Publl. Mat. **50** (2006), 191–202

ENVELOPPE GALOISIENNE D'UNE APPLICATION RATIONNELLE DE $\mathbb{P}^1$

Guy Casale

Abstract

Galoisian envelope of a rational map. In 2001, B. Malgrange defines the $\mathcal{D}$-envelope or galoisian envelope of an analytical dynamical system. Roughly speaking, this is the algebraic hull of the dynamical system. In this short article, the $\mathcal{D}$-envelope of a rational map $R\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ is computed. The rational maps characterised by a finitness property of their $\mathcal{D}$-envelope appear to be the integrable ones.

Introduction

Dans [**M1**] et [**M2**] B. Malgrange définit la $\mathcal{D}$-*enveloppe*, ou *enveloppe galoisienne*, de divers systèmes dynamiques analytiques (feuilletage, champ de vecteurs, transformation rationnelle...) sur une variété analytique complexe lisse. Heuristiquement, il s'agit du système maximal d'équations aux dérivées partielles portant sur les difféomorphismes locaux de cette variété vérifiant les deux conditions suivantes :

– les solutions locales de ce système sont stables par inversion et composition,
– le système dynamique est solution (infinitésimale) de ce système.

Dans le cas des feuilletages, cet objet est fortement lié à l'existence d'intégrales premières d'un type de transcendance particulier (voir [**C2**]). Dans le cas des équations différentielles linéaires, la $\mathcal{D}$-enveloppe redonne le groupe de Galois différentiel d'une extension de Picard-Vessiot [**M1**], voir aussi [**C2**].

Dans cet article nous donnons la liste des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^1$ ayant une $\mathcal{D}$-*enveloppe* non triviale, c'est-à-dire définie par au moins une équation non nulle.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 37F10, 53C10.
Key words. Holomorphic dynamic, Lie $\mathcal{D}$-groupoid.

Théorème principal. *Les seules applications rationnelles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ ayant une $\mathcal{D}$-enveloppe non triviale sont, à conjugaison par une homographie près, les monômes, les polynômes de Tchébitchev et les exemples de Lattès.*

La construction de ces applications sera rappelée dans la première partie et les définitions de $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie et $\mathcal{D}$-enveloppe, dans la deuxième. Nous constatons que cette liste est celle des applications rationnelles admettant un commutant non trivial [**R**], [**F**], [**J**], [**E**]. Par analogie avec l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens, les applications rationnelles ayant un commutant non trivial sont appelées *"intégrables"* [**V**]. D'autre part, dans le contexte de cet article l'appellation *"intégrable"* est justifiée par le fait que plus la $\mathcal{D}$-*enveloppe* est petite moins la dynamique est *"transcendante"*.

1. Quelques rappels de dynamique holomorphe [B-M]

Soit $R\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ un application rationnelle de la droite projective. Au voisinage d'un point p fixe ($R(p) = p$), répulsif ($|R'(p)| > 1$), cette application est linéarisable.

Théorème 1 (de linéarisation de Kœnigs)**.** *Soit $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ telle que $|f'(0)| > 1$. Il existe une unique application $\Psi\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ telle que*

$$\Psi'(0) = 1 \ \textit{et}\ \Psi^{-1} \circ f \circ \Psi(w) = f'(0)w.$$

On appelle Ψ la linéarisante de Kœnigs en p.

L'ensemble de Julia de R est l'ensemble $\mathcal{J}_R$ des points au voisinage desquels la famille $\{R^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas normale. Les points fixes répulsifs des fractions $R^{\circ n}$ appartiennent à cet ensemble. Plus précisement, on a le théorème suivant.

Théorème 2. *Pour toute fraction rationnelle R de degré au moins deux, les points fixes répulsifs des itérées $R^{\circ n}$ sont denses dans $\mathcal{J}_R$.*

Soit p un point fixe répulsif. La linéarisante de Kœnigs s'étend par les formules

$$R^{\circ n} \circ \Psi(w) = \Psi((R'(p))^n w).$$

L'image de ce prolongement est égal à $\mathbb{P}^1 - E$ où E est l'ensemble exceptionnel, c'est-à-dire, l'ensemble de points q dont les préimages $R^{-n}(\{q\})$ n'accumulent pas l'ensemble de Julia de R. Lorsqu'il est non vide, cet ensemble est réduit à un ou deux points. L'application Ψ définie un revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1 - E$ par $\mathbb{C}$ qui “semi-conjugue” R à sa partie linéaire en p :

$$R \circ \Psi = \Psi(R'(p)w).$$

Nous allons maintenant donner des exemples d'applications rationnelles particulières. La construction de ceux-ci se fait à partir de leurs linéarisantes.

