

SUR L'INTERSECTION DES COURANTS LAMINAIRES

ROMAIN DUJARDIN

Abstract

We try to find a geometric interpretation of the wedge product of positive closed laminar currents in \mathbb{C}^2 . We say such a wedge product is *geometric* if it is given by intersecting the disks filling up the currents.

Uniformly laminar currents do always intersect geometrically in this sense. We also introduce a class of “strongly approximable” laminar currents, natural from the dynamical point of view, and prove that such currents intersect geometrically provided they have continuous potentials.

1. Introduction

Une motivation pour l'étude du produit extérieur des courants positifs fermés au cours des années 70 était de donner un nouveau point de vue sur l'intersection des ensembles analytiques. Il apparaît que dans le cas de courants d'intégration sur des diviseurs, l'intersection pluripotentialiste et l'intersection algébro-géométrique coïncident. Ce sont des raisons analogues qui ont poussé E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie (voir [BLS, pp. 79–80]) à introduire les courants laminaires, et à étudier leur intersection potentialiste sous un angle géométrique, s'appuyant en cela sur une construction de D. Ruelle et D. Sullivan [RS]. Il y est effectivement montré que dans le cas des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 , les courants dynamiques stable et instable ont une structure laminaire et que leur produit extérieur admet une interprétation géométrique; la preuve repose de façon essentielle sur la théorie de Pesin des systèmes dynamiques non uniformément hyperboliques. Ce résultat d'intersection géométrique est utilisé pour montrer que les points périodiques de type selle sont situés dans le support de la mesure d'entropie maximale et engendrent des intersections homoclines.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 32U40, 32H50, 37Fxx.

Mots-clés. Courants laminaires, produit extérieur de courants.

Nous allons étudier ces questions sous un angle plus systématique, et retrouver ces résultats dans un cadre indépendant de toute dynamique. Ceci fournit en contrepartie une preuve des résultats de [BLS] mentionnés ci-dessus, qui n'utilise pas la théorie de Pesin.

Rappelons qu'un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ est dit *uniformément laminaire* s'il est localement un courant d'intégration sur une lamination transversalement mesurée et *laminaire* s'il est localement défini comme intégrale directe d'une famille de disques compatibles (voir la Section 2 pour plus de détails). On dira que le produit extérieur de deux courants laminaires est *géométrique* s'il est décrit par les intersections des disques constituant ces courants, avec la convention que l'intersection d'un disque avec lui-même est nulle. En particulier l'auto-intersection d'un courant laminaire est géométrique si et seulement si elle est nulle.

On ne considérera que des courants diffus, la théorie de l'intersection des courants d'intégration étant bien comprise, et tout courant positif fermé se décomposant d'après le théorème de semi-continuité de Siu en une somme de courants d'intégration et d'un courant ne chargeant pas les sous ensembles analytiques (voir [De1]).

Nous montrons à la Section 3 que le produit extérieur des courants uniformément laminaires est toujours géométrique — pourvu qu'il soit défini. Des exemples simples montrent qu'il n'est pas raisonnable d'espérer un résultat aussi général pour les courants laminaires. Les courants dynamiques apparaissant en dynamique des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 (et plus généralement, des applications birationnelles) ont toutefois une propriété supplémentaire: ils sont limites de suites de diviseurs rationnels $\frac{1}{d_n}[C_n]$ de topologie contrôlée. Nous dirons de ces courants qu'ils sont *fortement approximables* (voir la Section 4 pour une définition formelle). Notre résultat principal est le suivant:

Théorème. *Soient T_1 et T_2 des courants laminaires fortement approximables dans Ω , de potentiel continu. Alors le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ est géométrique dans Ω .*

Un corollaire de ce théorème est que tous les courants laminaires ne sont pas fortement approximables: il est aisé de trouver des exemples de courants laminaires de potentiel continu satisfaisant $T \wedge T > 0$. Ceci suggère que la classe des courants laminaires fortement approximables exhibe des propriétés intéressantes. Nous prévoyons de les étudier plus avant dans un article à venir.

Le plan de l'article est le suivant. Nous rappelons dans le premier paragraphe quelques faits concernant les courants laminaires et leur intersection. À la Section 3 nous étudions l'intersection des courants uniformément laminaires, et à la Section 4 celle des courants fortement approximables.

Cet article est issu de la thèse de doctorat [Du3] de l'auteur.

2. Définitions et quelques exemples

Nous commençons par rappeler brièvement les diverses notions de laminarité [BLS], [Ca], [Du1], [Du3] pour les courants positifs fermés. On fixe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^2$. T étant un courant positif, on notera $\text{Supp}(T)$ son support, $\mathbf{M}(T)$ sa masse, et $\|T\|$ sa mesure trace. La notation \mathbb{D} désigne le disque unité dans \mathbb{C} .

Définition 2.1.

- i) Le courant T est uniformément laminaire si pour tout $x \in \text{Supp}(T)$, il existe des ouverts $V \supset U \ni x$, tels que V soit biholomorphe au bidisque \mathbb{D}^2 et dans la carte correspondante de V , $T|_U$ soit l'intégrale directe d'une famille de courants d'intégration sur des graphes disjoints dans \mathbb{D}^2 , plus précisément:

Il existe une mesure finie μ sur $\{0\} \times \mathbb{D}$ et une famille de graphes disjoints (Γ_a) dans \mathbb{D}^2 tels que $(0, a) \in \Gamma_a$, et

$$(1) \quad T|_U = \int_{\{0\} \times \mathbb{D}} [\Gamma_a \cap U] d\mu(a).$$

- ii) Le courant T est laminaire dans Ω s'il existe une suite d'ouverts $\Omega^i \subset \Omega$ tels que $\|T\|(\partial\Omega^i) = 0$ et une suite croissante de courants $(T^i)_{i \geq 0}$, T^i uniformément laminaire dans Ω^i , telles que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^i = T.$$

Un courant uniformément laminaire est un cycle feuilleté sur une lamination par surfaces de Riemann, plongée et munie d'une mesure transverse invariante. On montre facilement (en utilisant [BLS]) que T est laminaire au sens de la Définition 2.1 si et seulement s'il est faiblement laminaire au sens de [BLS], c'est à dire que T s'écrit localement comme intégrale d'une famille mesurée de disques holomorphes *compatibles*, i.e. on a la représentation

$$(2) \quad T = \int_{\mathcal{A}} [D_a] d\mu(a),$$

où deux disques s'intersectant ont un ouvert en commun. Dans les cas que nous considérerons par la suite, $\Omega^i = \Omega \setminus \partial \mathcal{Q}_i$ où \mathcal{Q}_i est une subdivision de Ω à un ensemble de $\|T\|$ mesure nulle près. Il est important de noter que la représentation d'un courant laminaire —comme limite croissante ou intégrale d'une famille de disques— n'est jamais unique puisqu'il est toujours possible de la modifier sur un ensemble de $\|T\|$ mesure nulle. On dira qu'un courant est *diffus* s'il ne charge aucun sous ensemble analytique.

