

SUR LES AUTOMORPHISMES RÉGULIERS DE \mathbb{C}^k

HENRY DE THÉLIN

Abstract

We show the uniqueness for the measure of maximal entropy for regular automorphisms of \mathbb{C}^k .

Introduction

Soit $f: X \rightarrow X$ une application holomorphe ou méromorphe sur une variété complexe compacte X . Quand on sait construire une mesure invariante d'entropie maximale pour f , une question naturelle est de savoir si f en possède d'autres.

Lorsque f est une application de Hénon de \mathbb{C}^2 (voir [1]), un Hénon-Like (voir [11]), ou un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ (voir [17] et [18] pour la dimension 1 et [3] pour la dimension supérieure), f possède une unique mesure d'entropie maximale.

Dans cet article, nous nous intéressons à cette question pour les automorphismes réguliers de \mathbb{C}^k (voir [22] ou le Paragraphe 1 pour la définition).

Soit f un automorphisme régulier de \mathbb{C}^k . On peut étendre f en une application birationnelle de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, que l'on notera encore f . Dans la suite, on munit $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de sa métrique de Fubini-Study et lorsque l'on parlera d'entropie topologique pour f , ce sera par rapport à cette métrique. Dans [22], N. Sibony a construit la mesure d'équilibre μ de f et celle-ci est d'entropie maximale (voir [13]). L'objectif de cet article est alors de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. *La mesure μ est l'unique mesure d'entropie maximale de \mathbb{C}^k pour f .*

Pour démontrer ce théorème, nous suivrons l'approche utilisée par E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie dans le cas des applications de Hénon (voir [1]). Il s'agira de changer un certain nombre d'arguments qui sont propres à la dimension 2.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 37Fxx, 32H50, 37A35, 37Dxx.

Key words. Complex dynamics, currents, entropy.

1. Rappels

Dans ce paragraphe, nous faisons des rappels sur les automorphismes réguliers de \mathbb{C}^k et nous donnons quelques propriétés qui nous serviront dans notre démonstration du théorème.

1.1. Automorphismes réguliers de \mathbb{C}^k .

Soit f un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^k . On peut étendre f en une application birationnelle de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et nous noterons encore f cette extension. Soient I_+ et I_- les ensembles d'indétermination respectivement de f et f^{-1} . L'automorphisme f est dit régulier lorsque $I_+ \cap I_- = \emptyset$ (voir [22]).

Dans toute la suite, nous considérerons f un automorphisme régulier de \mathbb{C}^k . Voici quelques unes de ses propriétés (voir [22] et [10]).

Il existe un entier s tel que $\dim I_+ = k - s - 1$ et $\dim I_- = s - 1$. Ces ensembles sont contenus dans l'hyperplan à l'infini L_∞ et on a $f(L_\infty \setminus I_+) = f(I_-) = I_-$ et $f^{-1}(L_\infty \setminus I_-) = f^{-1}(I_+) = I_+$. Si d_\pm désignent les degrés algébriques de f et f^{-1} , alors $d_+^s = d_-^{k-s}$.

Rappelons maintenant la définition des degrés dynamiques d_q de f (voir [21]). Soit ω la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ normalisée de sorte que $\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \omega^k = 1$. On pose $\delta_q(f) := \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} f^*(\omega^q) \wedge \omega^{k-q}$ pour $q = 0, \dots, k$ et on a :

$$d_q := \lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_q(f^n))^{1/n}.$$

Les automorphismes réguliers de \mathbb{C}^k sont des cas particuliers des applications birationnelles régulières de T.-C. Dinh et N. Sibony (voir [9]). Il résulte de leur article [9] que $d_q = d_+^q$ pour $q = 0, \dots, s$ et $d_q = d_-^{k-q}$ si $q = s, \dots, k$.

Soient K_+ (respectivement K_-) l'ensemble des points z de \mathbb{C}^k pour lesquels l'orbite $(f^n(z))_{n \geq 0}$ (respectivement $(f^{-n}(z))_{n \geq 0}$) est bornée dans \mathbb{C}^k . On a $\overline{K_\pm} = K_\pm \cup I_\pm$. L'ensemble I_+ est attirant pour f^{-1} : cela signifie qu'il existe un voisinage V_+ de I_+ tel que $f^{-1}(V_+) \Subset V_+$ et $\cap_{n \geq 0} f^{-n}(V_+) = I_+$. De même, l'ensemble I_- est attirant pour f et on notera V_- un voisinage de I_- disjoint de V_+ , avec $f(V_-) \Subset V_-$ et $\cap_{n \geq 0} f^n(V_-) = I_-$. Il découle de ces propriétés que le bassin d'attraction pour f^{-1} de I_+ est égal à $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus \overline{K_-}$ et que le bassin d'attraction pour f de I_- est égal à $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus \overline{K_+}$.

La suite de $(1, 1)$ courant $d_\pm^n(f^{\pm n})^* \omega$ converge vers le courant de Green T_\pm . Rappelons brièvement une démonstration (celle de [14]) de cette convergence car elle nous sera utile dans la suite.

On a $\frac{f^*\omega}{d_+} = \omega + dd^c u$ où u est une fonction quasi-psh qui est lisse en dehors de I_+ et qui peut être supposée négative. En itérant cette relation, on a :

$$T_{n,+} = \frac{(f^n)^*\omega}{d_+^n} = \omega + dd^c \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u \circ f^i}{d_+^i}.$$

La suite $v_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u \circ f^i}{d_+^i}$ est bornée en dehors de V_+ . Elle décroît donc vers une fonction quasi-psh v_∞ qui est continue en dehors de I_+ . De plus la suite $\omega + dd^c v_n$ converge au sens des courants vers $T_+ := \omega + dd^c v_\infty$.

Les courants T_\pm vérifient $f^*T_+ = d_+T_+$ et $f_*T_- = d_-T_-$. Les puissances T_+^s et T_-^{k-s} sont bien définies. T.-C. Dinh et N. Sibony ont démontré dans [10] que T_+^s est l'unique courant positif fermé de bidegré (s, s) et de masse 1 qui a son support dans $\overline{K_+}$. De même, T_-^{k-s} est l'unique courant positif fermé de bidegré $(k-s, k-s)$ et de masse 1 qui a son support dans $\overline{K_-}$.

La mesure $\mu = T_+^s \wedge T_-^{k-s}$ est bien définie et son support est dans le bord de $K := K_+ \cap K_-$. Cette mesure est une probabilité invariante, mélangeante (voir [22], [9] et [13]) et d'entropie maximale $\log d_s = \log d_+^s$ (voir [13]).

Dans le paragraphe suivant, nous allons donner quelques propriétés techniques dont on se servira dans notre démonstration.

1.2. Quelques propriétés.

Dans ce paragraphe on considère un ouvert Ω inclus dans $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_+) \cap (\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_-)$ et ξ un sous-ensemble analytique lisse de Ω de dimension pure s qui se prolonge un petit peu. Comme $f^{-1}(V_+) \Subset V_+$ et $f(V_-) \Subset V_-$, $f^n(\Omega)$ vit dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_+$ et $f^{-n}(\Omega)$ est dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_-$. En particulier f^n et f^{-n} sont holomorphes sur Ω pour $n \geq 0$.

