{F}(3,\nu)}$ et sur chacune de ses composantes irréductibles. Il résulte du Théorème de Darboux pour les 2-formes ou de l'algèbre extérieure élémentaire, qu'un feuilletage de degré 0 est un pinceau d'hyperplans; par suite $PGL(4,\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathcal{F}(3,0)$ qui est donc irréductible. Pour $\nu \geq 1$, $\mathcal{F}(3,\nu)$ a plusieurs composantes irréductibles, deux pour $\nu = 1$, six pour $\nu = 2$, [**C-L**], ces composantes étant parfaitement connues. Pour $\nu \geq 3$ on connait une certaine liste de composantes, mais on ignore si cette liste est ou non exhaustive cf. [**C-L**], [**C-L-E**].

Un pinceau linéaire $\mathcal{F}_{\omega_t}$, $t \in \mathbb{CP}(1)$, de feuilletages de degré ν sur $\mathbb{CP}(3)$ est par définition la famille de feuilletages associées aux formes intégrables $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$, $t = (\lambda : \mu)$, où ω_1 et ω_2 satisfont la condition de transversalité $\omega_1 \wedge \omega_2 \not\equiv 0$. Un tel pinceau est finalement la donnée d'une droite projective contenue dans $\overline{\mathcal{F}(3,\nu)}$. Bien sûr on demande aux ω_t d'être de même degré, de satisfaire la condition d'Euler (ii) ainsi que la condition (iii) pour t général. La condition (i) qui doit être satisfaite par chaque feuilletage du pinceau se traduit par les trois suivantes:

$$\omega_1 \wedge d\omega_1 = \omega_2 \wedge d\omega_2 = \omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 = 0.$$

Les valeurs de t pour lesquelles la condition (iii) n'est pas satisfaite correspondent aux éléments dégénérés du pinceau. Les autres correspondent aux feuilletages génériques du pinceau; ce sont les t tels que $\mathcal{F}_{\omega_t} \in \mathcal{F}(3,\nu)$.

Pour toutes les composantes $\sum$ de $\mathcal{F}(3,\nu)$ actuellement connues on a la propriété remarquable suivante: par tout point général $\mathcal{F}_\omega$ de $\sum$ passe un pinceau linéaire, *i.e.* la variété $\overline{\sum}$ est réglée au sens naïf. Donnons en un exemple. Fixons pour celà des entiers positifs $\nu_1, \ldots, \nu_p$ tels que $\nu_1 + \cdots + \nu_p = \nu + 2$. On définit la composante $\operatorname{Log}(\nu; \nu_1, \ldots, \nu_p)$ comme le projectivisé de l'ensemble des 1-formes ω du type suivant:

$$\omega = f_1 \cdots f_p \sum \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ satisfont $\sum \lambda_i \nu_i = 0$ et les f_i sont des polynômes de degré ν_i. Il se trouve que l'adhérence $\overline{\operatorname{Log}(\nu; \nu_1, \ldots, \nu_p)}$ est une composante irréductible de $\mathcal{F}(3,\nu)$ et par chaque $\mathcal{F}_\omega$ général passe une droite (en fait beaucoup); par exemple lorsque $p \geq 3$ celle induite par $f_1 \cdots f_p \sum (\lambda_i + t\mu_i) \frac{df_i}{f_i}$ (où les μ_i satisfont $\sum \mu_i \nu_i = 0$). On peut aussi laisser fixes les λ_i et faire dépendre linéairement de t l'un des f_i; par exemple:

$$(f_1 + tg_1) f_2 \cdots f_p \left\{ \lambda_1 \frac{df_1 + tg_1}{f_1 + tg_1} + \sum_{i \geq 2} \lambda_i \frac{df_i}{f_i} \right\}.$$

La description complète de la décomposition de $\overline{\mathcal{F}(3,\nu)}$ en composantes irréductibles pour $\nu \geq 3$ semble actuellement bien inaccessible. La conjecture suivante, due à Marco Brunella, semble plus raisonnable et sa résolution serait une grande avancée dans la description qualitative des feuilletages de codimension un sur les variétés rationnelles de dimension ≥ 3 comme nous le préciserons.