Soient T_1 et T_2 deux courants positifs fermés dans Ω . Supposons que le courant T_1 admette un potentiel u_1 dans Ω , i.e. $T_1 = dd^c u_1$ où $dd^c = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial}$. On dira que le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ est *admissible* si $u_1 \in L_{\text{loc}}^1(\|T_2\|)$. Ceci ne dépend clairement pas du choix de u_1 . On définit alors le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ par la formule usuelle

$$T_1 \wedge T_2 = dd^c(u_1 T_2)$$

qui est une mesure positive de masse localement finie. N. Sibony a montré (voir [Du3]) que le produit extérieur ainsi défini est symétrique —autrement dit $T_1 \wedge T_2$ admissible implique $T_2 \wedge T_1$ admissible et $T_1 \wedge T_2 = T_2 \wedge T_1$ — et satisfait un théorème de convergence décroissante. On voit également que si $T'_1 \leq T_1$ et $T'_2 \leq T_2$ sont des courants positifs fermés alors

$$(3) \quad T_1 \wedge T_2 \text{ admissible} \implies T'_1 \wedge T'_2 \text{ admissible et } T'_1 \wedge T'_2 \leq T_1 \wedge T_2.$$

En effet on peut localement choisir un potentiel u_i de T_i (resp. u'_i de T'_i), $i = 1, 2$, tels que $u'_i \geq u_i$.

Cette notion nous semble bien adaptée au produit extérieur des courants (uniformément) laminaires, notamment parce qu'elle est stable par restriction du domaine. On aurait cependant pu également adopter la condition d'admissibilité de [FS], qui satisfait également la relation (3).

Étant donnés deux disques holomorphes Δ_1 et Δ_2 , définissons la mesure $[\Delta_1 \cap \Delta_2]$ comme la somme des masses de Dirac aux points d'intersection de Δ_1 et Δ_2 , comptés sans multiplicité (celle-ci n'a pas d'influence sur l'intersection des courants diffus, et on aurait tout autant pu la compter) si ceux-ci sont isolés, $[\Delta_1 \cap \Delta_2] = 0$ si les deux disques ont un ouvert en commun.

Si T_1 et T_2 sont des courants *uniformément laminaires* diffus, s'écrivant dans l'ouvert U sous la forme

$$T_i = \int_{\mathcal{A}_i} [\Delta_{i,a}] d\mu_i(a), \quad i = 1, 2,$$

(où les $\Delta_{i,a}$ sont des sous variétés de U), et admettant un produit extérieur, on définit la *mesure d'intersection géométrique* dans U comme

$$T_1 \hat{\wedge} T_2 = \int_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} [\Delta_{1,a} \cap \Delta_{2,b}] d\mu_1(a) d\mu_2(b),$$

(en particulier $T_1 \hat{\wedge} T_1 = 0$) et on dira que l'intersection de T_1 et T_2 est *géométrique* dans U si $T_1 \wedge T_2 = T_1 \hat{\wedge} T_2$. Nous verrons à la section suivante que c'est en fait toujours le cas.

Soient maintenant des courants *laminaires* fermés diffus T_1 et T_2 admettant un produit extérieur. T_1 et T_2 admettent des représentations comme limites croissantes $T_k = \lim T_k^i$, avec T_k^i uniformément laminaire dans Ω_k^i ; nous dirons que ces représentations sont *compatibles* si pour tout i , $\partial\Omega_k^i$ est de $\|T_j\|$ mesure nulle, $j, k \in \{1, 2\}$. On dira que le produit extérieur de T_1 et T_2 est *géométrique* s'il existe des représentations de T_1 et T_2 comme limites croissantes comme à la Définition 2.1 telles que la suite des mesures d'intersection géométrique $T_1^i \hat{\wedge} T_2^i$ (définie dans $\Omega_1^i \cap \Omega_2^i$) croisse vers $T_1 \wedge T_2$. En particulier l'auto-intersection d'un courant laminaire est géométrique si et seulement si elle est nulle.

En termes de représentation comme intégrales de disques comme en (2), l'intersection est géométrique si et seulement si on a l'égalité

$$T_1 \wedge T_2 = \int_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} [D_a^1 \cap D_b^2] d\mu_1(a) d\mu_2(b).$$

Nous appellerons *mesure d'intersection géométrique*, le membre de droite de cette égalité, ou de façon équivalente la limite croissante des mesures $T_1^i \hat{\wedge} T_2^i$.

On voit que la mesure d'intersection géométrique est très sensible à la représentation des courants. En particulier si $T_1 \wedge T_2$ est singulière par rapport à $\|T_1\|$ et $\|T_2\|$, il est toujours possible de modifier les représentations de manière que la mesure d'intersection géométrique associée soit nulle. Il est donc essentiel de pouvoir disposer de représentations adaptées des courants laminaires. Ce sera une motivation pour l'introduction des courants fortement approximables (Définition 4.1 ci-après).

Les exemples suivants illustrent la difficulté de l'interprétation géométrique de l'intersection des courants laminaires généraux.

Exemple 2.2. Cet exemple est une manifestation du phénomène évoqué ci dessus. Soit X un compact non polaire et de mesure nulle dans \mathbb{D} , et μ une mesure à potentiel continu portée par X . Soient T^h et T^v

deux courants respectivement de supports horizontal et vertical dans \mathbb{D}^2 , définis par

$$T^h = \int_X [\mathbb{D} \times \{w\}] d\mu(w) \text{ et } T^v = \int_X [\{z\} \times \mathbb{D}] d\mu(z).$$

Bien entendu le produit $T^h \wedge T^v = \mu \otimes \mu$ est géométrique. Cependant, si on subdivise chacun des $\{z\} \times (\mathbb{D} \setminus X)$ et $(\mathbb{D} \setminus X) \times \{w\}$ en une réunion de disques disjoints, on obtient des représentations de T^h et T^v comme courants laminaires et la mesure d'intersection géométrique associée est nulle, puisque les disques ainsi construits ne se coupent pas.

De même le courant $T = T^h + T^v$ est laminaire, de potentiel continu et $T \wedge T > 0$. Cette auto-intersection n'est donc pas géométrique, et illustre le fait que des disques subordonnés au courant s'intersectent; ceci n'est pas le cas dans l'exemple suivant.

