

SINGULARITÉS NILPOTENTES ET INTÉGRALES PREMIÈRES

R. MEZIANI ET P. SAD

Abstract

This paper presents a classification of plane dicritical nilpotent singularities, i.e. singularities which have nilpotent linear part and infinitely many separatrices. In particular the existence of meromorphic first integrals is discussed. The same ideas are applied to other kind of dicritical singularities.

1. Introduction

On s'intéresse à la classification analytique des singularités nilpotentes dicritiques de $(\mathbb{C}^2, 0)$ et la détermination du classifiant ainsi qu'à la rigidité formelle-analytique. On notera $\Lambda^1(\mathbb{C}^2, 0)$ l'ensemble des germes en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-formes holomorphes à singularité isolée en $0 \in \mathbb{C}^2$.

Soit Λ un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe nilpotente, i.e. le 1-jet de Λ s'écrit (modulo conjugaison par un élément de $GL(2, \mathbb{C})$) comme $y dy$. D'après Takens [T], Λ est formellement conjugué à une 1-forme $\Lambda_{n,p,\alpha}$:

$$\Lambda_{n,p,\alpha} = d(y^2 + x^n) + \alpha x^p \widehat{U}(x) dy$$

où $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3$ et $p \geq 2$; $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\widehat{U} \in \mathbb{C}[[x]]$, $\widehat{U}(0) = 1$.

En fait, d'après [S-Z] et puis récemment [Lo] d'une manière géométrique, on peut choisir $\Lambda_{n,p,\alpha}$ convergente et la conjugaison à Λ analytique.

La classification de ce type de 1-forme dépend du fait que le nombre $p \in \mathbb{N}$ dans le terme $\alpha x^p \widehat{U} dy$ perturbant la partie hamiltonienne $d(y^2 + x^n)$ est suffisamment grand ou non. Elles ont été étudiées par plusieurs auteurs et sont génériquement rigides. Il y a 3 cas :

1. $n < 2p$: le classifiant dans ce cas est l'holonomie projective, et la résolution de la forme est la même que celle de $y^2 + x^n = 0$ [C-M].

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 32S65.

Key words. Singularity of a holomorphic foliation, dicritical nilpotent singularity, meromorphic first integral.

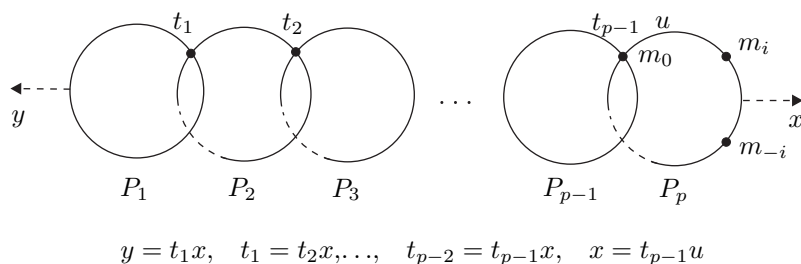
2. $n > 2p$: la résolution est alors obtenue après p éclatements et l'holonomie projective classe encore [B-Me-S], [S-Z].
3. $n = 2p$: modulo des hypothèses génériques sur α , la résolution est la même que celle de $y^2 + x^{2p} = 0$ et le classifiant est l'holonomie projective, par contre le rapport des valeurs propres des singularités apparaissant sur la dernière composante du diviseur exceptionnel, dépendent explicitement de α [Me].

Nous nous proposons dans ce travail d'analyser ce dernier cas dans le cadre α non-générique, plus précisément

$$(1.1) \quad \alpha \in \{\pm 2(r^{1/2} + r^{-1/2}); r \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}\}.$$

Nous remarquons que le cas $\alpha = \pm 4$ (ou $r = 1$) a déjà été considéré dans [Me].

Soit donc Λ un germe en $0 \in \mathbb{C}$ de 1-forme holomorphe nilpotente avec $n = 2p$, et supposons α comme dans (1.1). On a la suite d'éclatements (chaîne linéaire de droites projectives) suivante :



Le feuilletage éclaté divisé $\tilde{\mathcal{F}}_\Lambda$ de \mathcal{F}_Λ possède $p+1$ singularités $m_{p-k} = P_{k-1} \cap P_k$, $k = 2, 3, \dots, p$, en plus de m_i et m_{-i} qui sont deux singularités sur P_p autres que le coin m_0 . Chaque composante P_k pour $k = 1, 2, \dots, p$ du diviseur exceptionnel, privée des singularités est une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}_\Lambda$; en particulier, $\mathcal{L} = P_p \setminus \{m_0, m_i, m_{-i}\}$ est une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}_\Lambda$. Le coin m_0 est une singularité réduite, linéarisable avec intégrale première holomorphe, et l'indice de \mathcal{L} en m_0 est $\mu_0 = -\frac{p-1}{p}$. Une des singularités dans $\{m_i, m_{-i}\}$, disons m_i associée à \mathcal{L} l'indice $\mu_i \in \mathbb{Q}_+$ (dû à (1.1)); m_i est donc linéarisable d'après le Théorème de Poincaré, sauf peut-être dans le cas résonant ($\mu_i \in \mathbb{N}_+$ ou $\mu_i \in (\mathbb{N}_+)^{-1}$). On supposera dans toute la suite que le germe en m_i de l'éclaté divisé $\tilde{\Lambda}$ de Λ est analytiquement linéarisable, i.e. conjugué à $X dT - \mu_i T dX$, $\mu_i \in \mathbb{Q}_+$. Remarquons que la self-intersection de P_p est égale à -1 , alors $\mu_{-i} + \mu_i + \mu_0 = -1$; ainsi

l'indice μ_{-i} de \mathcal{L} en m_{-i} appartient à \mathbb{Q}_- . La singularité m_{-i} est donc réduite, pas nécessairement linéarisable. Si $\mu_i = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}_+$ ($p' \wedge q' = 1$) on notera $\Lambda \in \Sigma_{p',q'}^p$ (ou simplement $\Lambda \in \Sigma^p$ si on ne veut pas expliciter p', q').

Avant d'expliquer le but de ce travail, il est convenable d'écrire la 1-forme nilpotente Λ selon les coordonnées analytiques introduites dans [Me] :

$$(1.2) \quad \Lambda \sim \Omega = d(y^2 + x^{2p}) + (ax^{p-1}l(x) + yg(x, y))(py dx - x dy)$$

où : $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $l \in \mathbb{C}\{x\}$ avec $l(0) = 1$ et $a = ri$ avec $r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 2)$ (pour $r \in \mathbb{Q} \cap (2, \infty)$ c'est le même cas : on s'y ramène par changement de coordonnées $y \mapsto -y$). Pour obtenir cette expression, la courbe $y^2 + x^{2p} = 0$ est choisie comme le transformé strict d'une séparatrice lisse par m_i et d'une autre séparatrice lisse par m_{-i} , transverses à P_p . Le choix de la deuxième séparatrice est unique ; pour la première il l'est aussi seulement si $\mu_i \in \mathbb{Q}_+ \setminus (\mathbb{N}_+)^{-1}$. Lorsque $\mu_i \in (\mathbb{N}_+)^{-1}$, le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ admet une famille infinie de telles courbes lisses par m_i , et on peut sélectionner une quelconque pour écrire (1.2).