T_+ possède un potentiel qui est continu sur Ω , on peut donc définir par récurrence les wedges $[\xi] \wedge T_+^p$ pour p compris entre 0 et s (voir [2]). Nous allons donner quelques propriétés techniques sur ces wedges dont on se servira dans nos démonstrations.

Lemme 2. *Soit $0 \leq \psi \leq 1$ une fonction C^∞ à support compact dans Ω . Alors, on a :*

$$I = \int \psi[\xi] \wedge \omega^l \wedge \frac{(f^{i_1})^*\omega}{d_+^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{(f^{i_p})^*\omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^*T_{m,+}^{s-l-p}}{d_+^{(s-l-p)n}} \leq K(\xi, \psi)$$

pour tous entiers l et p compris entre 0 et s avec $0 \leq l + p \leq s$ et tous entiers i_1, \dots, i_p, m et n . De plus on a la même majoration si on remplace $T_{m,+}$ par T_+ .

Démonstration: On fait la preuve pour $T_{m,+}$ de sorte que ce soit la même pour T_+ .

On va commencer par remplacer les $\frac{(f^n)^* T_{m,+}}{d_+^n}$ par des ω ou des $\frac{(f^n)^* \omega}{d_+^n}$.

On a $T_{m,+} = \omega + dd^c v_m$ (voir les rappels précédents pour les notations). En particulier,

$$I = \int \psi[\xi] \wedge \omega^l \wedge \frac{(f^{i_1})^* \omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^* \omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^* \omega}{d_+^n} \wedge \frac{(f^n)^* T_{m,+}^{s-l-p-1}}{d_+^{(s-l-p-1)n}} \\ + \int \frac{v_m \circ f^n}{d_+^n} dd^c \psi \wedge [\xi] \wedge \omega^l \wedge \frac{(f^{i_1})^* \omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^* \omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^* T_{m,+}^{s-l-p-1}}{d_+^{(s-l-p-1)n}}.$$

Mais comme $f^r(\Omega)$ est dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_+$ pour tout $r \geq 0$ et que u est bornée sur cet ensemble, on en déduit que $|v_m \circ f^n| \leq K$ dans Ω . Cela implique que

$$\left| \int \frac{v_m \circ f^n}{d_+^n} dd^c \psi \wedge [\xi] \wedge \omega^l \wedge \frac{(f^{i_1})^* \omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^* \omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^* T_{m,+}^{s-l-p-1}}{d_+^{(s-l-p-1)n}} \right| \\ \leq \frac{K(\psi)}{d_+^n} \int \psi_1[\xi] \wedge \omega^{l+1} \wedge \frac{(f^{i_1})^* \omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^* \omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^* T_{m,+}^{s-l-p-1}}{d_+^{(s-l-p-1)n}},$$

où ψ_1 est une fonction C^∞ à support compact dans Ω et comprise entre 0 et 1. On obtient alors

$$I \leq \int \psi[\xi] \wedge \omega^l \wedge \frac{(f^{i_1})^* \omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^* \omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^* \omega}{d_+^n} \wedge \frac{(f^n)^* T_{m,+}^{s-l-p-1}}{d_+^{(s-l-p-1)n}} \\ + K(\psi) \int \psi_1[\xi] \wedge \omega^{l+1} \wedge \frac{(f^{i_1})^* \omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^* \omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^* T_{m,+}^{s-l-p-1}}{d_+^{(s-l-p-1)n}},$$

et on a ainsi éliminé un $T_{m,+}$. En recommençant ce procédé avec les deux intégrales ci-dessus, on prouve (quitte à renommer la constante $K(\psi)$) :

$$I \leq K(\psi) \sum_{l'=l}^{s-p} \int \phi_{l'}[\xi] \wedge \omega^{l'} \wedge \frac{(f^{i_1})^* \omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^* \omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^* \omega^{s-p-l'}}{d_+^{(s-p-l')n}},$$

où les $\phi_{l'}$ sont C^∞ comprises entre 0 et 1 et à support compact dans Ω .

Maintenant, en utilisant la même méthode, on va enlever les $\frac{(f^i)^* \omega}{d_+^i}$.

Notons $J = \int \phi_{l'}[\xi] \wedge \omega^{l'} \wedge \frac{(f^{i_1})^*\omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^*\omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^*\omega^{s-p-l'}}{d_+^{(s-p-l')n}}$. On a, si $l' < s$, par exemple

$$J = \int \phi_{l'}[\xi] \wedge \omega^{l'+1} \wedge \frac{(f^{i_2})^*\omega}{d_+^{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^*\omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^*\omega^{s-p-l'}}{d_+^{(s-p-l')n}} \\ + \int v_{i_1} dd^c \phi_{l'} \wedge [\xi] \wedge \omega^{l'} \wedge \frac{(f^{i_2})^*\omega}{d_+^{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^*\omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^*\omega^{s-p-l'}}{d_+^{(s-p-l')n}}.$$

Comme précédemment,

$$\left| \int v_{i_1} dd^c \phi_{l'} \wedge [\xi] \wedge \omega^{l'} \wedge \frac{(f^{i_2})^*\omega}{d_+^{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^*\omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^*\omega^{s-p-l'}}{d_+^{(s-p-l')n}} \right| \\ \leq K(\psi) \int \phi_{l',1}[\xi] \wedge \omega^{l'+1} \wedge \frac{(f^{i_2})^*\omega}{d_+^{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_p})^*\omega}{d_+^{i_p}} \wedge \frac{(f^n)^*\omega^{s-p-l'}}{d_+^{(s-p-l')n}}$$

pour une fonction $0 \leq \phi_{l',1} \leq 1$ qui est C^∞ à support compact dans Ω .

On a donc éliminé un $\frac{(f^i)^*\omega}{d_+^i}$ et en recommençant ce procédé on obtient le lemme. \square

Lemme 3. Soit $0 \leq \psi \leq 1$ une fonction C^∞ à support compact dans Ω . Alors, on a :

$$I = \int \psi[\xi] \wedge \frac{(f^{i_1})^*\omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_s})^*\omega}{d_+^{i_s}} \leq \int [\xi] \wedge T_+^s + \frac{K(\xi, \psi)}{d_+^{i_1}}$$

pour tous entiers $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s$.

Démonstration: La démonstration est du même style que la précédente : il s'agit de remplacer les $\frac{(f^i)^*\omega}{d_+^i}$ par des T_+ .