Exemple 2.3. J.-P. Demailly [De2] a introduit le courant positif fermé dans \mathbb{C}^2

$$T = dd^c \max(\log^+ |z|, \log^+ |w|)$$

qui se décompose de la façon suivante:

$$T = \int_{S^1} [\{e^{i\theta}\} \times \mathbb{D}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [\mathbb{D} \times \{e^{i\theta}\}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [V_\theta] d\lambda(\theta),$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur le cercle unité S^1 , et $V_\theta = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, z = e^{i\theta}w, |z| > 1\}$. Le courant T est donc un courant laminaire, fermé, et de potentiel continu. Le courant T se prolonge par ailleurs comme courant positif fermé de potentiel continu dans le plan projectif \mathbb{P}^2 . On montre aisément que $T \wedge T > 0$ est la mesure de Lebesgue sur le tore unité. Cette auto-intersection n'est donc pas géométrique.

Exemple 2.4. L'auto-intersection (au sens de la théorie du pluripotentiel) d'un courant laminaire ne provient pas nécessairement de l'intersection géométrique des disques ou de leurs prolongements, comme le montre l'exemple suivant. Soit un ensemble de Cantor de dimension < 1 dans le plan et G_K sa fonction de Green. On suppose que G_K est continue, et on a $G_K = 0$ sur K , $G_K > 0$ hors de K . Soit $G(z, w) = \max(G_K(z), G_K(w))$, on a

$$\text{Supp}(dd^c G) \subset \{G_K(z) = G_K(w) > 0\} \cup (K \times K).$$

Comme $\dim(K \times K) < 2$, $K \times K$ n'est pas chargé par $dd^c G$; de plus l'hypersurface

$$\{G_K(z) = G_K(w) > 0\} = \{G_K(z) - G_K(w) = 0\} \setminus (K \times K)$$

est Levi-plate, donc feuilletée par des courbes analytiques. On en déduit que le courant $dd^c G$ est laminaire, uniformément dans le complémentaire de $K \times K$ par le théorème de support de J.-P. Demailly [De1]. De plus $(dd^c G)^2$ est une mesure de probabilité portée par $K \times K$ car G est la fonction de Green pluricomplexe de $K \times K$.

Il est possible de choisir K de telle sorte que les courbes feuilletant $\{G_K(z) = G_K(w) > 0\}$ ne se prolongent pas à travers K (à l'exception de la droite $(z = w)$). Soit un point (z_0, w_0) de $K \times K$ et un disque holomorphe local $\Delta \ni (z_0, w_0)$, que l'on pourra supposer être un graphe $\Delta = \{(\zeta, \varphi(\zeta)), \zeta \in U\}$ au dessus de la première coordonnée, tel que $\Delta \setminus (K \times K) \subset \{G_K(z) = G_K(w) > 0\}$.

On a alors $\varphi(z_0) = w_0$ et sur $U \setminus K$, $G_K(z) = G_K(\varphi(z))$, relation qui par continuité s'étend à U . Quitte à se restreindre à un sous ouvert de U on peut supposer que φ n'a pas de points critiques. Il suffit donc de trouver un tel compact K n'ayant pas d'automorphismes conformes locaux, auquel cas cette relation implique $\varphi = \text{id}$. On modifie pour cela la construction de l'ensemble de Cantor triadique usuel de façon que la dimension de Hausdorff locale de K soit une fonction strictement croissante sur $K \subset [0, 1]$. Par [T, §III.16], on peut faire en sorte que la fonction de Green G_K soit continue. \square

3. Courants uniformément laminaires

Nous montrons dans cette section que le produit extérieur des courants uniformément laminaires est géométrique dès qu'il est bien défini. Nous donnons par ailleurs un critère simple assurant l'admissibilité du produit extérieur dans ce cadre. Le cas du produit de deux courants uniformément laminaires dont l'un est à potentiel continu est traité dans le Lemme 8.3 de [BLS]: leur preuve est facilement étendue au cas général puisqu'elle n'utilise qu'un argument de convergence monotone.

Théorème 3.1. *Soient T_1 et T_2 des courants uniformément laminaires diffus, tels que le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ soit admissible. Alors l'intersection $T_1 \wedge T_2$ est géométrique.*

En particulier si $T_1 \wedge T_1$ est un produit extérieur admissible, alors $T_1 \wedge T_1 = 0$.

Corollaire 3.2. *Soient T_1 et T_2 des courants laminaires, munis de représentations (compatibles) comme limites croissantes, comme à la Définition 2.1, $T_k = \lim_{i \rightarrow \infty} T_k^i$, $k=1, 2$, et tels que le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ soit admissible. Alors la mesure d'intersection géométrique ν de T_1 et T_2 est dominée par $T_1 \wedge T_2$. En particulier ν est de masse localement finie.*

Preuve du Corollaire 3.2: Rappelons que les représentations comme limite croissantes sont compatibles si les bords des ouverts Ω^i ne sont pas chargés par les courants. Soit

$$\nu^i = T_1^i \wedge T_2^i|_{\Omega_1^i \cap \Omega_2^i}$$

la mesure d'intersection géométrique des courants uniformément laminaires T_1^i et T_2^i . Dans Ω_k^i on a $T_k = T_k^i + R_k^i$, $k=1, 2$, et donc dans $\Omega_1^i \cap \Omega_2^i$ on a

$$T_1 \wedge T_2 = T_1^i \wedge T_2^i + T_1^i \wedge R_2^i + R_1^i \wedge T_2^i + R_1^i \wedge R_2^i$$

où tous les produits extérieurs sont admissibles d'après la relation (3). D'après le théorème on a l'égalité $\nu^i = T_1^i \wedge T_2^i$, et donc $\nu^i \leq T_1 \wedge T_2$. La mesure d'intersection géométrique étant la limite croissante des ν^i on conclut. \square

Preuve du Théorème 3.1: Soit $x \in \text{Supp}(T_1) \cap \text{Supp}(T_2)$, il suffit de montrer le résultat au voisinage de x . Soient respectivement \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 les laminations sous-jacentes à T_1 et T_2 . Fixons un ouvert $V \ni x$ biholomorphe à un bidisque, tel que la feuille $L_1(x)$ passant par x soit un graphe au dessus de la première coordonnée dans V . Alors pour un voisinage V' de x , et pour tout $y \in V'$, $L_1(y')$ est un graphe dans V . Ainsi on peut écrire $T_1 = T_1' + T_1''$, dans V où T_1' est le courant uniformément laminaire formé des feuilles de T_1 rencontrant V' . T_1' est fermé dans V et $T_1|_{V'} = T_1'|_{V'}$. Le produit extérieur $T_1' \wedge T_2$ est admissible et il suffit donc de montrer qu'il est géométrique. Sans perte de généralité on écrit dorénavant T_1 pour T_1' .

Dans des coordonnées adaptées dans V on a un potentiel pour T_1 de la forme

$$u_1 = \int \log |y - \psi_a(x)| d\mu_1(a),$$

et puisque $u_1 \in L^1(\|T_2\|)$, pour presque tout a , $\log |y - \psi_a(x)| \in L^1(\|T_2\|)$, c'est à dire que pour le graphe Γ_a correspondant, le produit $[\Gamma_a] \wedge T_2$ est admissible. Montrons qu'il est géométrique.