Conjecture de Brunella. *Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage holomorphe de codimension un sur $\mathbb{CP}(3)$ alors on a l'alternative suivante:*

a) *$\mathcal{F}$ possède une surface invariante.*
b) *Il existe un feuilletage holomorphe G (singulier) "en courbes algébriques" contenu dans $\mathcal{F}$.*

Précisons la conjecture; le point a) signifie que $\mathcal{F}$ possède une feuille $\mathcal{L}$ dont l'adhérence ordinaire est une surface algébrique. Le point b) dit que les feuilles de G, qui sont des surfaces de Riemann, sont contenues dans celles de $\mathcal{F}$ et sont d'adhérence algébrique.

La Conjecture de Brunella est sans doute à rapprocher d'une Conjecture de Thom résolue dans [**C-C**].

Théorème (Conjecture de Thom)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un* germe *de feuilletage holomorphe de codimension un à l'origine de $\mathbb{C}^3$. Alors on a l'alternative suivante:*

a) *$\mathcal{H}$ possède un germe d'hypersurface invariante.*
b) *$\mathcal{H}$ est dicritique.*

La condition $\mathcal{H}$ dicritique équivaut à l'existence dans la résolution des singularités d'un diviseur exceptionnel transverse au transformé strict de $\mathcal{H}$; ce qui implique en particulier l'existence d'un cône analytique (réel) ouvert formé de germes de courbes analytiques contenue dans les feuilles de $\mathcal{H}$; ce qui est grosso modo la version locale optimale de b).

On peut déduire d'un travail de Gómez-Mont [**GM**] qu'un feuilletage en courbes G de $\mathbb{CP}(3)$ dont les feuilles sont d'adhérence des courbes algébriques possède deux intégrales premières rationnelles indépendantes. Par suite pour un feuilletage $\mathcal{F}$ satifaisant la partie b) de l'alternative, on construira un feuilletage $\mathcal{F}'$ sur $\mathbb{CP}(2)$ et un morphisme rationnel

$F\colon \mathbb{CP}(3) \to \mathbb{CP}(2)$ (dont la fibre générique est l'adhérence de la feuille générique de G) tels que $\mathcal{F} = F^{-1}(\mathcal{F}')$.

Si un feuilletage $\mathcal{F}$ ne satisfait pas le point b), modulo la Conjecture de Brunella, il possèdera une surface invariante et les techniques holonomiques habituelles permettront, via la description des groupes de difféomorphismes de $\mathbb{C}, 0$ de donner des renseignements qualitatifs forts concernant la nature des feuilles de $\mathcal{F}$.

Dans cet article nous établissons la Conjecture de Brunella dans le cas spécial suivant:

Théorème. *La Conjecture de Brunella est vraie pour un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(3,\nu)$ élément générique d'un pinceau linéaire.*

En fait ce théorème sera corollaire de l'énoncé suivant:

Proposition 1. *Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ un feuilletage de degré ν élément générique d'un pinceau linéaire. On a l'alternative.*

a') *Il existe une 1-forme fermée rationnelle θ telle que $d\omega = \theta \wedge \omega$.*
b') *$\mathcal{F}$ satisfait b).*

Voici comment cette proposition implique le théorème. Sous l'éventualité a') la forme θ s'avère être homogène de degré -1, en particulier possède des pôles effectifs. En fait θ s'écrit sous la forme:

$$\theta = \sum \mu_i \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{h}{f_1^{n_1}\cdots f_p^{n_p}}\right),$$

où les h, f_i sont des polynômes homogènes les $\mu_i \in \mathbb{C}$ et $n_i \in \mathbb{N}$.