On a en effet :

$$I = \int \psi[\xi] \wedge \frac{(f^{i_1})^*\omega}{d_+^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_s})^*\omega}{d_+^{i_s}} \\ = \int \psi[\xi] \wedge T_+ \wedge \frac{(f^{i_2})^*\omega}{d_+^{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_s})^*\omega}{d_+^{i_s}} \\ + \int (v_{i_1} - v_\infty) dd^c \psi \wedge [\xi] \wedge \frac{(f^{i_2})^*\omega}{d_+^{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{(f^{i_s})^*\omega}{d_+^{i_s}}.$$

Comme $f^r(\Omega)$ est dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_+$ pour tout $r \geq 0$ et que u est bornée sur cet ensemble, on en déduit que $|v_{i_1} - v_\infty| \leq \frac{K}{d_+^{i_1}}$ dans Ω . Cela implique

que

$$I \leq \int \psi[\xi] \wedge T_+ \wedge \frac{(f^{i_2})^* \omega}{d_+^{i_2}} \wedge \cdots \wedge \frac{(f^{i_s})^* \omega}{d_+^{i_s}} \\ + \frac{K(\psi)}{d_+^{i_1}} \int \psi_1[\xi] \wedge \omega \wedge \frac{(f^{i_2})^* \omega}{d_+^{i_2}} \wedge \cdots \wedge \frac{(f^{i_s})^* \omega}{d_+^{i_s}}$$

où ψ_1 est une fonction C^∞ à support compact dans Ω et comprise entre 0 et 1. Finalement, en utilisant le lemme précédent (quitte à renommer la constante $K(\xi, \psi)$),

$$I \leq \int \psi[\xi] \wedge T_+ \wedge \frac{(f^{i_2})^* \omega}{d_+^{i_2}} \wedge \cdots \wedge \frac{(f^{i_s})^* \omega}{d_+^{i_s}} + \frac{K(\xi, \psi)}{d_+^{i_1}}.$$

On a donc remplacé un $\frac{(f^i)^* \omega}{d_+^i}$ par un T_+ et en recommençant s fois on obtient le lemme. \square

Lemme 4. Soit $0 \leq \psi \leq 1$ une fonction C^∞ à support compact dans Ω .

Si on note $S_n = \frac{(f^n)_*(\psi[\xi])}{d_+^{s_n}}$, alors

$$\|d(S_n \wedge T_{m_n, +}^p)\| \rightarrow 0 \text{ et } \|dd^c(S_n \wedge T_{m_n, +}^p)\| \rightarrow 0$$

pour toute suite m_n qui tend vers l'infini et tout entier p compris entre 0 et $s - 1$.

Démonstration: Dans le cas où $p = 0$ ce lemme est démontré par N. Sibony dans le Paragraphe 2.6 de [22]. Lorsque $p > 0$, il existe des versions proches de ce lemme dans [14]. Pour le confort du lecteur, nous allons quand même en donner une démonstration. Elle reposera comme dans [22] et [14] sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le point crucial est que l'on pousse en avant ξ qui est de dimension s et que le s -ème degré dynamique d_s est strictement plus grand que les autres (voir [7]).

Soit p un entier compris entre 0 et $s - 1$. On va commencer par contrôler $\|\partial(S_n \wedge T_{m_n, +}^p)\|$.

Par définition

$$\|\partial(S_n \wedge T_{m_n, +}^p)\| = \sup_{\phi \in \mathcal{F}(s-p-1, s-p)} |\langle \partial(S_n \wedge T_{m_n, +}^p), \phi \rangle|,$$

où $\mathcal{F}(s-p-1, s-p)$ est l'ensemble des formes lisses ϕ de bidegré $(s-p-1, s-p)$ et de norme inférieure ou égale à 1.

Remarque. Rappelons qu'ici $T_{m_n, +}^p$ est une forme lisse sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_+$ et que le support de S_n est aussi dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_+$. En particulier, $S_n \wedge T_{m_n, +}^p$ est défini globalement par $\langle S_n \wedge T_{m_n, +}^p, \phi' \rangle = \langle S_n, T_{m_n, +}^p \wedge \phi' \rangle$, où ϕ' est une forme lisse de bidegré $(s-p, s-p)$.

Si $\phi \in \mathcal{F}(s-p-1, s-p)$, on peut écrire

$$\phi = \sum_{i=1}^K \theta_i \wedge \Omega_i$$

où K est une constante qui dépend seulement de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, les θ_i sont des $(0, 1)$ formes lisses avec $\|\theta_i\| \leq 1$ et les Ω_i sont des $(s-p-1, s-p-1)$ formes lisses (fortement) positives et de norme inférieure à K . Pour majorer $|\langle \partial(S_n \wedge T_{m_n,+}^p), \phi \rangle|$, il suffit donc de majorer $|\langle \partial(S_n \wedge T_{m_n,+}^p), \theta \wedge \Omega \rangle|$ où θ est une $(0, 1)$ forme lisse et Ω est une $(s-p-1, s-p-1)$ forme lisse (fortement) positive avec $\|\theta\| \leq 1$ et $\|\Omega\| \leq 1$.

On a :

$$I = |\langle \partial(S_n \wedge T_{m_n,+}^p), \theta \wedge \Omega \rangle| = \left| \left\langle \frac{f_*^n(\partial\psi \wedge [\xi])}{d_+^{sn}}, T_{m_n,+}^p \wedge \theta \wedge \Omega \right\rangle \right|.$$

Si $\xi' \in \xi$ est suffisamment proche de ξ , on a :

$$I = \left| \int_{f^n(\xi')} \frac{f_*^n(\partial\psi)}{d_+^{sn}} \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \theta \wedge \Omega \right|.$$

Pour α et β des $(0, 1)$ formes lisses, on définit $(\alpha, \beta) := \int_{f^n(\xi')} i\alpha \wedge \bar{\beta} \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \Omega$ (voir [22], [14] et [7]). Le fait que $(\alpha, \alpha) \geq 0$ implique (via la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) que $|(\alpha, \beta)| \leq |(\alpha, \alpha)|^{1/2} |(\beta, \beta)|^{1/2}$. On en déduit que

$$I \leq \frac{1}{d_+^{sn}} \left| \int_{f^n(\xi')} f_*^n(i\partial\psi \wedge \bar{\partial\psi}) \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \Omega \right|^{1/2} \left| \int_{f^n(\xi')} i\theta \wedge \bar{\theta} \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \Omega \right|^{1/2}.$$

Mais $i\partial\psi \wedge \bar{\partial\psi} \leq K(\psi)\omega$ et $\Omega \leq K\omega^{s-p-1}$ avec K une constante qui ne dépend que de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ (car $\|\Omega\| \leq 1$). On en déduit que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{f^n(\xi')} f_*^n(i\partial\psi \wedge \bar{\partial\psi}) \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \Omega \right|^{1/2} \\ & \leq K'(\psi) \left| \int_{f^n(\xi')} f_*^n(\omega) \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \omega^{s-p-1} \right|^{1/2} \end{aligned}$$

qui est plus petit que $K(\psi, \xi)d_+^{n(s-1)/2}$ d'après le premier lemme. Il reste à majorer $\left| \int_{f^n(\xi')} i\theta \wedge \bar{\theta} \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \Omega \right|^{1/2}$. Mais $i\theta \wedge \bar{\theta} \wedge \Omega$ est inférieur

à $K\omega^{s-p}$, et en utilisant toujours le premier lemme, on obtient :

$$\left| \int_{f^n(\xi')} i\theta \wedge \bar{\theta} \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \Omega \right|^{1/2} \leq K(\psi, \xi) d_+^{sn/2}.$$

Finalement :

$$I \leq K(\psi, \xi) d_+^{-n/2}$$

(toujours quitte à renommer la constante $K(\psi, \xi)$) et cela démontre que $\|\partial(S_n \wedge T_{m_n,+}^p)\|$ converge vers 0.