Après la suite d'éclatements

$$y = t_1x, \quad t_1 = t_2x, \dots, \quad t_{p-2} = t_{p-1}x, \quad x = ut_{p-1},$$

les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur P_p sont les points m_0, m_i et m_{-i} de coordonnées dans la carte (u, t_{p-1}) respectivement $(0, 0)$, $(i, 0)$ et $(-i, 0)$. Les indices de \mathcal{L} sont

$$\mu_0 = \frac{-(p-1)}{p}, \quad \mu_i = \frac{ai-2}{4p} = \frac{-(r+2)}{4p} > 0, \quad \mu_{-i} = \frac{r-2}{4p} < 0$$

où $r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, -2)$. On a

$$\mu_i = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}_+ \quad (p' \wedge q' = 1) \iff a = a_{p'/q'} = -(4p \frac{p'}{q'} + 2)i.$$

La 1-forme $\Omega^0 = py dx - x dy$ est résolue après la même suite d'éclatements. Dans la carte (u, t_{p-1}) l'éclaté divisé de Ω^0 est égal à du , qui définit la fibration de Hopf de P_p . Les 1-formes Ω et Ω^0 sont transverses en dehors de la courbe $y^2 + x^{2p} = 0$ qui est une séparatrice commune aux deux 1-formes. Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ éclaté divisé de \mathcal{F}_Ω admet une infinité de séparatrices par m_i , dont l'une a pour équation $(u = i)$ dans la carte (u, t_{p-1}) , ou encore $y - ix^p = 0$ dans la carte (x, y) ; il admet aussi une seule séparatrice, par m_{-i} , transverse à P_p et qui a pour équation $(u = -i)$ dans la carte (u, t_{p-1}) , ou encore $(y + ix^p = 0)$ dans la carte (x, y) .

Le groupe d'holonomie de \mathcal{L} est engendré par les applications d'holonomie locales h_0, h_i et h_{-i} de \mathcal{L} autour des singularités m_0, m_i et m_{-i} , avec la relation $h_0 \circ h_i \circ h_{-i} = \text{Id}$. Si le groupe est fini (par exemple, si $\mu_i \in \mathbb{N}_+$), toutes les feuilles sont des ensembles analytiques. Il peut exister une intégrale première, comme pour la 1-forme

$$\Omega = d(y^2 + x^{2p}) + a_{p'/q'} x^{p-1} (py dx - x dy)$$

laquelle admet l'intégrale

$$F(x, y) = \frac{(y + i x^p)^{pp'}}{(y - i x^p)^{pp'+q'}}.$$

Mais en général la finitude du groupe d'holonomie n'est pas suffisante pour trouver une intégrale première; un des buts de ce travail est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour garantir son existence.

La Section 2 est dédiée à l'étude de telles conditions. Plusieurs exemples sont présentés dans la Section 3; ensuite on fait la classification analytique des singularités nilpotentes sous la condition (1.1).

Dans la dernière section un type différent de singularité dicritique est introduit : les singularités telles qu'après un éclatement le feuilletage est régulier au voisinage du diviseur exceptionnel mais avec un nombre fini de points de tangence. Toutes les feuilles sont des ensembles analytiques; la question se pose comme avant pour les singularités nilpotentes : existe-t-il toujours une intégrale première méromorphe $[\mathbf{K}]$? Si d'un côté la réponse peut être affirmative, comme pour les exemples admettant

$$F(x, y) = x + P(yx^{-1}), \quad P \in \mathbb{C}[t] \text{ avec degré } > 1$$

comme intégrale première, de l'autre côté les mêmes idées introduites dans la Section 2 permettent de caractériser exactement tous les cas avec intégrale première méromorphes; ils sont très rares en fait.

2. Caractérisation de l'existence de intégrales premières

On reprend les notations introduites après (1.2); on a alors deux séparatrices distinguées écrites comme $y^2 + x^{2p} = 0$.

La remarque suivante sera utile : soit $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2) \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ qui préserve les axes horizontal ($T = 0$) et vertical ($X = 0$) tel que $\Theta_1(X, 0) = X$ et $\Theta^* \omega_0 \wedge \omega_0 = 0$, où $\omega_0 = X dT - \frac{p'}{q'} T dX$. Alors il existe $\Theta' \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ fixant chaque feuille de ω_0 et tel que $\Theta' \circ \Theta$ soit fibré, i.e. préserve les verticales $X = \text{cste}$.

Il suffit de choisir la fonction holomorphe $l(X, T)$ avec $e^{l \circ \Theta(X, T)} \Theta_1(X, T) = X$ (i.e. $l(X, T) = -v \circ \Theta^{-1}(X, T)$ où $\Theta_1(X, T) = X e^{v(X, T)}$) et de prendre $\Theta'(X, T) = (e^{l(X, T)} X, e^{p'/q'l(X, T)} T)$.

En particulier, une fibration holomorphe transverse à $(T = 0)$ tel que $(X = 0)$ soit une fibre peut être rectifiée comme $dX = 0$ (on prend $\Theta = \text{Id}$) fixant chaque feuille de Ω .

Pour motiver notre théorème principal, prenons $\Omega \in \Sigma_{p', 1}^p$ qui possède une intégrale première méromorphe R (et donc $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ possède l'intégrale correspondant \tilde{R}). On a supposé que la 1-forme $\tilde{\Omega}$ est linéarisable au point singulier m_i de coordonnées $(i, 0)$ dans la carte (u, t_{p-1}) . On écrit $\tilde{\Omega}_i$ pour désigner $\tilde{\Omega}$ dans les coordonnées (U, t_{p-1}) pour $U = u - i$; alors $U = 0$ est séparatrice distinguée. Soient (X, T) des coordonnées privilégiées, i.e. il existe $\Phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que :

1. $\Phi(U, t_{p-1}) = (X, T)$, $\Phi(U, 0) = (U, 0)$.
2. $\Phi^* \omega_0 \wedge \tilde{\Omega}_i = 0$.
3. $\Phi(U, 0) = (U, 0)$ et $\Phi(U = 0) = (X = 0)$.
4. $\Phi^*(dX) \wedge dU = 0$.

L'intégrale \tilde{R} définit une intégrale première méromorphe $\tilde{R} \circ \Phi^{-1}$ de ω_0 dans la carte (X, T) sur un polydisque $U_\epsilon : |X| < \epsilon, |T| < \epsilon$; on peut supposer $\tilde{R} \circ \Phi^{-1} = 0$ sur $T = 0$. Soit Σ une transversale $X = X_0$ avec $|X_0| < \epsilon$ et r la restriction de $\tilde{R} \circ \Phi^{-1}$ à $\Sigma \cap U_\epsilon$. On étend r à tout Σ (et même pour $|T| \geq \epsilon$) à l'aide des feuilles de ω_0 , en posant

$$r(T) = \tilde{R} \circ \Phi^{-1}(X, X^{p'} X_0^{-p'} T)$$

pour X assez petit (de manière que $(X, X^{p'} X_0^{-p'} T) \in U_\epsilon$), r s'étend ainsi comme une fonction méromorphe sur Σ ; r est holomorphe sur $\mathbb{C}P(1)$ parce que $\lim_{|T| \rightarrow \infty} r(T)$ existe : c'est $\tilde{R} \circ \Phi^{-1}(\{X = 0\})$. Par suite r est une fraction rationnelle $r(T) = \frac{P(T)}{Q(T)}$. Soit h l'application d'holonomie locale de $\mathcal{L} = P_p \setminus \{m_0, m_i, m_{-i}\}$ en m_0 , lue dans la carte (X, T) et calculée sur Σ (on a évidemment transporté cette application jusqu'à $\Phi^{-1}(\Sigma)$ par relèvement aux feuilles d'un chemin dans \mathcal{L}). On a $r \circ h = r$, et le graphe de $h : \{(T, h(T)); |T| \ll \epsilon\}$ est contenu dans la courbe algébrique à variables séparées

$$(2.1) \quad C_r : r(T) - r(S) = 0, \quad (T, S) \in \bar{\mathbb{C}}^2.$$

Donc non seulement h est algébrique mais il est *algébrique à variables séparées*.