Les monômes. Considérons l'application exponentielle $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$ et sur $\mathbb{C}$ la transformation $w \mapsto kw$, où k est un entier. On construit une application rationnelle M_k sur $\mathbb{P}^1$ en posant $M_k(\exp w) = \exp(kw)$. Cette application est évidemment l'application monomiale x^k mais son caractère rationnel peut se montrer *a priori* en utilisant les formules d'additions de la fonction exponentielle. L'ensemble $\mathcal{J}_{M_k}$ est le cercle unité. Le point “1” est un point fixe répulsif dont la linéarisante de Kœnigs se prolonge en l'application exponentielle.

Les polynômes de Tchebitchev. Considérons cette fois l'application cosinus $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$. Des formules d'additions satisfaites par cette application, on peut déduire l'existence de polynômes T_k vérifiant $T_k(\cos w) = \cos(kw)$. L'ensemble $\mathcal{J}_{T_k}$ est le segment $[-1, 1]$. Le point “1” est un point fixe répulsif dont la linéarisante de Kœnigs se prolonge en l'application cosinus.

Les exemples de Lattès. Soit $\wp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ la fonction de Weierstrass associée à un réseau Λ. Cette fonction satisfait aussi des formules d'additions. Celles-ci permettent de montrer qu'il existe des fractions rationnelles L_k satisfaisant $L_k(\wp w) = \wp(kw)$. Plus généralement on appelle exemple de Lattès toute application rationnelle L telle qu'il existe un tore complexe $\mathbb{C}/\Lambda$, une isogénie de ce tore I_λ et une fonction elliptique $p\colon \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1$ tels que $p \circ I_\lambda = L \circ p$. L'ensemble $\mathcal{J}_L$ est $\mathbb{P}^1$ car tous les points sont “expansifs”.

Le théorème suivant dû à Fatou [**F**], Julia [**J**], Ritt [**R**] et Erëmenko [**E**] (voir aussi [**D-S**]) donne une caractérisation de ces applications rationnelles.

Théorème 3. *Soient R_1 et R_2 deux fractions sur $\mathbb{P}^1$ vérifiant*

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$$

et

$$R_1^{\circ n_1} \neq R_2^{\circ n_2} \text{ pour tout entier } n_1 \text{ et } n_2.$$

Alors on est dans un des cas suivants :
- *R_1 et R_2 sont des monômes à multiplication par une racine de l'unité près,*
- *R_1 et R_2 sont des polynômes de Tchébitchev au signe près,*
- *R_1 et R_2 sont des exemples de Lattès.*

2. Quelques rappels sur la notion de $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur $\mathbb{P}^1$

Pour une introduction aux notions de $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie et $\mathcal{D}$-algèbre de Lie, le lecteur pourra consulter [**M2**] et pour plus de détails [**M1**].

2.1. Structure differentielle et algébrique de $J^*(\mathbb{P}^1)$.

Nous noterons $J_k^*(\mathbb{P}^1)$ l'espace des jets d'ordre k de germes d'applications inversibles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$. Si on choisit deux cartes (U,x) et (V,y) de $\mathbb{P}^1$, un jet d'ordre k s'écrit $(x,y,y_1,\dots,y_k)$ avec $y_1 \neq 0$. L'anneau $\mathcal{O}(U\times V)[y_1,y_1^{-1},\dots,y_k]$ est l'anneau des équations différentielles d'ordre k sur les jets d'applications inversibles de U dans V. On munit ainsi $\mathbb{P}^1\times\ \mathbb{P}^1$ d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$. Les inclusions naturelles $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}\subset\mathcal{O}_{J_{k+1}^*(\mathbb{P}^1)}$ permettent de définir $\mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)}=\varinjlim\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$ le faisceau d'anneaux des équations différentielles portant sur les applications inversibles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$. Ces anneaux sont munis d'une dérivation $D\colon \mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}\to\mathcal{O}_{J_{k+1}^*(\mathbb{P}^1)}$ définie en coordonnées locales par :

$$D(E)=\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial E}{\partial y}y_1+\cdots+\frac{\partial E}{\partial y_k}y_{k+1}.$$

Un système d'équations différentielles sur les applications inversibles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ est un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)}$ cohérent (*i.e.* les $\mathcal{I}_k=\mathcal{I}\cap\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$ sont cohérents) différentiels (*i.e.* stable par D) et réduits.