Les composantes polaires $(f_i = 0)$ sont visiblement invariantes par $\mathcal{F}$ ce qui donne le point a) du théorème.

En fait il y a plus intéressant, toujours sous la condition a'): le feuilletage $\mathcal{F}$ est Liouville intégrable. En effet la 1-forme, en général multivaluée

$$\left\{ f_1^{-\mu_1}\cdots f_p^{-\mu_p} \exp \frac{-H}{f_1^{n_1}\cdots f_p^{n_p}} \right\} \cdot \omega$$

est fermée. Ses primitives, multivaluées, sont donc des intégrales premières de $\mathcal{F}$. On peut constater aussi —et c'est une autre façon de présenter l'intégrabilité Liouvillienne— que le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement affine [**G**] dans le complément de l'hypersurface $f_1\cdots f_p = 0$.

Les Paragraphes 2, 3 et 4 sont consacrés à la preuve de la proposition, la notion essentielle étant la courbure d'un pinceau. Certains points de la démonstration sont en germe dans [**C**].

2. Courbure d'un pinceau

Nous généralisons la notion de courbure introduite par Chern pour les 3 tissus [**B**]. Considérons un pinceau linéaire $\mathcal{F}_t$ défini par la famille $\omega_1 + t\omega_2$ (*i.e.* nous prenons t dans la carte affine $\mathbb{C} \subset \mathbb{CP}(1)$). La 2-forme non nulle $\omega_1 \wedge \omega_2$ est intrinséquement attachée au pinceau, *i.e.* ne dépend pas du choix de ω_1 et ω_2, tout du moins à constante multiplicative près. Cette 2-forme définit un feuilletage de dimension un G sur $\mathbb{CP}(3)$, feuilletage que l'on peut choisir saturé [**M-M**], ce qui signifie tout simplement que son ensemble singulier $S(G)$ est de codimension supérieur à deux. On notera par contre que $\omega_1 \wedge \omega_2$ s'annule sur une hypersurface, ce dont nous ne ferons pas usage ici. Suivant la terminologie de [**G**] le feuilletage G s'appelle l'axe du pinceau.

La construction de la courbure procède du même principe que l'algorithme de Godbillon-Vey auquelle elle est profondément reliée [**M**]. Comme $\omega_i \wedge d\omega_i = 0$, $i = 1, 2$, l'algèbre extérieure élémentaire nous produit deux 1-formes rationnelles homogènes θ_1 et θ_2 telles que:

$$d\omega_i = \theta_i \wedge \omega_i.$$

Bien sûr θ_i est définie modulo ω_i. Ecrivant l'intégrabilité du pinceau on obtient:

$$0 = \omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 = \omega_1 \wedge \theta_2 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \theta_1 \wedge \omega_1 = (\theta_1 - \theta_2) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Par suite il existe deux fonctions rationnelles α_1 et α_2 telles que $\theta_1 - \theta_2 = \alpha_1\omega_1 - \alpha_2\omega_2$, α_i homogène. La 1-forme rationnelle

$$\theta = \theta_1 - \alpha_1\omega_1 = \theta_2 - \alpha_2\omega_2$$

satisfait

$$(*) \qquad d\omega_i = \theta \wedge \omega_i \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

On constate que θ est l'unique 1-forme satisfaisant $(*)$ et que θ ne dépend pas du choix de ω_1 et ω_2. C'est donc un invariant du pinceau; on note aussi que θ est homogène de degré -1, *i.e.* si on écrit $\theta = \sum \theta_i \, dx_i$ les θ_i sont rationnelles homogènes de degré -1.

Par définition, *la courbure* du pinceau $\mathcal{F}_t$ est la 2-forme $d\theta$; notons que la 1-forme θ ne passe pas à l'espace projectif, mais est "cohomologue" à une 1-forme projective. Par contre $d\theta$ induit une 2-forme sur $\mathbb{CP}(3)$.