Si $\mu_i = p'/q'$, la définition de r est la même : $r(T)$ est la valeur de \tilde{R} attribuée à la feuille de ω_0 par (X_0, T) quand elle est proche de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. L'application h satisfait une équation comme (2.1) ; en plus, r satisfait aussi $r \circ \mathcal{R} = r$, où $\mathcal{R}(T) = e^{2i\pi p'/q'} T$ est l'application d'holonomie locale de \mathcal{F}_{ω_0} en $(0, 0)$ lue dans Σ (d'une façon équivalente, $r(T) = \tilde{r}(T^{q'})$, pour une fraction rationnelle \tilde{r}).

Et en fait c'est suffisant pour que Ω possède une intégrale première méromorphe :

Théorème 2.1. *Soit $\Omega \in \Sigma_{p', q'}^p$ et h l'application d'holonomie de la feuille $\mathcal{L} = P_p \setminus \{m_0, m_i, m_{-i}\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ en m_0 , calculée sur une section transversale $\Sigma = \{X = X_0\}$ dans une carte (X, T) de coordonnées privilégiées. Alors Ω admet une intégrale première méromorphe ssi h est algébrique à variables séparables : il existe $r \in \mathbb{C}(T)$ tel que $r \circ h = r$ et $r \circ \mathcal{R} = r$.*

Preuve: C'est une condition nécessaire : on l'a déjà vu. Montrons qu'elle est suffisante. Dans la carte de coordonnées privilégiées, on définit l'intégrale première de ω_0 au point (X, T) comme la valeur de r là où la feuille par (X, T) coupe la section Σ (c'est bien défini parce que $r \circ \mathcal{R} = r$; la valeur sur $X = 0$ est $r(\infty)$). Si on dénote aussi par r cette extension, alors, dans la carte (X, t_{p-1}) , $r \circ \Phi$ est une intégrale première de $\tilde{\Omega}_i$ et sur Σ : $r \circ \Phi|_\Sigma \circ h = r \circ \Phi|_\Sigma$, où h est l'application d'holonomie de \mathcal{L} en m_0 lue dans les coordonnées (X, t_{p-1}) . La fonction $r \circ \Phi|_\Sigma$ est une intégrale première holomorphe pour les applications d'holonomie de \mathcal{L} en m_0 et m_i , par conséquent elle l'est aussi pour l'application d'holonomie de \mathcal{L} en m_{-i} . Donc elle se prolonge en une intégrale première holomorphe de $\tilde{\Omega}$ au voisinage de m_0 et de même pour m_{-i} . Et de proche en proche on obtient une intégrale pour $\tilde{\Omega}$ au voisinage du diviseur exceptionnel. Ce qui nous donne une intégrale première méromorphe de Ω . \square

Prenons systèmes de coordonnées privilégiées $\Phi, (X, T)$ et $\Phi', (X', T')$. Soient h et h' les applications d'holonomie de \mathcal{L} en m_0 calculées sur Σ pour les deux systèmes et $\Theta = \Phi' \circ \Phi^{-1}$; Θ est fibrée, $\Theta(X, 0) = (X, 0)$ et $h' = \Theta|_\Sigma \circ h \circ (\Theta|_\Sigma)^{-1}$, où $\Sigma = \{X = X_0\}$. Alors $r \circ h = r$ ssi $r' \circ h' = r'$, où $r' = r \circ (\Theta|_\Sigma)^{-1}$. Les seuls difféomorphismes fibrés laissant invariant le feuilletage défini par ω_0 sont linéaires : $\Theta(X, T) = (X, T') = (X, \lambda T)$. Il découle que h est algébrique à variables séparées ssi h' l'est aussi.

Soit $K_\Omega = \{r \in \mathbb{C}(T) ; r \circ h = r, r \circ \mathcal{R} = r \text{ et } r(0) = 0\}$; il s'agit d'un sous corps de $\mathbb{C}(T)$. Par le Théorème de Luroth, il existe $r_\Omega \in K$ "minimal", i.e. $K_\Omega = \mathbb{C}(T)(r_\Omega)$; il est unique à composition à gauche par une homographie ; on a donc $C_{r_\Omega} = \bigcap_{r \in K_\Omega} C_r$, et on peut définir

$C_\Omega := C_{r_\Omega}$. Comme on a vu, pour une autre coordonnée privilégiée il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que la courbe correspondante soit $H_\alpha^* C_\Omega$, où H_α est l'homothétie de \mathbb{C}^2 : $(T, S) \mapsto (\alpha T, \alpha S)$.

Soient $\bar{\mathbb{C}}$ le quotient de $\bar{\Sigma}$ par la relation $T \sim \mathcal{R}(T)$, $\pi: \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ la projection correspondante, $\mathbf{r}_\Omega = r_\Omega \circ \pi^{-1}$ (bien défini parce que $r_\Omega \circ \mathcal{R} = r$) et $\mathbf{C}_\Omega = (\pi, \pi)(C_\Omega) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; \mathbf{r}_\Omega(z) = \mathbf{r}_\Omega(w)\}$. L'application h commute avec \mathcal{R} , donc $\mathbf{h} = h \circ \pi^{-1}$ est un difféomorphisme holomorphe bien défini en $(\mathbb{C}, 0)$. On va considérer ensuite deux 1-formes $\Omega, \Omega' \in \Sigma_{p', q'}^p$ admettant des intégrales premières méromorphes; soient h, h' les applications d'holonomie de $\mathcal{L} = P_p \setminus \{m_0, m_i, m_{-i}\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega, \tilde{\mathcal{F}}_{\Omega'}$ en m_0 , calculées sur une section transversale $\Sigma = \{X = X_0\}$ dans les cartes $(X, T), (X, T')$ de coordonnées privilégiées (via les difféomorphismes Φ et Φ'). Considérons aussi les courbes associées $C_\Omega, C_{\Omega'}, \mathbf{C}_\Omega, \mathbf{C}_{\Omega'}$.

Théorème 2.2. $\Omega, \Omega' \in \Sigma_{p', q'}^p$ sont analytiquement conjuguées ssi il existe une homographie $\mathbf{L}: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $\mathbf{L}(0) = 0$ tel que $\mathbf{L}(\mathbf{C}_\Omega) = \mathbf{C}_{\Omega'}$.

