PUNTOS DE REPOSO GENERICOS Y TRAYECTORIAS PERIODICAS DE SEMISISTEMAS DINAMICOS DEFINIDOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES.

Tesis presentada para aspirar
al grado de Doctor en Ciencias
por Carlos Perelló Valls.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BARCELONA
Bellaterra, Julio de 1975

Depósito Legal B.12020-1976

Esta tesis doctoral fue dirigida por el Dr. D. FLORENCIO DEL CASTILLO ABANADES, y fue leída el día 29 de septiembre de 1975 en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Barcelona ante el siguiente tribunal

PRESIDENTE

Dr. D. Juan Augé Farreras

VOCALES

Dr. D. Joaquín María Cascante Dávila

Dr. D. Juan Luis Cerdá Martín

Dr. D. Florencio del Castillo Abánades

VOCAL SECRETARIO

Dr. D. Julián Cufí Sobregrau

Calificación :

SOBRESALIENTE "CUM LAUDE"

I N D I C E

INTRODUCCION

Una ecuación diferencial funcional es una condición de dependencia funcional entre una función de variable real (generalmente con valores en un espacio euclidiano de dimensión finita), y sus derivadas. Si esta dependencia es sólo entre los valores de la función y sus derivadas para un mismo valor de t y para toda t en cierto intervalo, se trata de una ecuación diferencial ordinaria. La definición precisa de las ecuaciones de que nos vamos a ocupar requiere cierta notación, y se da en las primeras secciones de este trabajo.

Ejemplos de ecuaciones como las que vamos a tratar son

$$x'(t) = x(t-1)$$

$$x'(t) = ax(t-1) + bx'(t-1)$$

$$x''(t) = f(x(t-1), x(t-2), x'(t-3)) ,$$

que se suelen llamar ecuaciones difero-diferenciales.

Otro ejemplo sería

$$x'(t) = g\left(\int_{-1}^{0} d\alpha(\theta)x(t+\theta), \int_{-1}^{0} d\beta(\theta)x'(t+\theta)d\theta\right) ,$$

en que la derivada de x para el valor t depende no sólo de los valores de x en t, sino de los valores de x y de x' en todo un intervalo.

En nuestras ecuaciones pediremos que este intervalo de dependencia sea siempre de longitud finita y uniformemente acotado. En este caso se habla de ecuaciones diferenciales funcionales con retraso finito.

Estas ecuaciones aparecen frecuentemente en la técnica, sobre todo como modelos de sistemas en que se emplea un tiempo finito en la transmisión de información o bien en los llamados sistemas "con memoria'.

Si se quiere plantear un problema de valor inicial para estas ecuaciones, no basta para determinar en forma única la solución, con dar el valor de x en 0, sino que habrá que dar los valores de x en todo el intervalo de "memoria" previo.

Así, por ejemplo, en la primera ecuación que hemos escrito, habría que dar los valores de x en el intervalo $[-1,0]$, digamos.

Para una clase amplia de ecuaciones, que incluye todas las llamadas del tipo retardado y una parte importante de las llamadas del tipo neutro, resulta que el problema así puesto está bien planteado. De hecho existirá una única solución con una condición inicial dada en $t=0$, definido para un cierto intervalo $[0,\tau)$ y el valor de esta solución en t dependerá continuamente del valor inicial. Resulta entonces que para esta clase de ecuaciones se tendrá que en un cierto espacio de funciones, a saber en el espacio de funciones continuas en un intervalo cerrado de longitud igual que el retraso máximo, quedará definido lo que se llama un "semisistema dinámico local".

Para definiciones y ejemplos de ecuaciones de los tipos retardado y neutro, referiremos a los libros [1] y [2].

En la teoría de los sistemas dinámicos definidos por campos vectoriales diferenciables, tiene un lugar importante el estudio de los puntos de reposo (singularidades) genéricas (por "genérico" se entiende que las propiedades que nos interesan (topológicas en este caso) son poseidas por la "generalidad" de los campos). A estos puntos de reposo genéricos están asociadas unas variedades invariantes asintóticas que juegan un papel básico en la teoría de la estabilidad estructural y las propiedades genéricas de los sistemas dinámicos diferenciables (ver [3]).

Por otro lado son importantes los métodos para determinar la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales, tanto por su interés dentro de la teoría de soluciones, como porque las trayectorias periódicas juegan un papel importante en el aspecto geométrico de las ecuaciones.

El objeto de esta tesis es establecer en el caso de los semisistemas dinámicos definidos por una clase amplia de ecuaciones diferenciales funcionales, la existencia de variedades invariantes asintóticas a los puntos de reposo genéricos, así como dar algunos resultados sobre la existencia de trayectorias periódicas.