Lorsque la courbure du pinceau est nulle, *i.e.* $d\theta = 0$, nous sommes exactement dans la situation a') de la Proposition 1. Les paragraphes suivants sont donc consacrés au cas restant où la courbure est non nulle.

3. Pinceaux à courbure non nulle

Nous établissons dans ce paragraphe la proposition intermédiaire suivante:

Proposition 2. *Soit $\mathcal{F}_t$ un pinceau linéaire de feuilletages sur $\mathbb{CP}(3)$ d'axe G et à courbure non nulle. Alors le feuilletage G possède une intégrale première rationnelle non constante.*

Preuve: En différentiant $d\omega_i = \theta \wedge \omega_i$ on constate que $d\theta \wedge \omega_i = 0$. Si m est un point de $\mathbb{C}^4$ tel que $\omega_1 \wedge \omega_2(m) \neq 0$ on peut trouver des coordonnées locales (z_1, z_2, z_3, z_4) telles que au voisinage de m on ait:

$$\omega_1 = A_1\, dz_1, \quad \omega_2 = A_2\, dz_2$$

où les A_i sous des unités holomorphes. On vérifie par un calcul direct qu'au voisinage de m on a $\theta = V\, dz_1 \wedge dz_2$ avec V holomorphe; par suite θ et $\omega_1 \wedge \omega_2$ sont colinéaire, *i.e.* il existe α rationnelle telle que:

$$d\theta = \alpha\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Notons que pour des raisons de degrés α est non constante, en particulier non nulle.

De nouveau par différentiation (on suit en cela la construction de l'algorithme de Godbillon-Vey) on obtient:

$$0 = d\alpha \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 + \alpha(d\omega_1 \wedge \omega_2 - d\omega_2 \wedge \omega_1)$$

soit encore

$$0 = (d\alpha + 2\alpha\theta) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2.$$

En résulte l'existence de fonctions rationnelles K_1 et K_2 telles que:

$$\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} + \theta = K_1\omega_1 + K_2\omega_2.$$

On note au passage que la 1-forme $\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} + \theta$ passe à l'espace projectif. Notons aussi, toujours pour des raisons de degré, que les K_i sont non tous nuls ce qui permet de supposer, quitte à changer de choix de ω_1 et ω_2 dans le pinceau, que K_1 et K_2 sont non nuls. De nouveau par dérivation on obtient:

$$\begin{aligned}\alpha\omega_1 \wedge \omega_2 = d\theta &= K_1\, d\omega_1 + K_2\, d\omega_2 + dK_1 \wedge \omega_1 + dK_2 \wedge \omega_2\\ &= (K_1\theta + dK_1) \wedge \omega_1 + (K_2\theta + dK_2) \wedge \omega_2\end{aligned}$$

qui conduit par multiplication par $\wedge\omega_i$ aux deux égalités:

$$0 = \left(\theta + \frac{dK_1}{K_1}\right) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = \left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{dK_1}{K_1}\right) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$$

$$0 = \left(\theta + \frac{dK_2}{K_2}\right) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = \left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{dK_2}{K_2}\right) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2.$$

On en déduit donc que les fonctions rationnelles K_1^2/α, K_2^2/α, K_1/K_2 sont intégrales premières du feuilletage G. Il nous faut vérifier qu'elles ne sont pas toutes constantes.

Supposons que $K_1/K_2 = C_1$ et $K_2^2/\alpha = C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes non nulles (d'après ci-dessus).