Preuve:

a) *Condition nécessaire.* Supposons maintenant $\Omega, \Omega' \in \Sigma_{p', q'}^p$ holomorphiquement conjuguées: $\Psi^* \Omega \wedge \Omega' = 0$, $\Psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$. Cette application induit une homographie $\mathbf{L}: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ (parce que $\bar{\mathbb{C}}$ est l'espace de feuilles de ω_0 et $(\Phi' \circ \Psi \circ \Phi^{-1})^* \omega_0 \wedge \omega_0 = 0$ où Φ et Φ' sont cartes de coordonnées privilégiées pour Ω et Ω' en m_i) que se relève localement en 0 à $L: (\Sigma, 0) \rightarrow (\Sigma, 0)$ de façon que $h' = L \circ h \circ L^{-1}$ (L n'est pas nécessairement $\Phi' \circ \Psi \circ \Phi^{-1}|_{(\Sigma, 0)}$ parce que il faut transporter $\Phi' \circ \Psi \circ \Phi^{-1}((\Sigma, 0))$ sur $(\Sigma, 0)$ le long de chaque feuille de $\omega_0 = 0$). Comme $\mathbf{h}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{L}^{-1}$, on arrive à la conclusion.

b) *Condition suffisante.* Commençons par montrer l'existence de J linéaire tel que $J(C_\Omega) = C'_{\Omega_1}$ où $\Omega_1' \in \Sigma_{p', q'}^p$ est analytiquement équivalente à Ω . Le point $\mathbf{l} = \mathbf{L}(\infty)$ correspond à une séparatrice l lisse de Ω' transverse à P_p par la singularité m_i ; on a $\mathbf{l} = \infty$ ssi l est séparatrice distinguée. Il existe une conjugaison analytique Ψ' entre Ω' et une 1-forme $\Omega_1' \in \Sigma_{p', q'}^p$ tel que $\Psi'(l)$ soit la séparatrice distinguée de Ω_1' par m_i (voir l'Introduction); alors Ψ' induit une homographie $\mathbf{L}': \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $\mathbf{L}(\mathbf{l}) = \infty$. L'homographie $\mathbf{J} = \mathbf{L}' \circ \mathbf{L}$ satisfait $\mathbf{J}(\mathbf{C}_\Omega) = \mathbf{C}_{\Omega_1'}$, $\mathbf{J}(0) = 0$ et $\mathbf{J}(\infty) = \infty$. Par conséquent \mathbf{J} est linéaire et il existe $J: \Sigma \rightarrow \Sigma$ linéaire tel que $\pi \circ J = \mathbf{J} \circ \pi$ et $J(C_\Omega) = C_{\Omega_1'}$.

On peut supposer alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $H_\lambda(C'_\Omega) = C'_\Omega$. Soit $r_\Omega(T) = T^k s(T)$ avec $s \in \mathbb{C}(T)$, $s(0) \neq 0$ et $k \geq 1$. Alors C_Ω a exactement k composantes lisses localement en $(0, 0)$; une composante

est le graphe de h . Comme H_λ est une homothétie qui préserve chaque droite par $(0, 0)$, on en déduit que $r_{\Omega'}(T) = T^k s'(T)$ avec $s' \in \mathbb{C}(T)$, $s'(0) \neq 0$ et que le graphe de h est envoyé sur le graphe de h' , c'est à dire, $h(\lambda T) = \lambda h'(T)$. Soit $\Psi_0(X, T) = (X, \lambda T)$; on a $\Psi_0^* \omega_0 \wedge \omega_0 = 0$ et $h \circ \Psi_0|_\Sigma = \Psi_0|_\Sigma \circ h'$. Alors $((\Phi')^{-1} \circ \Psi_0 \circ \Phi)^* \tilde{\Omega}_i \wedge \tilde{\Omega}'_i = 0$, où Φ, Φ' sont des difféomorphismes fibrés de \mathbb{C}^2 tels que $\Phi^* \omega_0 \wedge \tilde{\Omega}_i = 0$ et $\Phi'^* \omega_0 \wedge \tilde{\Omega}'_i = 0$. Le difféomorphisme $\tilde{\Psi} = (\Phi')^{-1} \circ \Psi_0 \circ \Phi$ est fibré : $\tilde{\Psi}(X, t_{p-1}) = (X, t_{p-1} U(X, t_{p-1}))$, U étant une unité, et $h_0 \circ \tilde{\Psi}|_\Sigma = \tilde{\Psi}|_\Sigma \circ h'_0$; de même $h_{-i} \circ \tilde{\Psi}|_\Sigma = \tilde{\Psi}|_\Sigma \circ h'_{-i}$ (h_0 et h_{-i} sont les applications d'holonomie locales de \mathcal{L} en m_0 et m_{-i} lues dans Σ). Donc $\tilde{\Psi}$ s'étend d'une manière fibrée [M-M] au voisinage de m_0 et m_{-i} ; puis de proche en proche en une conjugaison analytique entre les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\Omega'}$ au voisinage du diviseur exceptionnel [Me]. \square

Finalement on a le résultat suivant de synthèse :

Théorème 2.3. *Soient $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tel que $h^p = \text{Id}$, $h'(0) = e^{2i\pi/p}$ et $r \in \mathbb{C}(T)$ tel que $r \circ h = r$. Si $r \circ \mathcal{R} = r$, où $\mathcal{R} = e^{2i\pi p'/q'}$, il existe $\Omega \in \Sigma_{p', q'}^p$ avec intégrale première méromorphe et possédant l'application d'holonomie de \mathcal{L} en m_0 , calculée dans la carte de coordonnées privilégiées, égale à h (à homothétie près).*

Preuve: La construction de [L] nous permet d'avoir $\Omega \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que la résolution soit du type :

1. Une chaîne linéaire de droites projectives P_1, \dots, P_p ayant -2 comme self-intersection, sauf P_p dont la self-intersection est -1 ; ils sont tous invariants, et les seules singularités de P_j sont les intersections $m_{p-j} \in P_j \cap P_{j-1}$ et $m_{p-j-1} \in P_j \cap P_{j+1}$, pour $j = 2, \dots, p-1$; $m_{p-2} \in P_1$ est l'unique singularité de P_1 . L'indice de P_p en m_0 est $-\frac{p-1}{p}$.
2. P_p possède trois singularités m_0, m_i et m_{-i} . L'éclaté divisé de Ω dévient conjugué à $X dT - \frac{p'}{q'} T dX$ en m_i et à $X dT + \left(\frac{p'}{q'} + \frac{1}{p}\right) T dX$ en m_{-i} .
3. Le groupe d'holonomie de $\mathcal{L} = P_p \setminus \{m_0, m_i, m_{-i}\}$ calculé sur une section $\Sigma : X = X_0$ dans une carte de coordonnées privilégiées est engendré par h et \mathcal{R} (les applications d'holonomie de \mathcal{L} en m_0 et m_i lues sur Σ). Par conséquent l'application d'holonomie \tilde{h} de \mathcal{L} en m_{-i} satisfait $\tilde{h} = (\mathcal{R} \circ h)^{-1}$; on voit que $r \circ \tilde{h} = r$.

Le Théorème 1 de [C-L-S] implique que la multiplicité algébrique de Ω en $0 \in \mathbb{C}^2$ est égale à 1, donc la 1-forme est nilpotente. Puisque

$r \circ h = r$, $r \circ \mathcal{R} = r$ et $r \circ \tilde{h} = r$ ont peut étendre r en une intégrale première (comme dans la démonstration du Théorème 2.1). \square

3. Exemples

Dans cette section on construit des exemples d'éléments de $\Omega \in \Sigma_{p',q'}^p$ sans intégrale première méromorphe, avec une application d'holonomie h (dans la carte où $\tilde{\Omega}_i$ est linéaire) transcendante ou algébrique. Il suffit de trouver un élément $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que son graphe ne soit pas une courbe algébrique à variables séparées, puis construire le feuilletage correspondant (qui est donc sans intégrale première méromorphe) à l'aide de la construction de [L].