Fixons un nouveau système de coordonnées (z, w) telles que le graphe Γ_a (maintenant fixé) ait pour nouvelle équation $\{w = 0\}$. Alors

pour λ générique, quitte à réduire encore une fois V et V' , les feuilles de \mathcal{L}_2 intersectant V' sont des graphes au dessus de $\{w = 0\}$ dans le système de coordonnées $(z + \lambda w, w) = (\zeta, w)$.

On écrit $T_2 = \int_{\mathcal{B}} [D_b] d\mu_2(b)$ dans V . Notons tout d'abord que si pour un certain D_b il y a un point d'intersection non transverse dans $\Gamma_a \cap D_b$, il sera perturbé en k points d'intersection transverses en changeant légèrement b [BLS, Lemme 6.4]. Ceci signifie que quitte à retirer une quantité au plus dénombrable de paramètres $b \in \mathcal{B}$ (ce qui ne change pas T_2 puisque la mesure μ_2 est diffuse) on peut supposer toutes les intersections transverses.

On suit maintenant [BLS, Lemme 8.3]. On écrit l'équation de D_b sous la forme $w = \varphi_b(\zeta)$ et on a

$$\log |w - \varphi_b(\zeta)| = \sum_{j=1}^{N_b} \log |\zeta - p_j| + h_b(\zeta)$$

où h_b est harmonique. Soient

$$\mathcal{B}_R = \{b \in \mathcal{B}, \|h_b\|_{L^\infty} \leq R, N_b \leq R\},$$

et $u_{2,R} = \int_{\mathcal{B}_R} \log |w - \varphi_b(\zeta)| d\mu_2(b)$. On peut supposer que tous les logarithmes sont négatifs. Quand $R \rightarrow \infty$, \mathcal{B}_R croît vers \mathcal{B} et $u_{2,R}$ décroît vers u_2 . D'après le théorème de convergence monotone (standard) $u_{2,R}[\Gamma_a] \rightarrow u_2[\Gamma_a]$ et donc $dd^c u_{2,R} \wedge [\Gamma_a] \rightarrow dd^c u_2 \wedge [\Gamma_a]$. Par ailleurs le produit extérieur $dd^c u_{2,R} \wedge [\Gamma_a]$ est géométrique car le théorème de Fubini s'applique et l'intersection pluripotentialiste de deux courbes est géométrique. \square

Il est alors naturel de se poser la question suivante: sous quelles conditions le produit extérieur de deux courants uniformément laminaires est-il admissible? Il est aisé de construire des exemples de courants uniformément laminaires d'*auto-intersection* non admissible. C'est en effet le cas pour un courant d'intégration sur une courbe: dans des coordonnées (z, w) adaptées la courbe a pour équation $\{z = 0\}$ et le courant associé a pour potentiel $\log |z|$. Pour obtenir des exemples diffus, il suffit de considérer des courants de la forme $\int [z = \alpha] d\mu(\alpha)$ où μ est une mesure d'énergie infinie (i.e. $\int u d\mu = -\infty$, u étant un potentiel de μ). En considérant une seconde mesure $\mu_2 \geq 0$ telle que $\int u d\mu_2 = -\infty$, on obtient un exemple de deux courants distincts dont on ne peut pas prendre le produit extérieur.

La proposition suivante dit que ces exemples sont essentiellement les seuls.

Proposition 3.3. *Soient T_1 et T_2 des courants uniformément laminaires diffus. Supposons que les feuilles des laminations sous-jacentes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 ne se coupent qu'en des points isolés. Alors le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ est localement admissible.*

Avant de commencer la preuve, rappelons une situation géométrique simple dans laquelle le produit extérieur de deux courants est admissible: c'est le cas si $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ est un ouvert borné pseudoconvexe et T_1, T_2 sont des courants positifs fermés tels que $\text{Supp } T_1 \cap \text{Supp } T_2 \Subset \Omega$ (voir par exemple [De1], [FS]).

Preuve: Soit $x \in \text{Supp } T_1 \cap \text{Supp } T_2$; nous allons montrer qu'il y a un voisinage de x dans lequel le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ est admissible. Soient respectivement $L_1(y)$ et $L_2(y)$ les feuilles des laminations associées à T_1 et T_2 passant par y . Soit $V \ni x$ tel que $L_k(x) \cap V$, $k = 1, 2$ soient des sous-variétés de V et $L_1(x) \cap L_2(x) \cap V = \{x\}$. Alors pour $V' \ni x$ suffisamment petit, on a

$$(4) \quad \bigcup_{y \in V'} L_1(y) \cap L_2(y) \Subset V.$$

Comme dans la preuve du théorème précédent, on écrit $T_i = T'_i + T''_i$, où T'_i est le courant subordonné à T_i formé des feuilles issues de V' ; en particulier $T'_i|_{V'} = T_i|_{V'}$. La propriété (4) assure que le produit $T'_1 \wedge T'_2$ est admissible dans V . \square

4. Courants fortement approximables

On a vu à la Section 2 que la représentation des courants laminaires pose problème en vue de l'interprétation géométrique de leur produit extérieur. Ces problèmes peuvent être surmontés si on dispose d'une suite de courbes holomorphes convergeant vers le courant de manière contrôlée. C'est le cas pour les courants adhérents aux courbes entières injectives [BLS], [Ca], et pour les limites de certaines suites de diviseurs rationnels [Du1]. Rappelons que ceci entraîne la laminarité des courants invariants par les applications birationnelles de \mathbb{P}^2 . Nous ne savons pas cependant si les courants laminaires construits par H. de Thélin [dT] —qui donne un critère local de laminarité— satisfont la Définition 4.1 ci-dessous. Rappelons quelques éléments des constructions présentées dans ces travaux.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^2 . On considère une suite de sous-ensembles analytiques, éventuellement à bord, définis dans un voisinage de Ω , d'aire d_n tendant vers l'infini, et tels que $d_n^{-1}[C_n] \rightharpoonup T$. On veut obtenir les disques de T comme graphes pour une projection linéaire π . Soit L une

base de la projection orthogonale à la direction de π ; pour une subdivision \mathcal{Q} de L en carrés de taille r , on dira qu'une composante connexe de $\pi^{-1}(Q) \cap C_n$, $Q \in \mathcal{Q}$, est *bonne* si c'est un graphe au dessus de Q , *mauvaise* sinon. On retirera également en général un certain nombre de bonnes composantes afin d'assurer une propriété de compacité (critère de Montel ou borne sur l'aire). Dans les situations mentionnées plus haut, on a un contrôle en $O(d_n)$ du nombre total de mauvaises composantes, comptées avec multiplicité. Ainsi ces courants satisfont la Définition 4.1 ci-dessous.