On a:

$$\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} + \theta = \frac{dK_2}{K_2} + \theta = K_1\omega_1 + K_2\omega_2 = K_2(C_1\omega_1 + \omega_2).$$

Comme

$$d(C_1\omega_1 + \omega_2) = \theta \wedge (C_1\omega_1 + \omega_2) = -\frac{dK_2}{K_2} \wedge (C_1\omega_1 + \omega_2)$$

on constate que la 1-forme $K_2 \cdot (C_1\omega_1 + \omega_2)$ est fermée. Mais ceci implique que θ est fermée, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. $\square$

On note $K(G)$ le corps des intégrales premières rationnelles du feuilletage G; comme on vient de le voir, lorsque le pinceau $\mathcal{F}_t$ est à courbure non nulle, $K(G)$ ne se réduit pas aux constantes. Si $K(G)$ contient deux éléments H_1 et H_2 génériquement indépendants, c'est à dire $dH_1 \wedge dH_2 \not\equiv 0$, alors chaque feuilletage du pinceau $\mathcal{F}_t$ satisfait le point b) de la Conjecture de Brunella; en effet si L est une feuille de G, l'adhérence de L coïncide avec une fibre de $H = (H_1, H_2)$ (ou une composante irréductible de fibre).

Lorsque $K(G)$ ne contient pas deux tels éléments, il résulte du Théorème de Luröth qu'il existe un élément $H \in K(G)$ tel que $K(G) = \mathbb{C}(H)$; notons que H est nécessairement de degré 0, *i.e.* passe à l'espace projectif.

4. Pinceaux à courbure non nulle tels que $K(G) = \mathbb{C}(H)$, H non constante

Nous établissons dans ce paragraphe la

Proposition 3. *Soit $\mathcal{F}_t$ un pinceau linéaire de feuilletages sur $\mathbb{CP}(3)$ à courbure non nulle et tel que $K(G) = \mathbb{C}(H)$, H non constante. Alors $\mathcal{F}_t$ satistait le point a') de la Proposition 1,* i.e. *pour chaque élément $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ générique du pinceau il existe une 1-forme fermée rationnelle $\beta = \beta_\omega$ telle que $d\omega = \beta \wedge \omega$.*

Comme le suggère l'énoncé —et à l'inverse des pinceaux de courbure nulle où la 1-forme fermée θ ne dépend que du pinceau (et non de ω)— on constate que la forme β va dépendre de l'élément $\mathcal{F}_\omega$ du pinceau.

Démonstration de la Proposition 3: On peut choisir les générateurs ω_1 et ω_2 du pinceau tels que $\omega_1 \wedge dH$ et $\omega_2 \wedge dH$ soient non nuls.

Reprenant les notations du Paragraphe 3 on a:

$$dH \wedge d\omega_1 = dH \wedge \theta \wedge \omega_1 = dH \wedge \left(K_1\omega_1 + K_2\omega_2 - \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} \right) \wedge \omega_1.$$

En particulier:

$$\left(d\omega_1 + \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} \wedge \omega_1 \right) \wedge dH = 0.$$

Nous considérons maintenant X_1 un champ de vecteurs non nul, homogène, contenu dans le noyau de $d\omega_1 : i_{X_1}\, d\omega_1 = 0$. Par intégrabilité de ω_1 on a bien sûr $i_{X_1}\omega_1 = 0$ et

$$\frac{1}{2}\frac{X_1(\alpha)}{\alpha}\omega_1 \wedge dH + X_1(H) \left(d\omega_1 + \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} \wedge \omega_1 \right) = 0.$$

Remarquons que l'on peut supposer $X_1(H) \not\equiv 0$. En effet, si pour tout X_1 annulant $d\omega_1$, on a $X_1(H) \equiv 0$ alors on aura $d\omega_1 \wedge dH = 0$; c'est un calcul local simple. En appliquant par produit intérieur le champ d'Euler $\sum x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, on obtient $\omega_1 \wedge dH = 0$, ce qui n'a pas lieu.

On obtient in fine:

$$d\omega_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} + \alpha'\, dH \right) \wedge \omega_1 = 0$$

avec $\alpha' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{X_1(\alpha)}{\alpha X_1(H)}$.