L'espace $J_k^*(\mathbb{P}^1)$ est muni d'une structure de groupoïde donnée par :
- les deux projections s, t, sur $\mathbb{P}^1$,
- une composition $c\colon J_k^*(\mathbb{P}^1)\times_{\mathbb{P}^1} J_k^*(\mathbb{P}^1)\to J_k^*(\mathbb{P}^1)$ définie sur les couples de jets (h,g) tels que $t(h)=s(g)$ par les formules habituelles :

$$c((x,y,y_1,\dots),(y,z,z_1,\dots))=(x,z,z_1y_1,\dots),$$

- une identité $e\colon \mathbb{P}^1\to J_k^*(\mathbb{P}^1)$ donnée par $e(x)=(x,x,1,0\dots)$,
- une inversion $i\colon J_k^*(\mathbb{P}^1)\to J_k^*(\mathbb{P}^1)$ définie par $i(x,y,y_1\dots)=(y,x,y_1^{-1}\dots)$,

le tout vérifiant certains diagrammes commutatifs que nous ne rappellerons pas [**Mck**]. Toutes ces flèches sont compatibles aux faisceaux d'anneaux construits précédemment dans le sens où elles induisent des flèches s^*, t^*, e^*, i^* et c^* entres les anneaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$ et $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$ compatibles aux injections $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)} \subset \mathcal{O}_{J_{k+1}^*(\mathbb{P}^1)}$.

2.2. $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie.

Les définitions suivantes sont issues de [**M1**].

Définition 4. Un groupoïde d'ordre k sur $\mathbb{P}^1$ est donné par un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}_k$ de $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$ tel que :

(1) $\mathcal{I}_k \subset \mathrm{Ker}(e^*)$,

(2) $i^*\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_k$,

(3) $c^*\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_k \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} 1 + 1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{I}_k$ (la somme étant prise comme somme d'idéaux).

Cette définition est naturelle mais en pratique trop restrictive pour l'utilisation que nous avons en vue. Une équation différentielle sur $\mathbb{P}^1$ admettant des singularités, l'inclusion (3) n'est pas forcement vérifiée au voisinage de ces points. Il faut alors utiliser la définition plus souple suivante.

Définition 5. Un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur $\mathbb{P}^1$ est donné par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)}$ tel que

- $\mathcal{I}_k = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$ soient cohérents,
- $\mathcal{I}$ soit stable par dérivation,
- il existe un entier k et un ensemble analytique fermé Z dans $\mathbb{P}^1$ tels que
  (i) pour tout $\ell \geq k$, $\mathcal{I}_\ell$ vérifie (1) et (2) de la Définition 4,
  (ii) sur tout voisinage de $(x, y, z) \in (\mathbb{P}^1 - Z) \times (\mathbb{P}^1 - Z) \times (\mathbb{P}^1 - Z)$, on a (3).

L'exemple le plus simple est celui donné par l'équation $S(y) = 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = 0$. La formule classique sur la dérivée schwartzienne :

$$S(c((x, y, \dots), (y, z, \dots))) = S(y, z, \dots)(y_1)^2 + S(x, y, \dots)$$

donne les inclusions voulues. Ici l'ensemble Z est vide. Néanmoins le Théorème 7 ci-dessous donne des exemples où cet ensemble est non vide. Lorsque $\mathcal{I}$ ne contient pas d'équation d'ordre zéro, le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie est dit transitif.

2.3. $\mathcal{D}$-enveloppe d'une application rationnelle.

Définition 6. Soit $R\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ une application rationnelle. Sa $\mathcal{D}$-enveloppe est le plus petit des $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie dont R est solution. Lorsque l'idéal de ce $\mathcal{D}$-groupoïde n'est pas (0), nous dirons que la $\mathcal{D}$-enveloppe est non triviale.

L'existence d'un plus petit $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie parmi une famille de $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie est prouvée en toute généralité dans [**M1**].