Dans la suite, nous considérerons des subdivisions en carrés de taille r , images par une isométrie affine de la subdivision standard

$$\bigcup_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \{z \in \mathbb{C}, jr < \Re(z) < (j+1)r, kr < \Im(z) < (k+1)r\};$$

on omettra en général la mention de la base L de projection. On notera ω_1 la restriction à L de la forme Kählerienne standard de \mathbb{C}^2 , et la notation C désignera une “constante”, pouvant varier de ligne en ligne, mais toujours indépendamment de n et r .

Définition 4.1. Soit T un courant positif fermé dans Ω . T est fortement approximable s'il existe une suite (C_n) de sous ensembles analytiques définis dans un voisinage de Ω , éventuellement à bord, telles que $d_n^{-1}[C_n] \rightharpoonup T$, au moins deux projections linéaires π , et une constante C , telles que si \mathcal{Q} est une subdivision en carrés de taille r , et $T_{\mathcal{Q},n}$ désigne le courant formé des bonnes composantes de C_n au dessus de \mathcal{Q} , normalisé par d_n , on ait l'estimation

$$(5) \quad \langle d_n^{-1}[C_n] - T_{\mathcal{Q},n}, \pi^* \omega_1 \rangle \leq Cr^2.$$

Un courant satisfaisant cette définition est laminaire (nous en redonnerons une preuve ci après à la Proposition 4.4). Les courants laminaires construits dans l'article [Du1] vérifient cette définition dans tout ouvert de \mathbb{P}^2 ; nous les dirons “fortement approximables dans \mathbb{P}^2 ”. Les courants adhérents aux courbes entières injectives [BLS], [Ca], de même que les courants invariants des applications d'allure Hénon [Du2] sont également fortement approximables.

On a le théorème d'intersection géométrique (local) suivant.

Théorème 4.2. Soient T_1 et T_2 des courants fortement approximables dans Ω , de potentiel continu. Alors le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ est géométrique dans Ω .

On pourra noter que le théorème est également valable lorsqu’il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ dans lequel les courants T_1 et T_2 sont de potentiel continu et la masse de $T_1 \wedge T_2|_{\Omega'}$ soit totale dans Ω . Ceci s’applique par exemple si T_1 et T_2 sont de potentiel borné, continu hors d’un fermé pluripolaire, ou encore si les potentiels de T_1 et T_2 sont continus hors d’un nombre fini de points ou l’un au plus des T_i admet un nombre de Lelong —une situation analogue apparaît naturellement dans la dynamique de certaines applications birationnelles [Di2]—.

Corollaire 4.3. *Soit T un courant fortement approximable dans Ω , et de potentiel continu. Alors $T \wedge T = 0$ dans Ω . En particulier il existe des courants laminaires qui ne sont pas fortement approximables.*

En effet nous avons donné à la Section 2 des exemples de courants laminaires de potentiel continu et d’auto-intersection strictement positive. On sait par ailleurs qu’un courant positif fermé de \mathbb{P}^2 tel que $T \wedge T$ soit admissible est d’auto-intersection strictement positive pour des raisons homologiques [FS]. On déduit en particulier de ce corollaire que les courants laminaires de potentiel continu dans \mathbb{P}^2 —c’est le cas en particulier pour l’Exemple de Demailly 2.3— ne peuvent pas être fortement approximables.

Une autre conséquence du corollaire est le fait que pour le courant de Green T^+ d’un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 , qui est de potentiel continu dans \mathbb{C}^2 , l’auto-intersection $T^+ \wedge T^+$ est concentrée au point d’indétermination I^+ . Cet exemple montre également qu’une hypothèse sur le potentiel des courants est nécessaire dans le Théorème 4.2. Le courant considéré ici admet un nombre de Lelong strictement positif au point I^+ .

De manière plus générale, l’auto-intersection géométrique d’un courant laminaire est par définition toujours nulle, donc si T est un courant laminaire de \mathbb{P}^2 tel que $T \wedge T$ soit admissible, ce produit, qui est de masse strictement positive, n’est jamais géométrique. Il serait intéressant d’en comprendre la structure.

Comme évoqué dans l’Introduction, le Théorème 4.2 donne une approche relativement directe pour certaines propriétés fines des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . Nous renvoyons au panorama de N. Sibony [Si] pour un exposé de leurs principales propriétés. Soit par exemple f un automorphisme de Hénon de \mathbb{C}^2 , et p un point périodique de type selle, que nous supposons fixe sans perte de généralité. Alors les variétés stable et instable globales $W^s(p)$ et $W^u(p)$ sont des immersions injectives de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 . On peut associer à de telles immersions des “courants d’intégration” fermés, qui sont des limites de courants

d'intégration sur de grands disques, et sont laminaires d'après [BLS]. De plus leur structure laminaire est "limite" de celle des grands disques approximatifs. Si T^s est associé à $W^s(p)$ et normalisé, alors $\text{Supp}(T^s) \subset K^+$. D'après un théorème de Fornæss-Sibony, ceci implique $T^s = T^+$. On obtient de façon analogue $T^u = T^-$ pour un courant d'intégration sur la variété instable. Comme T^+ et T^- sont de potentiel continu et $T^+ \wedge T^- > 0$, le Théorème 4.2 s'applique et force les variétés stable et instable à se couper (transversalement). Ceci a des conséquences dynamiques (théorème homocline de Smale): par exemple p est accumulé par des points selles. Plus généralement ceci permet de retrouver directement tous les résultats du § 9 de [BLS]. La même méthode s'applique au cas des applications birationnelles (très régulières) telles que les ensembles d'indétermination de f et f^{-1} soient dans l'ensemble de Fatou ("completely separating" selon la terminologie de J. Diller [Di1, §6]).

Le Théorème 4.2 peut être également utilisé comme résultat de convergence dans des situations où la théorie du pluripotentiel est délicate d'emploi. Nous illustrons ceci sur un exemple. Soit f un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 , L et L' deux droites complexes de \mathbb{C}^2 , évitant les points d'indétermination. On a

$$(6) \quad \frac{1}{d^n} (f^n)_* [L] \rightharpoonup T^- \text{ et } \frac{1}{d^n} (f^n)^* [L] \rightharpoonup T^+.$$

On montre facilement à l'aide du théorème qu'on a la caractérisation suivante de la mesure $\mu = T^+ \wedge T^-$:

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^{2n}} [f^n(L) \cap f^n(L')].$$

Les méthodes usuelles de théorie du pluripotentiel ne permettent pas de démontrer un tel résultat à partir de (6). Il est à noter que T.-C. Dinh et N. Sibony ont récemment obtenu des résultats de convergence analogue pour une vaste classe d'applications biméromorphes en toute dimension [DiS].