Exemples transcendants. Pour tout racine de l'unité $\lambda \in \mathbb{C}$ on va construire un difféomorphisme périodique $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ non algébrique avec $h'(0) = \lambda$.

Soient $\phi(z) := e^z - 1$ et $h := \phi^{-1} \circ (\lambda\phi)$. Donc h est périodique. On a : $\phi^{-1}(z) = \log(1+z)$ et $h'(z) = \frac{1}{(\lambda^{-1}-1)e^{-z}+1}$. Comme e^{-z} est transcendant, alors $h'(z)$ est aussi transcendant. Par suite h est transcendant. En effet s'il était algébrique, il existerait $A \in \mathbb{C}[Z, Z']$ tel que $A(z, h(z)) \equiv 0$. Et par suite

$$\frac{\delta A}{\delta Z}(z, h(z)) + h'(z) \frac{\delta A}{\delta Z'}(z, h(z)) \equiv 0.$$

Posons :

$$F(Z, Z', Z'') = \frac{\delta A}{\delta Z}(Z, Z') + Z'' \frac{\delta A}{\delta Z'}(Z, Z')$$

donc $F \in \mathbb{C}[Z, Z', Z'']$. La courbe $z \mapsto (z, h(z), h'(z))$ est contenue dans l'intersection de $F = 0$ avec $A = 0$, donc il s'agit d'une courbe algébrique. Par suite h' est algébrique, ce qui est absurde.

Exemples algébriques. On va construire un élément algébrique $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ p -périodique tel qu'il n'existe aucun élément $r \in \mathbb{C}[Z]$ vérifiant $r \circ h = r$.

Considérons $p=2$, i.e. on cherche h tel que $h \circ h = \text{Id}_{(\mathbb{C}, 0)}$ et $h'(0) = -1$; considérons donc la courbe algébrique C_0 d'équation :

$$y^2 + \beta_0 y + \alpha_0 x y + \beta_0 x + x^2 + \gamma_0 = 0; \quad \beta_0, \alpha_0 \in \mathbb{C}^*, \gamma_0 = 0.$$

Cette courbe possède une seule branche lisse en $(0, 0)$, écrite comme $\{(x, h(x)); x \in (\mathbb{C}, 0)\}$ et $h'(0) = -1$. Comme C_0 est symétrique alors $h \circ h = \text{Id}_{(\mathbb{C}, 0)}$ et h est 2-périodique. La courbe C_0 est irréductible vue qu'elle ne contient aucune droite. Donc si $\exists r \in \mathbb{C}(t)$ tel que $r \circ h = r$ alors C_0 serait une composante de la courbe algébrique à variables séparées

$C : r(x) - r(y) = 0$. Alors si $(x, y) \in C_0 (\Rightarrow r(x) = r(y))$ et $(y, z) \in C_0 (\Rightarrow r(y) = r(z))$ alors $r(x) = r(z)$ et donc $(x, z) \in C$. Par conséquent, si R est la résultante des deux polynômes en y

$$\begin{aligned} & y^2 + (\beta_0 + \alpha_0 x)y + x^2 + \beta_0 x + \gamma_0 \\ & y^2 + (\beta_0 + \alpha_0 z)y + z^2 + \beta_0 z + \gamma_0 \end{aligned}$$

alors la courbe $R = 0$ est une composante de C . Par suite la courbe $C_1 :$
 $y^2 + \beta_0(2 - \alpha_0)y + (2 - \alpha_0^2)xy + x^2 + \beta_0(2 - \alpha_0)x + \beta_0^2(1 - \alpha_0) + \alpha_0^2\gamma_0 = 0$
est une composante de C . Posons :

- 1₁. $\alpha_1 = 2 - \alpha_0^2$
- 2₁. $\beta_1 = \beta_0(2 - \alpha_0)$
- 3₁. $\gamma_1 = \beta_0^2(1 - \alpha_0) + \alpha_0^2\gamma_0$

où α_1 et β_1 peuvent s'annuler et γ_1 peut être non nul.

On réitère le procédé. Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a une courbe algébrique C_n constituant une ou deux composantes de C et d'équation :

$$y^2 + \beta_n y + \alpha_n x y + \beta_n x + x^2 + \gamma_n = 0$$

avec

- 1_n. $\alpha_{n+1} = 2 - \alpha_n^2$
- 2_n. $\beta_{n+1} = \beta_n(2 - \alpha_n)$
- 3_n. $\gamma_{n+1} = \beta_n^2(1 - \alpha_n) + \alpha_n^2\gamma_n$.

Les courbes C_n et C_m sont distinctes si et seulement si : $\alpha_n \neq \alpha_m$, $\beta_n \neq \beta_m$ ou $\gamma_n \neq \gamma_m$. Si $\alpha_0 = -2$ on obtient $\alpha_n = -2$ et $\beta_n = 4^n \beta_0$. Pour $\beta_0 \neq 0$, les courbes C_n sont deux à deux distinctes. Alors la courbe algébrique C d'équation $r(x) - r(y) = 0$ aurait une infinité de composantes irréductibles, ce qui est absurde. Donc il n'existe pas d'élément $r \in \mathbb{C}(t)$ tel que $r \circ h = r$ lorsque $\alpha_0 = -2$, $\beta_0 \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma_0 = 0$.

Considérons le cas général $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit donc $\omega \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$; on va montrer l'existence d'un élément $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tel que h soit conjugué à l'homothétie de $(\mathbb{C}, 0)$ de rapport ω (en particulier si ω est racine de l'unité alors h est périodique) *algébrique mais pas algébrique à variables séparées*.

Soit D_ω la droite d'équation $y = \omega x$. Considérons

$$\begin{aligned} Q_a : \quad & \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ & (x, y) \longmapsto (x + ax^2, y + ay^2) \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{C}^*$. L'image par Q_a de la droite D_ω est la courbe algébrique C' d'équation paramétrique ($x \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} X &= x + ax^2 \\ Y &= \omega x + \omega^2 a x^2 \end{aligned}$$

ou encore la courbe d'équation $R(X, Y) = 0$, où R est la résultante en x des deux polynômes

$$\begin{aligned} X - (x + ax^2) \\ Y - (\omega x + \omega^2 a x^2). \end{aligned}$$

On a

$$R(X, Y) = a(Y^2 + \lambda Y - 2\omega^2 XY - \omega \lambda X + \omega^4 X^2)$$

avec $\lambda = \frac{\omega(\omega-1)}{a}$.

Et par suite C' est la courbe algébrique irréductible d'équation

$$Y^2 + \lambda Y - 2\omega^2 XY - \omega \lambda X + \omega^4 X^2.$$

Cette courbe possède une unique composante lisse en $(0, 0)$ d'équation $Y = h(X)$. On a $h'(0) = \omega$ et h est analytiquement conjugué (au voisinage de 0) à l'homothétie de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de rapport ω . Le difféomorphisme h de $(\mathbb{C}, 0)$ est algébrique. Supposons qu'il est *algébrique à variables séparées* : il existe $r \in \mathbb{C}(t)$ tel que $r \circ h = r$. Donc la courbe C' est une composante de la courbe algébrique à variables séparées

$$C : r(X) - r(Y) = 0.$$

Si $(X, Y) \in C'$ et $(Z, Y) \in C'$ alors $(X, Z) \in C$. Par conséquent les composantes irréductibles de la courbe $\tilde{C} : \tilde{R} = 0$ sont parmi les composantes irréductibles de C , où \tilde{R} est la résultante en Y des deux polynômes

$$\begin{aligned} Y^2 + \lambda Y - 2\omega^2 XY - \omega \lambda X + \omega^4 X^2 \\ Y^2 + \lambda Y - 2\omega^2 ZY - \omega \lambda Z + \omega^4 Z^2. \end{aligned}$$

On a

$$\tilde{R}(X, Z) = \omega^8 (Z - X)^2 (Z^2 + \beta_0 Z + \alpha_0 X Z + \beta_0 X + X^2 + \gamma_0)$$

avec $\beta_0 = \frac{2\lambda}{\omega^3}$, $\alpha_0 = -2$ et $\gamma_0 = \frac{\lambda^2(1-2\omega)}{\omega^6}$.