De là, on en déduit que $\|d(S_n \wedge T_{m_n,+}^p)\| \rightarrow 0$.

Passons à $\|dd^c(S_n \wedge T_{m_n,+}^p)\| = \sup_{\phi \in \mathcal{F}(s-p-1, s-p-1)} |\langle dd^c(S_n \wedge T_{m_n,+}^p), \phi \rangle|$. Ici $\mathcal{F}(s-p-1, s-p-1)$ désigne l'ensemble des $(s-p-1, s-p-1)$ formes lisses de norme inférieure ou égale à 1.

Si ϕ est une telle $(s-p-1, s-p-1)$ forme, alors on peut la décomposer en une somme $\sum_{i=0}^K a_i \Omega_i$ où les a_i sont des nombres complexes de module plus petit que 1 et les Ω_i sont des $(s-p-1, s-p-1)$ formes lisses (fortement) positives de norme inférieure ou égale à K (ici K ne dépend que de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$). Il suffit donc de majorer

$$\left| \int_{f^n(\xi')} \frac{f_*^n(dd^c\psi)}{d_+^{sn}} \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \Omega \right|,$$

avec Ω une $(s-p-1, s-p-1)$ forme lisse positive et $\|\Omega\| \leq 1$ et $\xi' \in \xi$ suffisamment proche de ξ . Mais $-K(\psi)\omega \leq dd^c\psi \leq K(\psi)\omega$ et $\Omega \leq K'\omega^{s-p-1}$ donc

$$\left| \int_{f^n(\xi')} \frac{f_*^n(dd^c\psi)}{d_+^{sn}} \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \Omega \right| \leq K'(\psi) \left| \int_{f^n(\xi')} \frac{f_*^n(\omega)}{d_+^{sn}} \wedge T_{m_n,+}^p \wedge \omega^{s-p-1} \right| \leq K(\psi, \xi) d_+^{-n}$$

par le premier lemme. Cela démontre bien que $\|dd^c(S_n \wedge T_{m_n,+}^p)\| \rightarrow 0$. \square

Les lemmes que nous venons de démontrer vont permettre de prouver la proposition suivante.

Proposition 5. *Soit $0 \leq \psi \leq 1$ une fonction C^∞ à support compact dans Ω .*

Si on note $S_n = \frac{(f^n)_(\psi[\xi])}{d_+^{sn}}$, alors pour tout p compris entre 0 et s , on a*

$$S_n \wedge T_{m_n,+}^p \rightarrow c T_-^{k-s} \wedge T_+^p$$

avec $c = \int \psi[\xi] \wedge T_+^s$. Ici m_n est une suite quelconque d'entiers qui tend vers $+\infty$.

Démonstration: Ici les wedges $S_n \wedge T_{m_n,+}^p$ et $T_-^{k-s} \wedge T_+^p$ sont considérés de façon globale (voir la remarque au début de la preuve du lemme précédent) et pas juste définis dans un ouvert qui contient $f^n(\xi)$, sinon il n'y a pas de sens pour la convergence.

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur p .

Supposons que $p = 0$.

S_n est une suite de courants positifs, de masse

$$\int S_n \wedge \omega^s = \int \psi[\xi] \wedge \frac{(f^n)^* \omega^s}{d_+^{sn}} \leq K(\psi, \xi)$$

d'après le premier lemme. La suite S_n admet donc des sous-suites qui convergent. Soit S une de ces limites. La masse de S est égale à $c = \int \psi[\xi] \wedge T_+^s$ d'après la Proposition 2.6.1 de [22].

Montrons que $S = cT_-^{k-s}$. Si $c = 0$, S est nul et le résultat est vrai. Supposons maintenant $c > 0$. Le courant S/c est un $(k-s, k-s)$ courant positif, fermé d'après [22] (voir aussi le lemme précédent), de masse 1 et qui a son support dans $\overline{K_-}$. Mais d'après le Théorème 5.5.4 de [10], il est donc égal à T_-^{k-s} . Toute les valeurs d'adhérences de S_n converge donc vers cT_-^{k-s} et cela démontre le cas $p = 0$.

Supposons maintenant la propriété vraie au rang p (avec $p < s$) et montrons la au rang $p + 1$.

Si R est un courant de bidegré $(k-s+p, k-s+p)$, v est une fonction lisse et ϕ est une forme lisse de bidegré $(s-p-1, s-p-1)$, on a (via des intégrations par parties) :

Fait :

$$\langle R \wedge dd^c v, \phi \rangle = \langle dd^c(vR), \phi \rangle + 2\langle dR, vd^c \phi \rangle + \langle dd^c R, v\phi \rangle.$$

Considérons $R_n = S_n \wedge T_{m_n,+}^p$. Par hypothèse de récurrence, cette suite de courants converge vers $cT_-^{k-s} \wedge T_+^p$.

Soit ϕ une forme lisse de bidegré $(s-p-1, s-p-1)$. On doit montrer que $\langle R_n \wedge T_{m_n,+}, \phi \rangle$ converge vers $\langle cT_-^{k-s} \wedge T_+^{p+1}, \phi \rangle$.

On a

$$\langle R_n \wedge T_{m_n,+}, \phi \rangle = \langle R_n \wedge \omega, \phi \rangle + \langle R_n \wedge dd^c v_{m_n}, \phi \rangle.$$

Le premier terme $\langle R_n \wedge \omega, \phi \rangle$ converge vers $\langle cT_-^{k-s} \wedge T_+^p \wedge \omega, \phi \rangle$. Passons au deuxième terme. D'après le fait précédent :

$$\langle R_n \wedge dd^c v_{m_n}, \phi \rangle = \langle dd^c(v_{m_n} R_n), \phi \rangle + a_n + b_n$$

avec $a_n = 2\langle dR_n, v_{m_n} d^c \phi \rangle$ et $b_n = \langle dd^c R_n, v_{m_n} \phi \rangle$.

Les courants R_n vivent dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_+$. Sur cet ensemble, les fonctions v_{m_n} sont en valeur absolue bornée par une constante K indépendante de n . En particulier $2v_{m_n}d^c\phi$ et $v_{m_n}\phi$ sont des formes lisses et de norme bornée par une constante $K(\phi)$ et le lemme précédent implique que a_n et b_n tendent vers 0. Il reste à étudier $\langle dd^c(v_{m_n}R_n), \phi \rangle = \langle v_{m_n}R_n, dd^c\phi \rangle$. Mais sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_+$, v_{m_n} converge uniformément vers v_∞ (qui est donc continue sur cet ensemble) et R_n est une suite de courant positifs qui converge vers $cT_-^{k-s} \wedge T_+^p$ d'où

$$\langle v_{m_n}R_n, dd^c\phi \rangle = \langle v_\infty R_n, dd^c\phi \rangle + \langle (v_{m_n} - v_\infty)R_n, dd^c\phi \rangle$$

converge vers $\langle v_\infty cT_-^{k-s} \wedge T_+^p, dd^c\phi \rangle$. Cela termine la démonstration de la proposition. \square

2. Démonstration du théorème

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que μ est l'unique mesure d'entropie maximale de f dans \mathbb{C}^k . Nous allons suivre pour cela la méthode utilisée par E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie dans [1]. Le fait de ne plus être en dimension 2, nous obligera à changer un certain nombre d'arguments.