Le reste de cette section sera consacré à la preuve du Théorème 4.2. Nous commençons par montrer une version quantitative de la Définition 2.1. Certains arguments peuvent être simplifiés dans le cas des courants fortement approximables dans \mathbb{P}^2 , cependant nous préférons donner le résultat dans toute sa généralité. Le théorème étant local on pourra supposer que Ω est une boule.

Proposition 4.4. *Soit T un courant laminaire fortement approximable dans Ω . Fixons $\Omega' \Subset \Omega$. Alors pour des projections linéaires distinctes π_1, π_2 comme à la Définition 4.1 et pour toutes subdivisions $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ de \mathbb{C} en carrés de taille r ,*

$$\mathcal{Q} = \{\pi_1^{-1}(s_1) \cap \pi_2^{-1}(s_2), (s_1, s_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2\}$$

est une subdivision d'un voisinage de $\overline{\Omega'}$ en 4-cubes affines et il existe un courant $T_{\mathcal{Q}} \leq T$, uniformément laminaire dans chaque $Q \in \mathcal{Q}$, tel que

$$(7) \quad \mathbf{M}_{\Omega'}(T - T_{\mathcal{Q}}) \leq Cr^2,$$

où c, C sont indépendants de r ($\mathbf{M}_{\Omega'}$ désigne la masse restreinte à Ω').

Preuve: La preuve est similaire à celle de la Proposition 3.4 de [Du1], la différence étant que l'on doit contrôler la masse simultanément dans deux directions. Un point délicat vient de ce qu'on n'a pas de contrôle sur les bonnes composantes à l'extérieur de Ω .

Soient une suite (C_n) ainsi que deux projections satisfaisant les hypothèses de la Définition 4.1. Quitte à réduire légèrement Ω , on supposera que les courants $d_n^{-1}[C_n]$ y sont de masse uniformément bornée. Considérons deux subdivisions \mathcal{S}_i de taille r et formons les courants $T_{\mathcal{S}_i, n}^i$ en retirant à $d_n^{-1}[C_n]$ les mauvaises composantes relatives à π_i et \mathcal{S}_i , ainsi que les bonnes composantes dont la restriction à Ω est de grand volume. Le nombre de ces composantes est majoré par $O(d_n)$, car la masse de $d_n^{-1}[C_n]$ est $O(d_n)$ dans Ω . Ainsi l'estimée (5) est satisfaite:

$$\langle d_n^{-1}[C_n] - T_{\mathcal{S}_i, n}^i, \pi_i^* \omega_1 \rangle \leq Cr^2, \quad i = 1, 2.$$

Pour $i = 1, 2$, le courant $T_{\mathcal{S}_i, n}^i$ est le courant d'intégration sur une courbe à bord (non connexe), dont le bord est inclus dans $\pi_i^{-1}(\partial \mathcal{S}_i)$,

$$T_{\mathcal{S}_i, n}^i = \frac{1}{d_n}[C_{\mathcal{S}_i, n}^i].$$

Considérons la subdivision \mathcal{Q} comme définie dans l'énoncé de la proposition; soit le courant

$$T_{\mathcal{Q}, n} = \frac{1}{d_n}[C_{\mathcal{S}_1, n}^1 \cup C_{\mathcal{S}_2, n}^2] =: \frac{1}{d_n}[C_{\mathcal{Q}, n}].$$

Il ne suffit de le considérer que pour les cubes $Q \in \mathcal{Q}$ tels que $Q \cap \Omega' \neq \emptyset$. Par construction $C_{\mathcal{Q}, n}$ est une courbe holomorphe à bord, dont le bord est inclus dans $\partial \mathcal{Q}$ et comme pour $i = 1, 2$,

$$d_n^{-1}[C_n] - T_{\mathcal{Q}, n} \leq d_n^{-1}[C_n] - T_{\mathcal{S}_i, n}^i,$$

on en déduit

$$\langle d_n^{-1}[C_n] - T_{Q,n}, \pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_1 \rangle \leq 2Cr^2;$$

il est par ailleurs à noter que $\pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_1$ est une forme Kählerienne.

Il reste à voir qu'une sous suite de $T_{Q,n}$ converge vers un courant T_Q , uniformément laminaire dans chaque $Q \in \mathcal{Q}$. Soit $Q \in \mathcal{Q}$, décomposons $C_{Q,n} \cap Q$ en union disjointe

$$C_{Q,n} \cap Q = (C_{S_1,n}^1 \cap Q) \cup [(C_{S_2,n}^2 \cap Q) \setminus (C_{S_1,n}^1 \cap Q)],$$

ainsi que $T_{Q,n} := T_{Q,n}|_Q = T_{Q,n}^1 + T_{Q,n}^2$ selon cette décomposition.

Toutes les courbes de $T_{Q,n}^1$ sont des restrictions à Q de sous variétés de $\pi_1^{-1}(s_1) \cap \Omega$, de volume majoré, et qui sont des graphes pour π_1 . Ainsi une valeur d'adhérence d'une suite de composantes de $T_{Q,n}^1$ est un sous ensemble analytique de Q qui est soit restriction d'un graphe pour π_1 soit inclus dans une fibre de π_1 .

On en déduit que les valeurs d'adhérence de $T_{Q,n}^1$ sont des courants uniformément laminaires. En effet soit V une limite d'une suite de composantes de T_{Q,n_j}^1 . On déduit de la discussion précédente que V est lisse. Fixons $x \in V$ et τ une petite transversale à V en x . Toutes les composantes de T_{Q,n_j}^1 coupant τ pour n_j assez grand sont des graphes au dessus d'un voisinage de x dans V car les composantes sont disjointes (lemme d'Hurwitz). De plus la masse transverse est majorée car $d_n^{-1}[C_n]$ est de masse bornée. On conclut en utilisant des arguments usuels: voir par exemple [Du1, Proposition 3.4] ou [BS5].

On fait le même raisonnement pour $T_{Q,n}^2$, et on considère une valeur d'adhérence $T_Q = T_Q^1 + T_Q^2$. Si $x \in \text{Supp}(T_Q^1) \cap \text{Supp}(T_Q^2)$, et Δ^1, Δ^2 , sont les disques correspondants passant par x , alors $\Delta^1 = \Delta^2$. En effet si x était un point isolé de $\Delta^1 \cap \Delta^2$, les disques approximatifs respectifs $\Delta_{n_j}^1$ et $\Delta_{n_j}^2$ des T_{Q,n_j}^i devraient se couper, ce qui est impossible puisque ces disques sont des bonnes composantes de C_n . Ceci montre que T_Q est uniformément laminaire. \square

Preuve du Théoreme 4.2: Soit ν la mesure $T_1 \wedge T_2$, nous supposons que $\|\nu\| \leq 1$ dans Ω . Nous allons construire une suite croissante de mesures d'intersection géométrique $\nu_Q \leq \nu$ telles que $\mathbf{M}(\nu - \nu_Q) \rightarrow 0$ quand le pas de la subdivision tend vers 0.