La courbe C_0 (qui est d'ailleurs irréductible vu qu'elle ne contient aucune droite) d'équation

$$Y^2 + \beta_0 Y - 2XY + \gamma_0 + \beta_0 X + X^2 = 0$$

est donc une composante de la courbe C d'équation $r(X) - r(Y) = 0$, ce qui est absurde d'après le cas précédent ($p = 2$) vu que $\alpha_0 = -2$ et $\beta_0 = \frac{2\lambda}{\omega^3} \in \mathbb{C}^*$.

Comme conséquence des exemples, on peut chercher une caractérisation des courbes algébriques à variables séparées. Considérons donc une courbe algébrique C d'équation $P(x, y) = 0$, on va supposer que C ne contient pas des composantes qui sont des droites horizontales ou verticales (cette condition est trivialement vraie pour les courbes algébriques à variables séparées).

Théorème 3.1. *C est algébrique à variables séparées ssi la relation binaire sur C définie par $x \mathcal{R}_P y \Leftrightarrow P(x, y) = 0$ est une relation d'équivalence.*

Preuve: C'est une condition nécessaire; montrons qu'elle est suffisante :

1^{ère} étape : montrons que si la relation binaire est d'équivalence alors il existe un élément r_1 de $\mathbb{C}(z)$ tel que la courbe C soit incluse dans la courbe $C_{r_1} : r_1(x) - r_1(y) = 0$.

L'équation de C peut-être écrite sous la forme :

$$C : y^p + A_{p-1}(x)y^{p-1} + \dots + A_1(x)y + A_0(x) = 0$$

où $A_0(x), \dots, A_{p-1} \in \mathbb{C}(x)$.

Il existe une partie finie $F \subset \mathbb{C}P(1)$ tel que si $x \in \mathbb{C}P(1) \setminus F$, alors il existe exactement p points $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$ qui sont les solutions en y de l'équation précédente, ou encore, c'est l'ensemble des éléments de la classe de x par la relation d'équivalence \mathcal{R}_P .

Considérons S_1, S_2, \dots, S_p les polynômes symétriques élémentaires dans les variables z_1, \dots, z_p et $\underline{z} = (z_1, \dots, z_p)$; un polynôme $Q \in \mathbb{C}[\underline{z}]$ est symétrique ssi il existe $H \in \mathbb{C}[\underline{z}]$ tel que

$$Q(\underline{z}) = H(S_1(\underline{z}), \dots, S_p(\underline{z})).$$

En particulier $\forall x \in \mathbb{C}P(x) \setminus F$

$$Q(\underline{y}(x)) = H(S_1(\underline{y}(x)), \dots, S_p(\underline{y}(x)))$$

$$= H((-1)A_{p-1}(x), \dots, (-1)^{p-1}A_1(x), (-1)^p A_0(x)),$$

où $\underline{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_p(x))$. Donc l'extension $r_1(x)$ de $Q(\underline{y}(x))$ à $\mathbb{C}P(1)$ est telle que $r_1(x) \in \mathbb{C}(x)$ et $\forall z, z' \in \mathbb{C}P(1) : (z, z') \in C \Rightarrow r_1(z) = r_1(z')$.

2^{ème} étape : soit

$$K_C = \{r \in \mathbb{C}(z); r(z) = r(z') \quad \forall (z, z') \in C\}.$$

On a $\mathbb{C} \not\subseteq K \subset \mathbb{C}(z)$. D'après le Théorème de Luroth, il existe un élément minimal r_0 de K , i.e. $K = \mathbb{C}(r_0)$. Si r_1 est un autre élément minimal de K alors il existe une homographie \mathcal{H} telle que $r_1 = \mathcal{H} \circ r_0$. En effet, soient $R, \tilde{R} \in \mathbb{C}(z)$ tels que $r_1 = R(r_0)$ et $r_0 = \tilde{R}(r_1)$. Donc

$r_0 = \tilde{R} \circ R(r_0)$ et $r_1 = R \circ \tilde{R}(r_1)$. Posons $\tilde{R} \circ R = l/k$ où $l, k \in \mathbb{C}[t]$. On a donc $r_0 k(r_0) - l(r_0) \equiv 0$. Comme r_0 n'est pas constant, par suite $\tilde{R} \circ R(z) \equiv z$; de même pour $R \circ \tilde{R}$. Donc R et \tilde{R} sont deux homographies.

Soit C_{r_0} la courbe algébrique définie par r_0 :

$r_0(z) - r_0(z') = 0$. Si r_1 est un autre élément minimal de K_C alors $C_{r_1} = C_{r_0}$ car $r_1 = \mathcal{H} \circ r_0$ pour l'homographie \mathcal{H} et donc la courbe C_{r_0} est indépendante du choix de l'élément minimal r_0 .

3^{ème} étape : montrons finalement que $C = C_{r_0}$. On a déjà que $C \subset C_{r_0}$. Si $C \not\subset C_{r_0}$, il existe $(x, x') \in C_{r_0} \setminus C$. Par suite les classes de x et x' via \mathcal{R}_P sont différentes et donc $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)\} \neq \{y_1(x'), y_2(x'), \dots, y_p(x')\}$. Il existe alors un polynôme symétrique élémentaire S_k tel que $S_k(\underline{y}(x)) \neq S_k(\underline{y}(x'))$. Donc $r_{S_k}(x) \neq r_{S_k}(x')$ où $r_{S_k} = S_k(\underline{y}(x))$. Mais $r_{S_k} \in K_C$ et donc $r_{S_k} \in \mathbb{C}(r_0)$ ce qui est absurde car $r_0(x) = r_0(x')$. D'où $C = C_{r_0}$ et la courbe algébrique C est à variables séparées. \square

4. Classification et rigidité formelle analytiques

Pour faire la classification analytique des éléments de $\Sigma_{p',q'}^p$ on va utiliser les mêmes idées et notations de la Section 2.

Le théorème suivant a été démontré aussi par Rudy Rosas.

Théorème 4.1. *Les feuilletages $\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_{\Omega'}$ sont analytiquement conjugués ssi leur groupes d'holonomie pour la feuille \mathcal{L} , lus sur une section dans une carte de coordonnées privilégiées, sont conjugués en 0 :*

- i) Linéairement, si $p' > 1$.
- ii) Par une homographie, si $p' = q' = 1$.
- iii) Par un revêtement d'ordre q' si $p' = 1$ et $q' > 1$.