Expliquons tout d'abord, pourquoi on ne s'intéresse qu'aux mesures de \mathbb{C}^k . Si ν est une mesure invariante de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ pour f (vue comme application birationnelle) qui charge l'hyperplan à l'infini L_∞ alors elle est d'entropie strictement plus petite que $\log d_+^s$. En effet par définition de l'invariance d'une mesure pour les applications méromorphes, elle ne charge pas I_+ . Ensuite, comme elle est invariante, ν restreinte à l'hyperplan à l'infini L_∞ a toute sa masse sur I_- . Mais, en utilisant l'indicateur $\text{lov}()$ de Gromov (voir [12], [3] et [8]), on voit que l'entropie topologique de I_- est inférieure ou égale à $\log d_+^{s-1}$ car I_- est de dimension $s-1$, f est holomorphe sur I_- et $f(I_-) = I_-$. On en déduit que ν ne peut pas être d'entropie maximale.

Considérons donc ν une probabilité invariante de \mathbb{C}^k d'entropie maximale $\log d_+^s$.

Montrons tout d'abord que le support de ν est un compact de \mathbb{C}^k . La mesure ν peut être vue comme une probabilité de \mathbb{P}^k en la prolongeant trivialement sur l'hyperplan L_∞ . Cette mesure est invariante et ne peut pas charger V_+ . En effet, si $\nu(V_+) = \alpha > 0$, alors $\nu(\cap_{n \geq 0} f^{-n}(V_+)) = \alpha$ car $f^{-1}(V_+) \subset V_+$. On aurait donc que $\nu(I_+) > 0$ ce qui est absurde. De même, ν ne charge pas V_- . Maintenant, comme il y a un petit voisinage de L_∞ privé de V_+ qui s'envoie par f dans V_- , ce voisinage ne peut pas

être chargé par ν et on en déduit que le support de ν est un compact invariant $K(\nu)$ de \mathbb{C}^k .

Si on fait une décomposition ergodique de la mesure ν en

$$\nu = \int \nu_\alpha d\alpha,$$

on constate que presque toutes les mesures ergodiques ν_α sont d'entropie $\log d_+^s$. Pour démontrer le théorème, nous sommes donc ramenés à montrer que toute probabilité invariante, ergodique et d'entropie maximale est égale à μ . Dans toute la suite, nous supposons donc ν ergodique.

Comme le support de ν est un compact invariant $K(\nu)$ de \mathbb{C}^k , la fonction $\log d(\cdot, L_\infty)$ est intégrable pour ν (ici d est la distance de Fubini-Study de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$). Le Corollaire 3 de [6] implique alors que la mesure ν est hyperbolique avec

$$\chi_1 \geq \cdots \geq \chi_s \geq \frac{1}{2} \log d_+ > 0$$

et

$$0 > -\frac{1}{2} \log d_- \geq \chi_{s+1} \geq \cdots \geq \chi_k$$

où les χ_i désignent les exposants de Lyapounov de ν . On a alors l'existence de variétés stables et instables locales pour la mesure ν grâce à la théorie de Pesin (toute la dynamique se passe dans un compact de \mathbb{C}^k).

D'après un théorème de Ja. B. Pesin (voir [20] et [16]), il existe une partition mesurable f^{-1} -invariante ξ^{in} dont les fibres sont des ouverts dans les variétés instables locales et telle que

$$h_\nu(f) = h_\nu(f, \xi^{in}).$$

On va maintenant appliquer la méthode d'E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie (voir la Proposition 3.2 de [1]). Le point crucial pour appliquer cette méthode est la proposition suivante :

Proposition 6. *On a*

$$\int [\xi^{in}(x)] \wedge T_+^s > 0$$

pour ν presque tout point x .

Ici $\xi^{in}(x)$ désigne l'atome qui contient x de la partition ξ^{in} .

Dans [1], la démonstration de cette proposition passe par l'utilisation du principe du minimum pour les fonctions harmoniques (car $s = 1$). Ici nous remplacerons cet argument par une démonstration qui utilise la dynamique de l'application f . Admettons pour l'instant cette proposition et finissons la preuve du théorème.

2.1. Fin de la preuve du théorème.

Commençons par préciser quelques notations. Pour ν presque tout point x , on note $\xi^{in}(x)$ l'atome qui contient x de la partition ξ^{in} précédente. Par construction, $\xi^{in}(x)$ est un ouvert d'une variété instable locale (donc de dimension s) et il admet un prolongement $\tilde{\xi}^{in}(x)$. En particulier, si U_x désigne un voisinage de $\xi^{in}(x)$ de sorte que $\xi^{in}(x)$ soit un sous-ensemble analytique de U_x , on peut définir dans U_x la mesure $T_+^s \wedge [\xi^{in}(x)]$. C'est une mesure de masse finie car les potentiels de T_+ sont bornés sur un voisinage de $\xi^{in}(x)$. Cette mesure dans U_x peut être vue comme une mesure globale de \mathbb{CP}^k en posant $T_+^s \wedge [\xi^{in}(x)](B) = T_+^s \wedge [\xi^{in}(x)](B \cap U_x)$.

Maintenant, on peut suivre mot pour mot la preuve de la Proposition 3.2 de [1]. Il suffit de remplacer μ^+ par T_+^s et le degré d par d_+^s . On obtient que pour ν presque tout point x , la mesure

$$\eta_x = T_+^s \wedge [\xi^{in}(x)] / \rho(x)$$

avec $\rho(x) = \int T_+^s \wedge [\xi^{in}(x)] > 0$ est égale à la mesure conditionnelle $\nu_x = \nu(\cdot | \xi^{in}(x))$.

Ensuite, si on suit la preuve du Théorème 3.1 de [1], on obtient que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(\nu_x) \rightarrow \nu$$

pour ν presque tout point x .

Comme ν_x est égale à η_x , il reste à montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(\eta_x) \rightarrow \mu$$

et le théorème sera démontré.

Nous allons maintenant détailler cette convergence. On utilisera la définition globale de la mesure η_x sinon quand on pousse cette mesure par f^i , on obtient quelque chose de défini dans $f^i(U_x)$ et ces $f^i(U_x)$ n'ont pas de "limite". On utilisera en particulier les résultats démontrés dans le Paragraphe 1.2.

Soient ϕ une fonction continue et $\epsilon > 0$. On considère ψ_α une fonction C^∞ à support compact dans U_x qui est comprise entre 0 et 1, qui vaut 1 dans U_x privé d'un 2α -voisinage de ∂U_x et 0 dans un α -voisinage du bord de U_x . On a

$$\left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(\eta_x), \phi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(\psi_\alpha \eta_x), \phi \right\rangle + \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i((1 - \psi_\alpha) \eta_x), \phi \right\rangle.$$

Le second terme de la somme est égal à $\left\langle (1 - \psi_\alpha)\eta_x, \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ f^i \right\rangle$, qui en valeur absolue est inférieur à $\|\phi\|\eta_x(2\alpha - \text{voisinage de } U_x)$ qui est très petit devant ϵ si on prend α petit (les bords de ξ^{in} peuvent être pris génériques par rapport à T_+^s si on veut).