3. Les $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie sur $\mathbb{P}^1$

Le théorème suivant [**C1**] donne la forme des équations engendrant l'idéal d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie au-dessus d'un disque Δ. Pour un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)}$, nous noterons encore $\mathcal{I}$ l'idéal qu'il engendre dans le faisceau des équations différentielles méromorphes "en x et en y" c'est-à-dire dans $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^1} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1},s^*)} \mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1},t^*)} \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}$.

Théorème 7. *Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie au-dessus d'un disque Δ. Il est différentiablement engendré par une seule équation méromorphe d'ordre inférieur ou égal à trois d'une des quatres formes suivantes :*

(0) *quitte à se placer sur un disque plus petit $\Delta' \subset \Delta$,*
$h(y) - h(x)$ avec h holomorphe sur Δ',

(1) $\eta(y)(y_1)^n - \eta(x) = 0$ *avec n entier et η méromorphe sur Δ,*

(2) $\mu(y)y_1 + \frac{y_2}{y_1} - \mu(x) = 0$ *avec μ méromorphe,*

(3) $\nu(y)(y_1)^2 + 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \nu(x) = 0$ *avec ν méromorphe,*

(∞) $0 = 0$.

Les $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie correspondants seront respectivement noté $G_0(h)$, $G_1^n(\eta)$, $G_2(\mu)$, $G_3(\nu)$ et G_∞.

Lorsqu'on effectue un changement de coordonnée, ces équations sont soumis aux transformations suivantes.

Proposition 8. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux ouverts de $\mathbb{P}^1$ et $\varphi\colon \Delta_1 \to \Delta_2$ une application non constante. Notons x_i une coordonnée sur Δ_i. L'application φ donne naturellement une application méromorphe $\varphi_*\colon J_k^*(\Delta_1) \to J_k^*(\Delta_2)$. L'image réciproque par φ d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Δ_2 est* *un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Δ_2. Il est donné par l'une des équations suivantes :*

$$\begin{aligned}
\varphi^* G_0(h) &= G_0(h \circ \varphi) \\
\varphi^* G_1^n(\eta) &= G_1^n(\eta \circ \varphi(\varphi')^n) \\
\varphi^* G_2(\mu) &= G_2(\mu \circ \varphi\varphi' + \tfrac{\varphi''}{\varphi'}) \\
\varphi^* G_3(\nu) &= G_3(\nu \circ \varphi(\varphi')^2 + S(\varphi))
\end{aligned}$$

où $S(\varphi)$ est la dérivée Schwartzienne de φ par rapport à la coordonnée x_1.

Nous allons nous intéresser aux équations d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur $\mathbb{P}^1$. Le résultat suivant est un corollaire du Théorème 7.

Proposition 9. *Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie transitif au dessus de $\mathbb{P}^1$. Il est différentiablement engendré par une des équations suivantes :*

(1) $\eta(y)(y_1)^n - \eta(x) = 0$ *avec n entier,*

(2) $\mu(y)y_1 + \frac{y_2}{y_1} - \mu(x) = 0,$

(3) $\nu(y)(y_1)^2 + 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \nu(x) = 0,$

(∞) $0 = 0,$

avec η, μ et ν rationnelles.

Preuve: Montrons cette proposition dans le cas (3), les autres cas se montre de la même manière. Sur chaque "disque" $\mathcal{U} = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ (de coordonnée x) et $\mathcal{V} = \mathbb{P}^1 - \{0\}$ (de coordonnée $\overline{x} = \frac{1}{x}$), l'idéal d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie d'ordre trois est engendré par une équation de type (3) : $G_3(\nu)$ sur $\mathcal{U}$ et $G_3(\overline{\nu})$ sur $\mathcal{V}$. D'après la Proposition 8, ces deux équations sont reliées par l'identité : $\overline{\nu}(\frac{1}{x})\frac{1}{x^4} = \nu(x)$. Ceci prouve la rationnalité de ν.

Remarquons qu'on peut établir une preuve de la Proposition 9 à partir du fait qu'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie transitif est le groupoïde d'invariance d'une structure géométrique et que celle-ci soit complètement déterminée par le groupe d'isotropie d'un point. Dans le cas non-singulier, nous renvoyons le lecteur à [**K**] et pour l'adaptation au cas rationnel à [**C2**]. □

4. Preuve du théorème principal

Remarquons d'abord que la $\mathcal{D}$-enveloppe d'une homographie est non triviale. En effet, dans ce cas, R est solution de $G_3(0)$ d'équation $S(y)=0$. Nous supposerons donc que R n'est pas une homographie.