On dispose pour $k = 1, 2$ de subdivisions —dans le cas de courants fortement approximables dans \mathbb{P}^2 on peut choisir une subdivision commune aux deux courants— en 4-cubes affines \mathcal{Q}^k de taille comparable à r (vues comme restrictions à Ω de subdivisions de \mathbb{C}^2) telles que les

conclusions de la proposition précédente soient satisfaites pour T_k . Étant donné que les subdivisions \mathcal{S} en carrés de taille r ne sont pas fixées, pour $Z_k \in \mathbb{C}^2$, ceci vaut également pour les subdivisions $Z_k + \mathcal{Q}^k$. Sans perte de généralité on écrira dorénavant Ω pour Ω' .

Posons $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^k$ pour k valant 1 ou 2, et \mathcal{Q}_Z la subdivision translatée $\mathcal{Q} + Z$. Si Z est dans le réseau $L(\mathcal{Q})$ des sommets de \mathcal{Q} , alors $\mathcal{Q}_Z = \mathcal{Q}$. Le nombre de cubes rencontrant Ω est $\text{Card}_\Omega(\mathcal{Q}_Z) \leq C_0/r^4$, où C_0 est indépendante de Z .

Soit un nombre réel $\lambda < 1$, et pour $Q \in \mathcal{Q}$, soit Q^λ l'homothétique de Q de rapport λ par rapport à son centre. Le volume de Lebesgue $\text{Leb}(Q^\lambda)$ est $\lambda^4 \text{Leb}(Q)$. Soit $\mathcal{Q}^\lambda := \cup_{Q \in \mathcal{Q}} Q^\lambda$, $(\mathcal{Q}^\lambda)^c := \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{Q}^\lambda$,

$$\text{Leb}(\Omega \cap (\mathcal{Q}^\lambda)^c) \leq \text{Card}_\Omega(\mathcal{Q})(1 - \lambda^4) \text{Leb}(Q) \leq C(1 - \lambda^4).$$

Lemme 4.5. *Il existe $Z \in \mathbb{C}^2$ tel que $\nu(\Omega \cap (\mathcal{Q}_Z^\lambda)^c) < 2(1 - \lambda^4)$.*

Preuve: Le lemme est une conséquence simple de l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation et du théorème de Fubini. Par périodicité il suffit de considérer $Z \in \overline{\mathcal{Q}}$ pour un certain $Q \in \mathcal{Q}$. On a

$$\int_{\overline{\mathcal{Q}}} \nu(\Omega \cap (\mathcal{Q}_Z^\lambda)^c) \frac{d\text{Leb}(Z)}{\text{Leb}(Q)} = \int_{\overline{\mathcal{Q}}} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{Z + (\mathcal{Q}^\lambda)^c}(y) d\nu(y) \frac{d\text{Leb}(Z)}{\text{Leb}(Q)}$$

et $y \in Z + (\mathcal{Q}^\lambda)^c$ si et seulement si $Z \in y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c$. Donc $\mathbf{1}_{Z + (\mathcal{Q}^\lambda)^c}(y) = \mathbf{1}_{y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c}(Z)$. L'intégrale précédente vaut donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\int_{\overline{\mathcal{Q}}} \mathbf{1}_{y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c}(Z) \frac{d\text{Leb}(Z)}{\text{Leb}(Q)} \right) d\nu(y) \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Leb}(Q)} \text{Leb}((y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c) \cap Q) d\nu(y), \end{aligned}$$

et pour tout $y \in \mathbb{C}^2$, $\text{Leb}((y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c) \cap Q) = \text{Leb}(Q \setminus Q^\lambda) = (1 - \lambda^4) \text{Leb}(Q)$, par invariance par translation de la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbb{C}^2/L(\mathcal{Q})$. D'où

$$\int_{\overline{\mathcal{Q}}} \nu(\Omega \cap (\mathcal{Q}_Z^\lambda)^c) \frac{d\text{Leb}(Z)}{\text{Leb}(Q)} \leq (1 - \lambda^4)$$

et le lemme est démontré. \square

On fixe donc Z_1 et Z_2 tels que la conclusion du lemme soit respectivement satisfaite pour \mathcal{Q}^1 et \mathcal{Q}^2 , et par abus de notation, on renomme \mathcal{Q}^k la subdivision translatée $Z_k + \mathcal{Q}^k$. On applique la Proposition 4.4 aux courants T_k , et ainsi on obtient des courants $T_{k, \mathcal{Q}^k} \leq T_k$, uniformément laminaires dans chaque $Q \in \mathcal{Q}^k$, et tels que $\mathbf{M}(T_k - T_{k, \mathcal{Q}^k}) \leq Cr^2$.

Considérons la subdivision $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^1 \wedge \mathcal{Q}^2$ formée des $Q^1 \cap Q^2$, $(Q^1, Q^2) \in \mathcal{Q}^1 \times \mathcal{Q}^2$. Soient $Q \in \mathcal{Q}$ et $T_{k,Q} = T_{k,\mathcal{Q}^k}|_Q$; $T_{k,Q} \leq T_k$ donc le produit $T_{1,Q} \wedge T_{2,Q}$ est admissible dans Q (les $T_{k,Q}$ sont en fait à potentiel continu d'après [BLS, Lemme 8.2]), et est géométrique par le Théorème 3.1. Soit

$$\nu_{\mathcal{Q}} = T_{1,\mathcal{Q}} \wedge T_{2,\mathcal{Q}} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} T_{1,Q} \wedge T_{2,Q} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} T_{1,Q} \wedge T_{2,Q};$$

on a $\nu_{\mathcal{Q}} \leq \nu$ et il reste à estimer $\mathbf{M}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}})$.

On pose pour $\lambda < 1$,

$$\mathcal{Q}^\lambda = \bigcup_{(Q^1, Q^2) \in \mathcal{Q}^1 \times \mathcal{Q}^2} (Q^1)^\lambda \cap (Q^2)^\lambda,$$

(on peut avoir $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ et $(Q^1)^\lambda \cap (Q^2)^\lambda = \emptyset$). La masse se décompose alors en

$$\mathbf{M}_{\Omega}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}}) = \mathbf{M}_{\Omega \cap \mathcal{Q}^\lambda}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}}) + \mathbf{M}_{\Omega \cap (\mathcal{Q}^\lambda)^c}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}}).$$

Le deuxième terme est majoré par $4(1 - \lambda^4)$ d'après le lemme précédent. On fixe λ tel que $2(1 - \lambda^4) < \varepsilon/2$ et il reste à majorer $\mathbf{M}_{\Omega \cap \mathcal{Q}^\lambda}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}})$.