Preuve: Soit $\tilde{\Psi}$ conjugation analytique entre $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega, \tilde{\mathcal{F}}_{\Omega'}$ et considérons $\Psi_0 = \Phi' \circ \tilde{\Psi} \circ \Phi^{-1}$: on a $\Psi_0^* \omega_0 \wedge \omega_0 = 0$ et on peut supposer $\Psi_0|_{(\Sigma,0)} \subset (\Sigma,0)$ (par transport le long de chaque feuille de $\omega_0 = 0$). Ψ_0 induit une homographie de $\bar{C} = \bar{\Sigma}/\mathcal{R}$, extension du passage au quotient de $\Psi_0|_{(\Sigma,0)}$; la projection $\pi: \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{C}$ est un revêtement d'ordre q' en 0. $\Psi_0|_{(\Sigma,0)}$ est la conjugation cherchée entre les groupes d'holonomie. On remarque que cette application est linéaire ssi $\tilde{\Psi}$ préserve les séparatrices distinguées; c'est toujours le cas si $p' > 1$. Pour $p' = 1$, on a $\Psi_0|_{(\Sigma,0)}(T) = [aT/(1+bT)]^{1/q'}$, $a \neq 0$, pour un branche convenable de la racine; les q' -racines de a/b correspondent à l'image par $\tilde{\Psi}$ de la séparatrice distinguée par m_i .

Supposons maintenant que les groupes d'holonomie de \mathcal{L} sont conjugués par une transformation linéaire; on répète l'argument du Théorème 2.2 pour construire une conjugaison entre les feuilletages. Si la conjugaison est du type $L(T) = [aT/(1+bT)]^{1/q'}$, soit l la feuille de $\omega_0 = 0$ dont l'intersection avec Σ est l'ensemble de q' -racines de a/b . On prend un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\Omega'_1}$ conjugué à $\tilde{\mathcal{F}}_{\Omega'}$ de façon que l'image de l par la conjugaison soit la séparatrice distinguée de $\tilde{\mathcal{F}}_{\Omega'_1}$ par m_i . Les groupes d'holonomie de \mathcal{L} selon $\tilde{\mathcal{F}}_{\Omega'}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\Omega'_1}$, lus sur Σ (dans les coordonnées privilégiées) sont conjugués par l'homographie $L'(T) = [a'T/(1+b'T)]^{1/q'}$ où $b' = -b/a$. Alors $L' \circ L$ est linéaire, et on conclut comme avant.

Il faut remarquer que pour la construction des conjugaisons entre feuilletages de $\Sigma_{p',q'}$ écrites comme (1.2), on utilise pour fibration génériquement transverse le feuilletage défini par la 1-forme $\Omega^0 = py dx - x dy$ (après désingularisation), de la même façon que dans [Me, pg. 34]. \square

On a aussi le théorème de rigidité suivant :

Théorème 4.2. *Si Ω possède une intégrale première méromorphe alors elle est rigide, i.e. toute 1-forme qui lui est formellement conjuguée lui est en fait analytiquement conjuguée.*

Preuve: Soit $\Omega' \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, 0)$ formellement conjugué à $\Omega : \hat{\Phi}^* \Omega \wedge \Omega' = 0$, où $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$. Par suite Ω' admet une intégrale première méromorphe formelle $\hat{H} = F \circ \hat{\Phi}$, où F est une intégrale première méromorphe de Ω . Comme Ω' possède une singularité m_i dans P_p avec $\mu_i \in \mathbb{Q}^+$ alors \hat{H} est méromorphe pure, i.e. $\hat{H} \notin \hat{\mathcal{O}}_2$ et $\hat{H}^{-1} \notin \hat{\mathcal{O}}_2$. D'après [C-Ma], \hat{H} est alors convergente : $\hat{H} = F \circ \hat{\Phi} \in \mathcal{M}_2$. Posons alors $H = F \circ \hat{\Phi} \in \mathcal{M}_2$. D'après le Théorème d'Artin [A], il existe $\Phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $H = F \circ \Phi$. Donc $\Phi^* \Omega \wedge \Omega' = 0$. \square

5. Cas dicritique avec tangences

Considérons l'espace Σ_{k_1, \dots, k_l} des feuilletages en $(\mathbb{C}^2, (0, 0))$ tel que $(0, 0)$ soit point singulier avec la propriété : *après un éclatement le diviseur exceptionnel est transverse au feuilletage éclaté sauf en un nombre fini de points de tangence d'ordre k_1, \dots, k_l* . Nous voulons caractériser les feuilletages dans cet espace avec intégrale première méromorphe.

Il faut premièrement associer à chaque point de tangence d'ordre $k \in \mathbb{N}$ une application holomorphe de période k . Prenons pour coordonnées (x, t) , $y = tx$ et supposons que le point de tangence soit $p = (0, 0)$; localement le feuilletage éclaté est donné par

$$h(x, t) = u(x, t)(x - f(t)) = \text{cste},$$

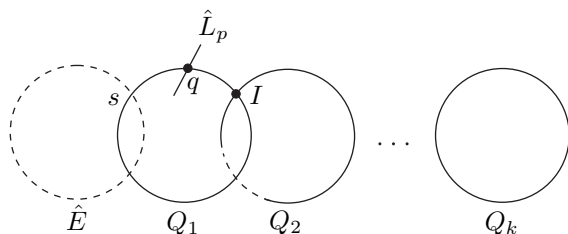
où $f(t) = t^k \hat{f}(t)$, $\hat{f}(0) \neq 0$, \hat{f} et $u(x, t)$ sont holomorphes et $u(0, 0) \neq 0$; la courbe de tangence L_p en p au diviseur exceptionnel E est $x = f(t)$. Il faut éclater successivement k fois à partir du point p pour avoir finalement le transformé strict \hat{L}_p de la courbe L_p transverse au diviseur exceptionnel. Celui-ci est l'union du transformé strict \hat{E} de E avec une chaîne linéaire de k composantes Q_1, \dots, Q_k ; les self-intersections sont données par $Q_1.Q_1 = -1$ et $Q_j.Q_j = -2$ pour $2 \leq j \leq k$. Le feuilletage éclaté est transverse à \hat{E} au voisinage de $\hat{E} \cap Q_1$; les composantes Q_1, \dots, Q_k sont invariantes et les seules singularités sont aux coins, sauf pour Q_1 qui possède aussi une singularité q à l'intersection $\hat{L}_p \cap Q_1$. Le feuilletage éclaté possède à chaque singularité une intégrale première holomorphe; en particulier, l'indice associé à Q_1 en q est $-1/k$. Soit $\{r\} = Q_1 \cap Q_2$. L'application d'holonomie de $Q_1 \setminus \{q, r\}$ au point q est périodique de période k ; si on fait le transport de cette application jusqu'à \hat{E} on obtient un difféomorphisme local i_p (périodique de période k). Evidemment ce difféomorphisme peut-être lu directement sur E (en fait, sur un voisinage V_p de p dans E).

Ainsi à chaque point de tangence $p_j = (t_j, 0) \in E$, $1 \leq j \leq l$ il est associé un difféomorphisme local i_j de période k_j tel que

$$i_j(t_j) = t_j; t \in V_{p_j} \text{ et } i_j(t) \in E \text{ sont dans la même feuille.}$$

En ce qui concerne la désingularisation, on trouve une composante du diviseur exceptionnel, disons encore \hat{E} avec self-intersection $\hat{E}.\hat{E} = -1 - \sum_{j=1}^l k_j$, attachée à l chaînes linéaires; le feuilletage désingularisé est transverse à \hat{E} .