Dans un premier temps, nous allons supposer que R est solution d'une équation différentielle $G_2(\mu)$ et établir le lemme suivant.

Lemme 10. *Une transformation rationnelle R de $\mathbb{P}^1$ est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $G_2(\mu)$ si et seulement si il existe un groupe discret G de transformations affines de $\mathbb{C}$ et une dilatation $z \mapsto \lambda z$ tels que, si $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/G \subset \mathbb{P}^1$ est le quotient, $R \circ \pi(z) = \pi(\lambda z)$.*

Preuve: Quitte à remplacer R par $R^{\circ n}$, nous pouvons trouver un point $p \in \mathbb{P}^1$ en dehors des pôles de μ, fixe et répulsif. Les solution de $G_2(\mu)$ étant stables par composition, $R^{\circ n}$ est encore une solution. Le théorème de Kœnigs nous permet alors de construire une linéarisante locale holomorphe que nous étendons à $\mathbb{C}$:

$$\Psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 - E \text{ vérifiant } \Psi(\lambda z) = R \circ \Psi \text{ et } \Psi'(0) = 1.$$

D'après la Proposition 8, l'image réciproque par Ψ du $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $G_2(\mu)$ est le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie au-dessus de $\mathbb{C}$: $G_2(\overline{\mu})$ où

$$\overline{\mu} = (\mu \circ \Psi)\Psi' + \frac{\Psi''}{\Psi'}.$$

La fraction R étant solution de $G_2(\mu)$, l'homothétie $z \to \lambda z$ est solution de $G_2(\overline{\mu})$ d'où

$$\overline{\mu}(\lambda z)\lambda = \overline{\mu}(z).$$

Comme $|\lambda| > 1$, l'égalité ci-dessus implique l'existence d'une constante c telle que $\overline{\mu}(z) = \frac{c}{z}$. Ayant supposé $\mu(p)$ fini et $\Psi'(0) = 1$, $\overline{\mu}(0)$ doit être fini ce qui force $\overline{\mu}$ à être nul. L'image réciproque de $G_2(\mu)$ est donc le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $G_2(0)$, d'équation $\frac{y_2}{y_1} = 0$, dont les solutions sont les applications affines de $\mathbb{C}$. Considérons deux point p et q de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas des points critiques de Ψ tels que $\Psi(p) = \Psi(q)$. Il existe une application locale $\gamma\colon (\mathbb{C}, p) \to (\mathbb{C}, q)$ vérifiant $\Psi \circ \gamma = \Psi$. Par construction de $\overline{\mu}$, cette application γ laisse le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $G_2(\overline{\mu})$ invariant. La Proposition 8 nous assure que γ est solution de $G_2(\overline{\mu})$ donc est une application affine.

Le groupe $G = \{\gamma \mid \Psi \circ \gamma = \Psi\}$ est un groupe d'applications affines qui agit transitivement sur les fibres de Ψ. Ces fibres étant discrètes, ce groupe est discret.

Nous avons une condition nécessaire pour que la $\mathcal{D}$-enveloppe de R soit de la forme $G_2(\mu)$.

Montrons que cette condition est aussi suffisante. Considérons $\Psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ une linéarisante de Kœnigs de R et $G_2(0)$ le groupoïde des transformations affines de $\mathbb{C}$. Localement, on peut ramener par une détermination de Ψ^{-1} le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $G_2(0)$ en un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie au-dessus d'un ouvert de $\mathbb{P}^1$. D'après la Proposition 8, ce $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie est $G_2(\frac{(\Psi^{-1})''}{(\Psi^{-1})'})$ et R en est une solution (lorsque cela à un sens).

Il nous suffit de vérifier que l'équation de ce groupoïde est en fait rationnelle, c'est-à-dire, pour tous les groupes G que l'on peut rencontrer, vérifier que $\frac{(\Psi^{-1})''}{(\Psi^{-1})'}$ est rationnelle.