Passons au premier terme de la somme précédente.

Il est égal à

$$\frac{1}{\rho(x)} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle \frac{(f^i)^*(T_+^s)}{d_+^{si}} \wedge [\xi^{in}(x)]\psi_\alpha, \phi \circ f^i \right\rangle$$

car $f^*T_+^s = d_+^s T_+^s$. De plus, on a :

Fait :

$$\left\langle \frac{(f^i)^*(T_{m,+}^s)}{d_+^{si}} \wedge [\xi^{in}(x)]\psi_\alpha, \phi \circ f^i \right\rangle$$

converge vers

$$\left\langle \frac{(f^i)^*(T_+^s)}{d_+^{si}} \wedge [\xi^{in}(x)]\psi_\alpha, \phi \circ f^i \right\rangle$$

quand m tend vers l'infini.

La démonstration de ce fait est classique et passe si on veut par l'écriture $T_{m,+} = \omega + dd^c v_m$ et $T_+ = \omega + dd^c v_\infty$ (voir aussi le Paragraphe 1.2).

Maintenant, si on prend des m_i suffisamment grands par rapport à i et α , on a que la différence entre

$$\left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(\eta_x), \phi \right\rangle$$

et

$$\frac{1}{\rho(x)} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle \frac{(f^i)^*(T_{m_i,+}^s)}{d_+^{si}} \wedge [\xi^{in}(x)]\psi_\alpha, \phi \circ f^i \right\rangle$$

est petite devant ϵ .

Enfin, ce dernier terme est égal à :

$$\frac{1}{\rho(x)} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle T_{m_i,+}^s \wedge \frac{f_*^i(\psi_\alpha[\xi^{in}(x)])}{d_+^{si}}, \phi \right\rangle$$

qui converge vers

$$\left(\frac{\int \psi_\alpha[\xi^{in}(x)] \wedge T_+^s}{\rho(x)} \right) \langle \mu, \phi \rangle$$

quand n tend vers l'infini grâce à la Proposition 5.

Ce dernier est aussi proche que l'on veut de $\langle \mu, \phi \rangle$ si on prend α petit.

On a donc bien montré que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(\eta_x) \rightarrow \mu$$

et le théorème est démontré. \square

Il reste à prouver la Proposition 6 : ce sera l'objet du paragraphe suivant.

2.2. Démonstration de la proposition.

Dans ce paragraphe nous allons montrer que $\int [\xi^{in}(x)] \wedge T_+^s > 0$ pour ν presque tout point x .

Ici les arguments ne sont pas les mêmes que ceux utilisés par E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie. En effet, dans leur situation $s = 1$. Le fait que $\int [\xi^{in}(x)] \wedge T_+ = 0$ implique que le potentiel de T_+ est harmonique sur $\xi^{in}(x)$. Ils en déduisent alors une contradiction en utilisant le principe du minimum. Ce raisonnement ne peut pas être fait en dimension supérieure. Pour le remplacer, nous allons utiliser des arguments dynamiques qui vont utiliser une idée de S. E. Newhouse (voir [19]). Une autre approche possible m'a été signalée par R. Dujardin pour démontrer ce point là. Elle s'appuie sur la démonstration de la Proposition 5.1 de [11], en y injectant le théorème de Bézout pour les courants dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Nous espérons que notre approche "plus locale" pourra être étendue à certaines applications holomorphes ou méromorphes dans les variétés Kähleriennes compactes.

Soit

$$M := \left\{ x, \int [\xi^{in}(x)] \wedge T_+^s = 0 \right\}.$$

On va montrer que M est un ensemble négligeable pour ν . Soit $\epsilon > 0$. La mesure ν est hyperbolique avec s exposants strictement positifs et $k - s$ strictement négatifs : pour ν presque tout point on a donc l'existence d'une variété stable locale $\xi^{st}(x)$ de dimension $k - s$ et d'une variété instable locale $\xi^{in}(x)$ de dimension s (ici on note de la même façon la variété instable locale en x et l'élément de la partition ξ^{in} qui contient x : cela permet d'alléger les notations et cela est possible quitte à réduire la variété instable locale). Ces variétés sont des graphes de fonctions $\phi_x^{st} : B^{st}(x, r^{st}(x)) \rightarrow E^{in}(x)$ (respectivement $\phi_x^{in} : B^{in}(x, r^{in}(x)) \rightarrow E^{st}(x)$, quitte à réduire l'élément de ξ^{in} qui contient x dans la définition de l'ensemble M) (voir le Paragraphe 2.4 de [1] pour les notations et des rappels sur la théorie de Pesin). Si on

choisit $\alpha_0 > 0$ suffisamment petit et A suffisamment grand, on a que sur un ensemble Λ_{α_0} de x de mesure supérieure à $1 - \epsilon/4$ pour ν :

- $r^{in}(x)$, $r^{st}(x)$ et l'angle entre $E^{st}(x)$ et $E^{in}(x)$ sont supérieurs à $\alpha_0 > 0$.
- $\|\phi_x^{st}\|_{C^2} \leq A$ sur $B^{st}(x, r^{st}(x))$ et de même $\|\phi_x^{in}\|_{C^2} \leq A$ sur $B^{in}(x, r^{in}(x))$.
- $x \rightarrow E^{st}(x)$ et $x \rightarrow E^{in}(x)$ sont continues sur Λ_{α_0} (théorème de Lusin).
- Pour y dans $\xi^{st}(x)$ et $n \geq 0$, on a $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq Ae^{-(\lambda-\gamma)n}$ (avec $\lambda = \min\{|\chi_i|, \chi_i < 0\}$ et γ petit par rapport à λ).

Maintenant, par le théorème de Brin et Katok (voir [4]), on a

$$h_\nu(f) = \log d_+^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_n -\frac{1}{n} \log \nu(B_n(x, \delta))$$

pour ν presque tout point x . Donc, si on note

$$\Lambda_{\delta, n} = \{x, \nu(B_n(x, \delta)) \leq d_+^{-sn+\gamma n}\},$$

si on choisit δ assez petit (dans la suite on prendra aussi δ très petit devant α_0 et A), on a

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\epsilon}{8} &\leq \nu \left(\left\{ x, \liminf_n -\frac{1}{n} \log \nu(B_n(x, \delta)) \geq (s - \gamma/2) \log d_+ \right\} \right) \\ &\leq \nu(\cup_{n_0} \cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\delta, n}). \end{aligned}$$

En particulier, si on prend n_0 grand, on a $\nu(\cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\delta, n}) \geq 1 - \frac{\epsilon}{4}$. Dans la suite, on notera

$$\Lambda = \Lambda_{\alpha_0} \cap (\cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\delta, n})$$

qui est de mesure supérieure à $1 - \frac{\epsilon}{2}$ pour ν .

Il suffit maintenant de montrer que $M \cap \Lambda$ est inclus dans un ensemble de mesure inférieure à $\epsilon/2$.