Par différentiation il vient:

$$\begin{aligned} 0 &= d\alpha' \wedge dH \wedge \omega_1 - \left(\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} + \alpha'\, dH \right) \wedge \omega_1 \\ &= d\alpha' \wedge dH \wedge \omega_1. \end{aligned}$$

De $dH \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ et $dH \wedge \omega_i \not\equiv 0$ résulte que $0 = d\alpha' \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$ et $\alpha' \in K(G) = \mathbb{C}(H)$. Par suite la 1-forme rationnelle $\beta = -\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\alpha} - \alpha'\, dH$ est fermée et satisfait donc la Proposition 3. □

Ceci termine la démonstration de la Proposition 1 et donc du théorème. □

5. Compléments

Tout d'abord on ne peut que regretter le manque de conceptualité de la démonstration qui s'avère avant tout calculatoire. En particulier, l'usage abusif des coordonnés homogènes empêche de l'implanter sur d'autres espaces que $\mathbb{CP}(3)$. Actuellement nous ignorons si toutes les composantes de $\mathcal{F}(3,\nu)$ sont réglées —auquel cas la Conjecture de Brunella serait résolue— mais nous allons quand même déduire des faits relativement intéressants de notre théorème. Pour celà nous allons faire quelques calculs de dimension. Il est parfois commode, tout du moins en dimension 3, de présenter $\mathcal{F}(3,\nu)$ via la remarque suivante; l'opérateur $d\colon \omega \to d\omega$ réalise une bijection entre l'espace des 1-formes de degré $(\nu+1)$ satisfaisant aux conditions (i) et (ii) et l'espace des 2-formes fermées η de degré ν satisfaisant $\eta \wedge \eta = 0$. On en déduit que $\mathcal{F}(3,\nu)$ s'identifie à une intersection de quadriques dans $\mathbb{CP}(N(3,\nu)) =$ Projectivisé de l'espace des deux formes fermées de degré ν, avec $N(3,\nu) + 1 = \dfrac{(\nu+1)(\nu+3)(\nu+4)}{2}$.

Par exemple pour $\nu = 3$, premier degré où $\mathcal{F}(3,\nu)$ n'est pas complètement décrit, on a $N(3,\nu) = 83$. L'intersection de quadriques consiste à écrire dans l'espace $\mathbb{C}^{N(3,\nu)+1}$ des formes fermées η, la condition $\eta \wedge \eta \equiv 0$; comme $\eta \wedge \eta = P \cdot \mathrm{vol}$ où P est un polynôme homogène de degré $2\cdot\nu$ on doit écrire $M(3,\nu) = \dfrac{(3+2\nu)!}{3!(2\nu)!} = \dfrac{(1+\nu)(1+2\nu)(3+2\nu)}{3}$ conditions. Pour $\nu = 3$, on trouve $M(3,\nu) = 84 = N(3,\nu)+1$. Pour ν grand $M(3,\nu) \sim \frac{4}{3}\nu^3$ et $N(3,\nu) \sim \dfrac{\nu^3}{2}$ il y a donc une surdétermination énorme. Toutefois on trouve dans $\mathcal{F}(3,\nu)$ des composantes de dimension grande. Par exemple les composantes de type $\overline{\mathrm{Log}(\nu,\nu+1,1)}$ sont de dimension $\dfrac{(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{6} + 2$ qui vaut 37 pour $\nu = 3$ et asymptotiquement $\dfrac{\nu^3}{6}$, c'est à dire $\dfrac{N(3,\nu)}{3}$.

Proposition 4. *Supposons qu'il existe une composante* $\sum$ *de* $\mathcal{F}(3,\nu)$ *telle que* $\dim \sum > \dfrac{N(3,\nu)}{2}$. *Alors tout point générique* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ *de* $\sum$ *satisfait la Conjecture de Brunella; plus précisément* $\sum$ *est réglée.*

Preuve: Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\omega_1}$ un point lisse de $\sum$; comme $\dim \sum > \dfrac{N(3,\nu)}{2}$, le "plan tangent" $T_{\mathcal{F}} \sum$ à $\sum$ en $\mathcal{F}$ vu projectivement coupe $\sum$ suivant un ensemble algébrique de dimension ≥ 1; en termes de formes celà veut dire que l'on peut trouver ω_2 satisfaisant la condition d'intégrabilité

$$\omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 = 0,$$

(*i.e.* ω_2 appartient à l'espace tangent en ω_1, aux formes intégrables) et $\omega_1 + \omega_2$ est intégrable.