Considérons le réseau $\Lambda = \{b \mid (z \mapsto z+b) \in G\}$. On obtient une factorisation de Ψ :

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1.$$

La dernière application induite par Ψ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}/\Lambda$ invariante sous l'action de G/Λ. En utilisant la liste des sous-groupes discrets d'applications affines, on obtient la liste suivante d'applications :

(1) $\Lambda = \{0\}$ et G est un groupe fini de rotation :
$\Psi(z) = z^k$, R est une homothétie et $\mu = 0$.

(2) $\Lambda = \mathbb{Z}$ et $G = \Lambda$:
$\Psi(z) = \exp(2i\pi z)$, R est un monôme et $\mu(z) = \frac{-1}{z}$.

(3) $\Lambda = \mathbb{Z}$ et $G/\Lambda = \{+1, -1\}$:
$\Psi(z) = \cos(2i\pi z)$, R est un polynôme Tchébitchev et $\mu(z) = \frac{-z}{z^2-4}$.

(4) $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ ($\Im\tau > 0$) et $G/\Lambda = \{+1, -1\}$:
$\Psi(z) = \wp(z)$ ($\wp$ est la fonction de Weierstrass associée au réseau Λ et solution de $(\wp')^2 = 4\wp^3 + g_2\wp + g_3$ pour des constantes g_2 et g_3 définies par Λ), R est un exemple de Lattès et $\mu(z) = -\frac{6z^2+g_2/2}{4z^3+g_2z+g_3}$.

(5) $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ et $G/\Lambda = \{+1, i, -1, -i\}$:
dans ce cas $g_3 = 0$, $\Psi(z) = \wp(z)^2$ et $\mu(z) = -\frac{1}{4z} - \frac{6z+g_2/2}{8z^2+2g_2z}$.

(6) $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$ et $G/\Lambda = \{+1, j, j^2\}$:
dans ce cas $g_2 = 0$, $\Psi(z) = \wp'(z)$ et $\mu(z) = -\frac{2}{3}\frac{z}{z^2-g_3)}$.

(7) $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$ et $G/\Lambda = \{+1, j, j^2, -j, -j^2, -1\}$:
dans ce cas $g_2 = 0$, $\Psi(z) = \wp(z)^3$ et $\mu(z) = -\frac{2}{9z} - \frac{1}{z+g_3/2}$.

Un itéré de R est de la forme voulue. On conclut que R est aussi de cette forme en remarquant que comme R est solution de $G_2(\mu)$, toutes les déterminations de $\Psi \circ R \circ \Psi^{-1}$ sont affines. □

Lemme 11. *Aucune transformation rationnelle de $\mathbb{P}^1$ n'a de $\mathcal{D}$-enveloppe de type (3).*

Preuve: Supposons que R soit solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $G_3(\nu)$. En procédant comme précédemment, on obtient une linéarisante locale Ψ par le théorème de Kœnigs que l'on prolonge en un revêtement $\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$. L'homothétie $z \to \lambda z$ étant solution de l'image réciproque de $G_3(\nu)$ par Ψ: $G_3(\overline{\nu})$. On a l'égalité :

$$\overline{\nu}(\lambda z)\lambda^2 = \overline{\nu}(z),$$

d'où on déduit qu'il existe une constante c telle que $\overline{\nu} = \frac{c}{z^2}$. Comme $\overline{\nu}(0)$ est fini, on a $\overline{\nu} = 0$. L'image réciproque de $G_3(\nu)$ est le groupoïde des homographies. Soit γ un germe d'application vérifiant $\Psi \circ \gamma = \Psi$. On établit comme précédemment que $S(\gamma) = 0$ et donc que γ est une homographie. Il existe donc un sous-groupe G des homographie qui agit transitivement sur les fibres de Ψ. Ces fibres de Ψ étant des sous ensembles discrets de $\mathbb{C}$, G ne peut être composé que d'applications affines. On obtient la même liste d'application que pour les solutions de $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie de type (2). On en déduit qu'aucune application rationnelle n'a de $\mathcal{D}$-enveloppe de type (3). $\square$

Nous noterons que certaines de ces application ont des enveloppes galoisiennes strictement plus petites. Par exemple, les rotations rationnelles ont des enveloppes intransitives et les dilatations ont des enveloppes de rang 1.