La condition d'existence d'une intégrale première a un rapport direct avec les difféomorphismes i_1, \dots, i_l , plus précisément avec les graphes associés.



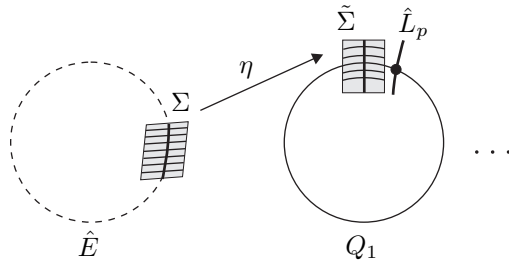
Théorème 5.1. *Le feuilletage \mathcal{F} possède une intégrale première méromorphe ssi les graphes des applications i_1, \dots, i_l sont tous contenus dans une courbe algébrique à variables séparées.*

Preuve: Considérons l'intégrale première $F(x, t)$ du transformé strict $\hat{\mathcal{F}}$. La courbe $H(z) - H(w) = 0$, où $H(\cdot) = F(0, \cdot)$ contient chaque graphe de i_j , $1 \leq j \leq l$ parce que $F(0, i_j(t)) = F(0, t)$.

A l'inverse, si chaque graphe est contenu dans la courbe $H(z) - H(w) = 0$ alors on peut définir l'intégrale au point (x, t) comme la valeur de H au point où la feuille de $\hat{\mathcal{F}}$ par (x, t) coupe E ; comme la feuille coupe E en plusieurs points seulement au voisinages des points de tangence, la condition donnée entraîne que cette valeur est bien définie. \square

Nous voulons maintenant discuter la synthèse des singularités de Σ_{k_1, \dots, k_l} . Pour simplifier l'exposé, prenons le cas d'un point de tangence d'ordre $k \in \mathbb{N}$ seulement. A la fin de la construction nous aurons un diviseur exceptionnel avec une composante \hat{E} de self-intersection $-1 - k$ attachée à une chaîne linéaire avec k composantes Q_1, Q_2, \dots, Q_k de self-intersections $-1, -2, \dots, -2$ respectivement. On va recoller un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}_1$ transverse à \hat{E} avec un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}_2$ défini au voisinage de la chaîne linéaire comme on a déjà décrit au début de cette section.

La composante Q_1 possède une singularité q du type local $ku dv + v du = 0$. Choisissons une section $\tilde{\Sigma}$ proche de q , transverse à Q_1 ; l'application d'holonomie locale h en q du feuilletage $\hat{\mathcal{F}}_2$ est périodique de période $k \in \mathbb{N}$; prenons aussi un petit arc dans \hat{E} et un difféomorphisme holomorphe $\eta: \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$. Cette application a une extension holomorphe d'un voisinage U de Σ dans un voisinage \tilde{U} de $\tilde{\Sigma}$ définie au long des feuilletages $\hat{\mathcal{F}}_1|_U$ et $\hat{\mathcal{F}}_2|\tilde{U}$ de façon à les préserver. Par conséquent, l'application h lue dans Σ est $i = \eta^{-1} \circ h \circ \eta$.



Le choix de η permet de réaliser i comme on veut, par exemple non algébrique, ou algébrique mais pas algébrique à variables séparées, ou même algébrique à variables séparées (cf. Section 3).

Exemple (Suzuki). Il s'agit d'un exemple avec une tangence quadratique. L'involution est donnée par la solution de l'équation implicite

$$\frac{1}{i(t)}e^{i(t)} = \frac{1}{t}e^t$$

définie dans un voisinage de $t = 1$ ($i(1) = 1$). La fonction $i(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$t(i(t) - 1)i'(t) = i(t)(t - 1).$$

Par conséquent $(t, i(t))$ est courbe intégrale par $(1, 1)$ du feuilletage du plan projective

$$x(y - 1) dy = y(x - 1) dx.$$

Cette équation a pour singularités $O = (0, 0)$, les points B, C d'intersection des axes avec la droite L_∞ , le point A d'intersection de L_∞ avec la droite qui passe par $(0, 0)$ et $D = (1, 1)$. Les axes, la droite L_∞ et la droite OA sont invariants par le feuilletage. Les droites OB et L_∞ sont les séparatrices du noeud-col B , de même les droites OC et L_∞ sont les séparatrices du noeud-col C . Les singularités O et A sont radiales, et le feuilletage possède intégrale première holomorphe du type $uv = \text{cste}$ dans un voisinage de D . Finalement, la droite OA est séparatrice de D . Le graphe de $i(t)$ est alors contenu dans l'autre séparatrice \mathcal{S} de la singularité D ; montrons qu'elle n'est pas algébrique. Supposons que \mathcal{S} soit une courbe algébrique de degré $d \in \mathbb{N}$. Cette courbe contient comme singularités seulement les points O, A et D (\mathcal{S} est en fait disjointe d'un voisinage de B et C , une fois que les séparatrices de B et C sont les axes et L_∞). Si \mathcal{S} passe m fois par O et n fois par A , on a

$$d = m + n + 1$$

par le Théorème de Bézout. D'autre côté, par le théorème d'indices appliqué à \mathcal{S} et ses singularités on trouve que

$$d^2 - m^2 - n^2 = -1;$$

les relations sont incompatibles.

Références

- [A] M. ARTIN, On the solutions of analytic equations, *Invent. Math.* **5** (1968), 277–291.
- [B-Me-S] M. BERTHIER, R. MEZIANI ET P. SAD, On the classification of nilpotent singularities, *Bull. Sci. Math.* **123(5)** (1999), 351–370.
- [C-L-S] C. CAMACHO, A. LINS NETO ET P. SAD, Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields, *J. Differential Geom.* **20(1)** (1984), 143–174.
- [C-Ma] D. CERVEAU ET J.-F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, *Astérisque* **97**, Société Mathématique de France, Paris (1982), 193 pp.
- [C-M] D. CERVEAU ET R. MOUSSU, Groupes d’automorphismes de $(C, 0)$ et équations différentielles $y dy + \dots = 0$, *Bull. Soc. Math. France* **116(4)** (1988), 459–488 (1989).
- [K] M. KLUGHERTZ, Existence d’une intégrale première méromorphe pour des germes de feuilletages à feuilles fermées du plan complexe, *Topology* **31(2)** (1992), 255–269.
- [L] A. LINS NETO, Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two, *J. Differential Geom.* **26(1)** (1987), 1–31.
- [Lo] F. LORAY, Analytic normal forms for non degenerate singularities of planar vector fields, Preprint IRMAR-Rennes (2004).
- [M-M] J.-F. MATTEI ET R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13(4)** (1980), 469–523.
- [Me] R. MEZIANI, Classification analytique d’équations différentielles $y dy + \dots = 0$ et espace de modules, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **27(1)** (1996), 23–53.
- [S-Z] E. STRÓŻYNA ET H. ŻOŁĄDEK, The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity, *J. Differential Equations* **179(2)** (2002), 479–537.
- [T] F. TAKENS, Singularities of vector fields, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), 47–100.

R. Meziani:
Université IBN TOFAIL
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B. P. 133 Kenitra
Maroc
E-mail address: rmeziani@yahoo.com

P. Sad:
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
Estrada Dona Castorina 110
22460-320 Rio de Janeiro
Brazil
E-mail address: sad@impa.br

Primera versió rebuda el 9 de juny de 2006,
darrera versió rebuda el 27 d'octubre de 2006.