Soit x_1, x_2, \dots, x_N un ensemble (n, δ) séparé de cardinal maximal dans $M \cap \Lambda$. On a

$$M \cap \Lambda \subset \cup_{i=1}^N B_n(x_i, \delta)$$

et pour $n \geq n_0$

$$\nu(\cup_{i=1}^N B_n(x_i, \delta)) \leq Nd_+^{-sn+\gamma n}.$$

Si on montre que N est inférieur à $d_+^{sn-2\gamma n}$, alors on aura bien montré que $M \cap \Lambda$ est inclus dans un ensemble de mesure plus petite que $\epsilon/2$. Il nous reste donc à majorer N .

On considère un découpage d'un voisinage du support de ν en cubes disjoints de taille $r = r(\delta, \alpha_0, A)$ que l'on va préciser au fur et à mesure. Fixons un de ces cubes $C(r)$. Si r est suffisamment petit (par rapport

à α_0) on a que pour x et y dans Λ qui sont dans le même cube $C(r)$, alors les directions $E^{st}(x)$ et $E^{st}(y)$ sont très proches (disons à une distance plus petite que $\alpha_0/1000$). De même pour $E^{in}(x)$ et $E^{in}(y)$ (cela provient de la continuité de $x \rightarrow E^{st}(x)$ et $x \rightarrow E^{in}(x)$ sur Λ_{α_0}). Par conséquent, quand on prend deux points x et y dans Λ qui sont dans le même cube $C(r)$, l'espace affine $E^{in}(x)$ rencontre $E^{st}(y)$ en un point qui se trouve dans un cube de taille $C(\alpha_0)r$ (centré comme $C(r)$) et de même $E^{in}(y)$ rencontre $E^{st}(x)$. Ici $C(\alpha_0)$ dépend de l'angle entre les espaces stables et instables et celui-ci est minoré par α_0 .

Ces points d'intersection vont impliquer que d'une part $\xi^{st}(x)$ rencontre $\xi^{in}(y)$ dans le cube de taille $2C(\alpha_0)r$ et d'autre part $\xi^{in}(x)$ rencontre $\xi^{st}(y)$ dans ce même cube. En effet soit par exemple z le point d'intersection de $E^{in}(x)$ avec $E^{st}(y)$. On considère le polydisque $P = B_1 \times B_2$ de taille r centré en z construit à partir de ces deux espaces (B_1 est la boule de centre z et de rayon r dans $E^{in}(x)$ et B_2 celle de centre z et de rayon r dans $E^{st}(y)$). Maintenant, dans le cube de taille $2C(\alpha_0)r$ (qui contient P si on veut) la différentielle de ϕ_x^{in} est majorée par $2\sqrt{k}AC(\alpha_0)r$ car la différentielle seconde est majorée par A et que la variété instable est tangente à $E^{in}(x)$ en x . De même pour la variété stable en y . En particulier, dans le cube $2C(\alpha_0)r$, la distance entre le graphe de ϕ_x^{in} et $E^{in}(x)$ est plus petite que $4kA(C(\alpha_0)r)^2$ (de même pour l'autre). Comme $AC(\alpha_0)r$ peut être pris petit (si on prend $r = r(\delta, \alpha_0, A)$), on en déduit que la variété instable en x , $\xi^{in}(x)$ rencontre la variété stable $\xi^{st}(y)$ de y en (au moins) un point du cube C de taille $2C(\alpha_0)r$ (voir par exemple la Proposition S.3.7 de [15]). De la même façon, $\xi^{st}(x)$ rencontre $\xi^{in}(y)$ dans C . Maintenant, on peut choisir r petit par rapport à δ de sorte que le diamètre de $f^n(\xi^{st}(x) \cap C)$ soit très petit devant $\delta/4$ pour tout $n \geq 0$ et x dans le cube $C(r) \cap \Lambda$. En effet, si n est grand cela provient directement du contrôle $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq Ae^{-(\lambda-\gamma)n}$ pour y dans $\xi^{st}(x)$. Pour les autres n il suffit de réduire la taille de la boîte (i.e. prendre r petit) et d'utiliser que f est holomorphe et le théorème des accroissements finis.

Si on reprend les N points x_1, x_2, \dots, x_N de $M \cap \Lambda$ que l'on avait, on peut trouver un cube de taille r , $C(r)$ qui contient au moins Nr^{2k} points x_i (à une constante près qui dépend du diamètre du support de ν que l'on oubliera). Fixons un point x dans $C(r) \cap M \cap \Lambda$ indépendant de n (i.e. on fixe un x dans tous les cubes qui contiennent un point de $M \cap \Lambda$). Sa variété instable $\xi^{in}(x)$ intersectée avec le cube C de taille $2C(\alpha_0)r$ qui est centré comme $C(r)$, rencontre les variétés stables $\xi^{st}(x_j) \cap C$ des x_j qui sont dans $C(r)$. Notons z_1, z_2, \dots, z_{N_0} ces points d'intersection

avec la convention de ne prendre qu'un seul point d'intersection entre $\xi^{in}(x) \cap C$ et $\xi^{st}(x_j) \cap C$ si jamais il y en a plusieurs. On a $N_0 \geq Nr^{2k}$.

C'est ce nombre N_0 que nous allons maintenant majorer en utilisant un argument d'entropie. En effet, remarquons tout d'abord (comme dans [19]) que les points z_1, z_2, \dots, z_{N_0} sont $(n, \delta/2)$ séparés. En effet prenons par exemple z_1 et z_2 . On a $z_1 \in \xi^{st}(x_j) \cap C$ et $z_2 \in \xi^{st}(x_l) \cap C$ avec $j \neq l$. Comme x_j et x_l sont (n, δ) séparés, il existe un entier p entre 0 et $n-1$ tel que $d(f^p(x_j), f^p(x_l)) \geq \delta$. Mais comme les diamètres de $f^p(\xi^{st}(x_j) \cap C)$ et de $f^p(\xi^{st}(x_l) \cap C)$ sont inférieurs à $\delta/4$ on en déduit bien que la distance entre $f^p(z_1)$ et $f^p(z_2)$ est supérieure à $\delta/2$. En conclusion, si on sait majorer le cardinal d'un ensemble $(n, \delta/2)$ séparé dans la variété instable $\xi^{in}(x) \cap C$ par $d_+^{sn-2\gamma n}$, alors N sera majoré par $r^{-2k} d_+^{sn-2\gamma n}$ et la proposition sera démontrée.

Il nous reste donc à majorer le cardinal d'un ensemble $(n, \delta/2)$ séparé dans la variété instable $\xi^{in}(x) \cap C$ (où x est dans $M \cap \Lambda$). Cela va se faire en deux étapes. Dans la première nous allons majorer l'entropie par un volume comme dans [12]. Ensuite ce volume sera majoré en utilisant que $\int [\xi^{in}(x)] \wedge T_+^s = 0$ et la convergence vers T_+^s . C'est une idée utilisée dans [5], pour montrer que pour un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de degré d , l'entropie topologique en dehors du support de la mesure de Green est majorée par $\log(d)$.

Majoration de l'entropie par un volume.

On va utiliser ici l'argument de Gromov (voir [12]). Notons C_δ le cube de taille $2C(\alpha_0)r + \delta$ qui est centré comme C et $\xi_\delta^{in}(x)$ l'intersection de $\xi^{in}(x)$ avec C_δ . Comme δ est petit devant α_0 et A , la distance entre le bord de $\xi^{in}(x)$ et le cube C_δ est plus grande que $\sqrt{k}\delta$.