Finalement $\omega_1 + t\omega_2$ est intégrable pour tout t. $\square$

La Proposition 4 doit donc être interprétée comme suit: ou bien il n'y a pas de composantes de dimension supérieure à $N(3,\nu)/2$ ou bien s'il y en a on sait grosso modo en décrire les éléments génériques.

Pour terminer on peut bien sûr envisager une conjecture à la Brunella pour les feuilletages holomorphes de codimension un de $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 4$. Outre le fait que celà pose des problèmes techniques (dus au fait de l'absence de théorème de type Luröth décrivant les sous corps de fractions rationnelles en plus de une variable) c'est, somme toute d'un intérêt mineur, pour les raisons qui suivent. Considérons d'abord un feuilletage $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ de $\mathbb{CP}(n)$ et supposons qu'il existe un 3-plan $i\colon \mathbb{CP}(3) \hookrightarrow \mathbb{CP}(n)$ tel que: $d(i^*\omega) = \theta_o \wedge i^*\omega$ avec θ_o méromorphe fermée (c'est à dire $i^*\mathcal{F}$ satisfait la condition a'). Alors il existe θ méromorphe fermée sur $\mathbb{C}^n$ telle que $d\omega = \theta \wedge \omega$, *i.e.* $\mathcal{F}$ satisfait a'); c'est une conséquence du Théorème d'extension de Levi et du Théorème de Frobenius classique. Maintenant supposons que $\mathcal{F}$ ne satisfasse pas a'), donc dans les fibres d'un pinceau linéaire général en 3-plan la restriction de $\mathcal{F}$ ne satisfait pas a'). Modulo la Conjecture de Brunella dans chacune de ces fibres on fabriquera dans chaque feuille de $\mathcal{F}$ suffisemment de courbes algébriques pour obtenir une description raisonnable de $\mathcal{F}$.

Bibliographie

[B] A. Beauville, Géométrie des tissus [d'après S. S. Chern et P. A. Griffiths], in: *"Séminaire Bourbaki (1978/79)"*, Exp. No. 531, Lecture Notes in Math. **770**, Springer, Berlin, 1980, pp. 103–119.

[C-C] F. Cano et D. Cerveau, Desingularization of nondicritical holomorphic foliations and existence of separatrices, *Acta Math.* **169(1–2)** (1992), 1–103.

[C] D. Cerveau, Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés, Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992), *Astérisque* **222** (1994), 49–92.

[C-L] D. Cerveau et A. Lins Neto, Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 3$, *Ann. of Math. (2)* **143(3)** (1996), 577–612.

[C-L-E] D. Cerveau, A. Lins Neto et S. J. Edixhoven, Pull-back components of the space of holomorphic foliations on $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 3$, *J. Algebraic Geom.* **10(4)** (2001), 695–711.

[G] E. Ghys, Flots transversalement affines et tissus feuilletés, Analyse globale et physique mathématique (Lyon, 1989), *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **46** (1991), 123–150.

[GM] X. Gómez-Mont, Integrals for holomorphic foliations with singularities having all leaves compact, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **39(2)** (1989), 451–458.

[M] B. Malgrange, Frobenius avec singularités. I. Codimension un, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **46** (1976), 163–173.

[M-M] J.-F. Mattei et R. Moussu, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13(4)** (1980), 469–523.

Université de Rennes 1
Campus de Beualieu
263, Avenue du Général Leclerc
35042 Rennes Cedex
France

Primera versió rebuda el 23 de novembre de 2001,
darrera versió rebuda el 4 de març de 2002.