5. Remarques

1 - Une caractérisation *a priori* partant sur le $\mathcal{D}$-enveloppe de R de l'existence d'un commutant non trivial est nécessaire pour aborder l'étude des applications rationnelles en dimension supérieure. Une condition nécessaire semble être que la $\mathcal{D}$-enveloppe soit localement l'action d'un groupe sur un espace homogène. Cette condition n'est pas suffisante au vue des travaux de [**D-S**]. Le groupe de Lie semble devoir être un groupe de transformation affine (voir aussi [**V**]).

2 - Sur une courbe algébrique, l'étude de la $\mathcal{D}$-enveloppe d'une correspondance reste à faire [**C-U**]. Il est trivial de vérifier que les correspondances modulaires ont une $\mathcal{D}$-enveloppe non triviale. En utilisant les résultats de [**Ma**], on vérifie que si la $\mathcal{D}$-enveloppe d'une correspondance est non triviale et non singulière (*i.e.* $G_3(\nu)$ avec ν holomorphe) alors la correspondance est modulaire. Le cas des correspondances ayant une $\mathcal{D}$-enveloppe singulière reste obscur.

3 - L'équation de la linéarisante de Kœnigs est une équation aux q-différences non linéaire et autonome. Une étude de la $\mathcal{D}$-enveloppe des systèmes dynamiques provenant d'équations aux différences ou aux q-différences permettrait de relier l' *"intégrabilité"* d'une transformation rationnelle à l' *"intégrabilité"* de ses linéarisantes de Kœnigs (ou normalisantes de Poincaré).

4 - Un énoncé partiel mais analogue a été obtenu par Buium et Zimmerman dans une situation semblant plus générale dans [**B-Z**].

Références

[B-M] F. BERTELOOT ET V. MAYER, *"Rudiments de dynamique holomorphe"*, Cours Spécialisés **7**, Société Mathématique de France, Paris ; EDP Sciences, Les Ulis, 2001.

[B-Z] A. BUIUM ET K. ZIMMERMAN, Differential orbit spaces of discrete dynamical systems, *J. Reine Angew. Math.* **580** (2005), 201–230.

[C1] G. CASALE, $\mathcal{D}$-enveloppe d'un difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **13(4)** (2004), 515–538.

[C2] G. CASALE, Sur le groupoïde de Galois d'un feuilletage, Thèse soutenue en juillet 2004 à l'Université Paul Sabatier, Toulouse. Disponible sur `http ://doctorants.picard.ups-tlse.fr/theses.htm`.

[C-U] L. CLOZEL ET E. ULLMO, Correspondances modulaires et mesures invariantes, *J. Reine Angew. Math.* **558** (2003), 47–83.

[D-S] T-C. DINH ET N. SIBONY, Sur les endomorphismes holomorphes permutables de $\mathbb{P}^k$, *Math. Ann.* **324(1)** (2002), 33–70.

[E] A. È. ERËMENKO, Some functional equations connected with the iteration of rational functions, (Russian), *Algebra i Analiz* **1(4)** (1989), 102–116 ; translation in : *Leningrad Math. J.* **1(4)** (1990), 905–919.

[F] P. FATOU, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, *J. Math. Pures Appl.* **3** (1924), 1–49.

[J] G. JULIA, Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **39** (1922), 131–215.

[K] S. KOBAYASHI, *"Transformation groups in differential geometry"*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **70**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

[Mck] K. MACKENZIE, *"Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry"*, London Mathematical Society Lecture Note Series **124**, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[M1] B. MALGRANGE, Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, in : *"Essays on geometry and related topics"*, Vol. 1, 2, Monogr. Enseign. Math. **38**, Enseignement Math., Geneva, 2001, pp. 465–501.

[M2] B. MALGRANGE, On nonlinear differential Galois theory, Dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions, *Chinese Ann. Math. Ser. B* **23(2)** (2002), 219–226.

[Ma] G. A. Margulis, *"Discrete subgroups of semisimple Lie groups"*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **17**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[R] J. F. Ritt, Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **25(3)** (1923), 399–448.

[V] A. P. Veselov, What is an integrable mapping ?, in : *"What is integrability ?"*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991, pp. 251–272.

Laboratoire E. Picard
UMR 5580 UFR MIG
Université Paul Sabatier
31 062 Toulouse Cedex 4
France
E-mail address: `casale@picard.ups-tlse.fr`
`casale@ms.u-tokyo.jp.ac`

`http://www.picard.ups-tlse.fr/~casale`

Primera versió rebuda el 27 d'abril de 2005,
darrera versió rebuda el 6 d'octubre de 2005.