On considère le multigraphe $\Gamma_n = \{(y, f(y), \dots, f^{n-1}(y)), y \in \xi_\delta^{in}(x)\}$. L'ensemble des points $(n, \delta/2)$ séparés z_1, z_2, \dots, z_{N_0} induisent, via leurs n -orbites, un ensemble F de Γ_n qui est $\delta/2$ séparé dans $(\mathbb{CP}^k)^n$ pour la métrique produit. Cela signifie que l'on a N_0 boules disjointes $B(a, \delta/4)$ avec $a \in F$ dans $(\mathbb{CP}^k)^n$. Par le théorème de Lelong, le volume de $\Gamma_n \cap B(a, \delta/4)$ est minoré par une constante $c(\delta)$ car le bord de Γ_n est en dehors de la boule $B(a, \delta/4)$. En effet, comme les points z_1, z_2, \dots, z_{N_0} sont dans C , la distance entre ces points et le bord de $\xi_\delta^{in}(x)$ est supérieure à δ . On vient donc de montrer que le volume de Γ_n est supérieur à $c(\delta)N_0$. Il reste donc à majorer ce volume par $d_+^{sn-2\gamma n}$.

Majoration du volume de Γ_n .

Dans $(\mathbb{CP}^k)^n$, on notera Π_i les projections sur les facteurs du produit et on munit $(\mathbb{CP}^k)^n$ de la forme de Kähler $\omega_n = \sum_{i=1}^n \Pi_i^* \omega$. Le volume

de Γ_n est alors égal à

$$\int_{\Gamma_n} (\omega_n)^s = \sum_{0 \leq n_1, \dots, n_s \leq n-1} \int_{\xi_\delta^{in}(x)} (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_s})^* \omega.$$

Il s'agit donc de majorer les termes $\int_{\xi_\delta^{in}(x)} (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_s})^* \omega$. Soit ψ une fonction C^∞ à support compact comprise entre 0 et 1, qui vaut 1 dans le cube C_δ et 0 en dehors du cube de taille $2C(\alpha_0)r + 2\delta$ centré comme C et C_δ . Il s'agit donc de majorer les termes

$$\int \psi[\xi^{in}(x)] \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_s})^* \omega.$$

On va considérer pour cela deux cas : soit tous les n_i sont supérieurs ou égaux à $n/2$, soit il existe un des n_i inférieur à $n/2$.

1^{er} cas : tous les n_i sont supérieurs à $n/2$:

En utilisant le Lemme 3, on obtient :

$$\int \psi[\xi^{in}(x)] \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_s})^* \omega \leq d_+^{n_1 + \dots + n_s} \left(0 + \frac{K(\xi^{in}(x), \psi)}{d^{n/2}} \right)$$

car x est dans M .

On en déduit que

$$\int \psi[\xi^{in}(x)] \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_s})^* \omega \leq K(\xi^{in}(x), \psi) d_+^{ns-n/2}.$$

2^{eme} cas : un des n_i est inférieur à $n/2$:

Toujours par le Lemme 3, on a :

$$\int \psi[\xi^{in}(x)] \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_s})^* \omega \leq K(\xi^{in}(x), \psi) d_+^{n_1 + \dots + n_s}$$

qui est majoré par $K(\xi^{in}(x), \psi) d_+^{ns-n/2}$ car un des n_i est plus petit que $n/2$.

Cela conclut la démonstration de la proposition et donc celle du théorème. \square

Références

- [1] E. BEDFORD, M. LYUBICH, ET J. SMILLIE, Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents, *Invent. Math.* **112**(1) (1993), 77–125.
- [2] E. BEDFORD ET B. A. TAYLOR, A new capacity for plurisubharmonic functions, *Acta Math.* **149**(1–2) (1982), 1–40.

- [3] J.-Y. BRIEND ET J. DUVAL, Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **93** (2001), 145–159.
- [4] M. BRIN ET A. KATOK, On local entropy, in : “*Geometric dynamics*” (Rio de Janeiro, 1981), Lecture Notes in Math. **1007**, Springer, Berlin, 1983, pp. 30–38.
- [5] H. DE THÉLIN, Un phénomène de concentration de genre, *Math. Ann.* **332**(3) (2005), 483–498.
- [6] H. DE THÉLIN, Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes, *Invent. Math.* **172**(1) (2008), 89–116.
- [7] H. DE THÉLIN, Ahlfors’ currents in higher dimension, Preprint (2008), arXiv :0802.1081.
- [8] T.-C. DINH ET N. SIBONY, Une borne supérieure pour l’entropie topologique d’une application rationnelle, *Ann. of Math. (2)* **161**(3) (2005), 1637–1644.
- [9] T.-C. DINH ET N. SIBONY, Dynamics of regular birational maps in \mathbb{P}^k , *J. Funct. Anal.* **222**(1) (2005), 202–216.
- [10] T.-C. DINH ET N. SIBONY, Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics, *Acta Math.* **203**(1) (2009), 1–82.
- [11] R. DUJARDIN, Hénon-like mappings in \mathbb{C}^2 , *Amer. J. Math.* **126**(2) (2004), 439–472.
- [12] M. GROMOV, On the entropy of holomorphic maps, *Enseign. Math. (2)* **49**(3–4) (2003), 217–235.
- [13] V. GUEDJ, Courants extrémaux et dynamique complexe, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38**(3) (2005), 407–426.
- [14] V. GUEDJ ET N. SIBONY, Dynamics of polynomial automorphisms of \mathbb{C}^k , *Ark. Mat.* **40**(2) (2002), 207–243.
- [15] A. KATOK ET B. HASSELBLATT, “*Introduction to the modern theory of dynamical systems*”, with a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **54**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [16] F. LEDRAPPIER ET J.-M. STRELCYN, A proof of the estimation from below in Pesin’s entropy formula, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **2**(2) (1982), 203–219 (1983).
- [17] M. JU. LJUBICH, Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **3**(3) (1983), 351–385.

- [18] R. MAÑÉ, On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **14**(1) (1983), 27–43.
- [19] S. E. NEWHOUSE, Entropy and volume, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8***, Charles Conley Memorial Issue (1988), 283–299.
- [20] J.A. B. PESIN, A description of the π -partition of a diffeomorphism with an invariant measure, (Russian), *Mat. Zametki* **22**(1) (1977), 29–44; English translation : *Math. Notes* **22**(1) (1977), 506–515 (1978).
- [21] A. RUSSAKOVSKII ET B. SHIFFMAN, Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics, *Indiana Univ. Math. J.* **46**(3) (1997), 897–932.
- [22] N. SIBONY, Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , in : “*Dynamique et géométrie complexes*” (Lyon, 1997), Panor. Synthèses **8**, Soc. Math. France, Paris, 1999, pp. ix–x, xi–xii, 97–185.

Université Paris-Sud (Paris 11)
 Mathématique
 Bât. 425
 91405 Orsay
 France
E-mail address: `henry.de-thelin@math.u-psud.fr`

Primera versió rebuda el 24 de febrer de 2009,
 darrera versió rebuda el 9 de juliol de 2009.