Soit $Q \in \mathcal{Q}$, alors

$$\begin{aligned} T_1 \wedge T_2 - T_{1,Q} \wedge T_{2,Q} &= (T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2 + T_{1,Q} \wedge (T_2 - T_{2,Q}) \\ &\leq (T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2 + T_1 \wedge (T_2 - T_{2,Q}). \end{aligned}$$

Par symétrie il suffit de considérer le premier terme. Soit u_2 un potentiel de T_2 dans Ω ; on va construire une fonction Q dont la restriction à chaque Q est une fonction plateau, $\chi|_Q \in C_0^\infty(Q)$, $\chi \geq 0$, $\chi = 1$ au voisinage de Q^λ , et $\|dd^c \chi\|_{L^\infty} = O(1/r^2)$.

Dans un carré de taille r dans \mathbb{C} on construit aisément une telle fonction, avec $\|d\chi_0\|_{L^\infty} \leq C/(1 - \lambda)^2 r^2$. D'où par translation une fonction χ_0 ayant les propriétés souhaitées dans une subdivision en carrés de taille r dans \mathbb{C} . Si maintenant π_i , $i = 1, \dots, 4$, sont les quatre projections linéaires correspondant aux deux subdivisions \mathcal{Q}^1 et \mathcal{Q}^2 , il suffit de poser

$$\chi = \chi_0 \circ \pi_1 \cdots \chi_0 \circ \pi_4.$$

Le paramètre λ étant fixé, $\|dd^c \chi\|_{L^\infty} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Par ailleurs

$$\mathbf{M}_{\mathcal{Q}^\lambda}((T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2) \leq \int \chi (T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2 = \int u_2 dd^c \chi \wedge (T_1 - T_{1,Q}),$$

et si c_Q est un point dans Q , on remarque que

$$\int u_2 dd^c \chi \wedge (T_1 - T_{1,Q}) = \int (u_2 - u_2(c_Q)) dd^c \chi \wedge (T_1 - T_{1,Q}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int u_2 dd^c \chi \wedge (T_1 - T_{1,Q}) &\leq C\omega(u_2, r) \mathbf{M}(T_1 - T_{1,Q}) \|dd^c \chi\|_{L^\infty} \\ &\leq C\omega(u_2, r) \frac{1}{r^2} \mathbf{M}(T_1 - T_{1,Q}), \end{aligned}$$

où $\omega(u_2, r)$ est le module de continuité de u_2 de rayon r . En prenant la somme sur $Q \in \mathcal{Q}$, et en utilisant (7) on obtient

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbf{M}_{Q^\lambda}((T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2) \leq C\omega(u_2, r),$$

soit

$$\mathbf{M}_{\Omega \cap Q^\lambda}(\nu - \nu_Q) \leq C(\omega(u_1, r) + \omega(u_2, r)).$$

Donc si r est suffisamment petit, $\mathbf{M}_\Omega(\nu - \nu_Q) < \varepsilon$.

En reproduisant inductivement le même procédé dans chaque $Q \in \mathcal{Q}$, on obtient bien une suite croissante de mesures ν_Q . \square

Remarque 4.6. On déduit de la preuve que si l'un de T_1 ou T_2 , par exemple T_1 , est uniformément laminaire, alors les termes correspondant à $(T_1 - T_{1,Q})$ sont nuls. En particulier dans ce cas l'hypothèse de potentiel continu pour T_2 est inutile. Nous avons donc montré le résultat suivant: si T_1 est un courant uniformément laminaire et à potentiel continu dans Ω , et T_2 est un courant fortement approximable quelconque, alors l'intersection $T_1 \wedge T_2$ est géométrique dans Ω .

Remarque 4.7. La preuve donne une estimation explicite de la masse de $\nu - \nu_Q$. Pour le choix $1 - \lambda = (\omega(u_1, r) + \omega(u_2, r))^{1/3}$ on obtient une majoration de $\mathbf{M}(\nu - \nu_Q)$ en $(\omega(u_1, r) + \omega(u_2, r))^{1/3}$.

Références

- [BLS] E. BEDFORD, M. LYUBICH ET J. SMILLIE, Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents, *Invent. Math.* **112**(1) (1993), 77–125.
- [BS5] E. BEDFORD ET J. SMILLIE, Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . V. Critical points and Lyapunov exponents, *J. Geom. Anal.* **8**(3) (1998), 349–383.
- [Ca] S. CANTAT, Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$, Thèse, École Normale Supérieure de Lyon (1999), *Acta Math.* **187**(1) (2001), 1–57.

- [De1] J.-P. DEMAILLY, Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, in: “*Complex analysis and geometry*”, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993, pp. 115–193.
- [De2] J.-P. DEMAILLY, Courants positifs extrêmes et conjecture de Hodge, *Invent. Math.* **69**(3) (1982), 347–374.
- [dT] H. DE THÉLIN, Sur la laminarité de certains courants, Preprint (2002).
- [Di1] J. DILLER, Dynamics of birational maps of \mathbb{P}^2 , *Indiana Univ. Math. J.* **45**(3) (1996), 721–772.
- [Di2] J. DILLER, Invariant measure and Lyapunov exponents for birational maps of \mathbb{P}^2 , *Comment. Math. Helv.* **76**(4) (2001), 754–780.
- [DiS] T.-C. DINH ET N. SIBONY, Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications, Preprint (2003).
- [Du1] R. DUJARDIN, Laminar currents in \mathbb{P}^2 , *Math. Ann.* **325**(4) (2003), 745–765.
- [Du2] R. DUJARDIN, Hénon-like mappings in \mathbb{C}^2 , *Amer. J. Math.* (à paraître).
- [Du3] R. DUJARDIN, Dynamique d'applications non polynomiales et courants laminaires, Thèse, Université de Paris Sud (2002).
- [FS] J. E. FORNÆSS ET N. SIBONY, Oka's inequality for currents and applications, *Math. Ann.* **301**(3) (1995), 399–419.
- [RS] D. RUELLLE ET D. SULLIVAN, Currents, flows and diffeomorphisms, *Topology* **14**(4) (1975), 319–327.
- [Si] N. SIBONY, Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , in: “*Dynamique et géométrie complexes*” (Lyon, 1997), Panor. Synthèses **8**, Soc. Math. France, Paris, 1999, pp. 97–185.
- [Su] D. SULLIVAN, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Invent. Math.* **36** (1976), 225–255.
- [T] M. TSUJI, “*Potential theory in modern function theory*”, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1959.

Mathématique
Bâtiment 425
Université de Paris Sud
91405 Orsay Cedex
France
E-mail address: Romain.Dujardin@math.u-psud.fr

Primera versió rebuda el 12 de març de 2003,
darrera versió rebuda el 7 d'abril de 2003.