En los trabajos [4] y [5] se daban resultados en esta dirección para ecuaciones de tipo retardado, es decir, de la forma

$$x'(t) = f(x_t),$$

en que x_t es la función x restringida al intervalo de "memoria" procediendo a t. En nuestro caso ampliamos los resultados a ecuaciones de la forma

$$D_t\, g(x_t) = f(x_t),$$

con ciertas restricciones en f y g, naturalmente. Estas ecuaciones incluyen las anteriores y muchas de las del tipo neutro.

Esta ampliación ha tenido que esperar la aparición del trabajo [6] que establece los teoremas fundamentales que dan la descomposición de cierto espacio vectorial, y las cotas exponenciales indispensables para esta clase más general de ecuaciones.

Hemos dividido el trabajo en cuatro capítulos. En primero enunciamos, sin demostración, los resultados conocidos de la teoría de ecuaciones diferenciales funcionales que se utilizan en los capítulos siguientes. En el segundo demostraremos los teoremas sobre variedades invariantes asintóticas a puntos genéricos. En el tercero damos el método de las ecuaciones de bifurcación para determinar trayectorias periódicas en la vecindad de puntos de reposo. Por último, en el cuarto presentamos un ejemplo y sugerimos algunas lineas de investigación futura en la dirección de este trabajo.

Por último deseo agradecer a todas las personas que han hecho posible la presentación de este trabajo, en particular a J.K. Hale que ha sido siempre guia e inspirador, a los profesores de las secciones de matemáticas de las universidades barcelonesas y a las personas que escribieron a máquina este amasijo de fórmulas.

CAPITULO I

Resultados básicos conocidos.

1. Un <u>semisistema dinámico</u> es una aplicación continua T de $X \times \mathbb{R}^+$ en X satisfaciendo

i) $T(x,0) = x$

ii) $T(T(x,t),s) = T(x,t+s)$, $t+s \in \mathbb{R}^+$,

donde X es un espacio topológico y $\mathbb{R}^+$ son los reales no negativos con la topología inducida por $\mathbb{R}$.

Para una $t \in \mathbb{R}^+$ denotaremos por $T(t)$ la aplicación de X en X definida por $T(t)x = T(x,t)$.

En este sentido $T(t)$ define un semigrupo de aplicaciones de X en X.

A diferencia de como ocurre en los sistemas dinámicos (que se definen de la misma manera, pero con R en vez de $\mathbb{R}^+$), no podemos deducir que $T(t)$ es un homeomorfismo para cada t.

2. Sea Σ un abierto de $X \times \mathbb{R}^+$ con la propiedad de que con (x,t) contiene al conjunto $\{(x,s) : s \in [0,t]\}$.

Se dice que una aplicación continua T de Σ en X es un <u>semisistema dinámico local</u> si

i) $T(x,0) = x$

ii) $T(T(x,t),s) = T(x,t+s)$

para todas aquellas $t,s \in \mathbb{R}^+$ en que las aplicaciones están definidas .

La teoría general de los semisistemas dinámicos locales está expuesta en [7] .

Para facilitar la notación pondremos $T(t)x := T(x,t)$ para aquellas t en el intervalo $[0,\tau_x)$, $\tau_x \in (0,\infty]$, en que $T(x,t)$ esté definido.

A la aplicación $T(\cdot)x : [0,\tau_x) \to X$ se le denomina la <u>trayectoria de x</u>, y al conjunto de puntos $\{T(t)x, t\in [0,\tau_x)\}$ se le denomina la <u>órbita de x</u>.

Un <u>punto de reposo</u> de T es un punto $x\in X$ tal que $T(t)x = x$ para toda t en $[0,\tau_x)$.

Una <u>trayectoria periódica</u> es aquella para la que existe $\tau\in(0,\tau_x)$ tal que $T(\tau)x = x$. A la órbita correspondiente se le llama órbita cerrada.

Es claro que en el caso de una trayectoria periódica $\tau_x = \infty$.

Ejemplos de semisistemas dinámicos locales lo constituyen las soluciones $u(x,t)$ de la ecuación del calor con una topología adecuada para X, así como las aplicaciones inducidas por las curvas integrales de campos vectoriales diferenciables en variedades.

3. Sea $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $r\geq 0$, el espacio de Banach de las funciones continuas del intervalo $[-r,0]$ en $\mathbb{R}^n$ con la norma del supremo. Para abreviar lo denotaremos por C de aquí en adelante.

Si $x:[-r,\tau)\to\mathbb{R}^n$, $\tau\in(0,\infty]$, es una función continua, consideraremos la función de $[0,\tau)$ en C dada por $t\to x(t+\cdot) =: x_t$ (=: indica que definimos de esta manera el símbolo que se encuentra del lado de los puntos).

Sea Ω un abierto de C, $f,g:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $f\in C(\Omega)$, $g\in C'(\Omega)$, y sea $\varphi\in\Omega$. Diremos que una aplicación $x:[-r,\tau)\to\mathbb{R}^n$ es una solución en el intervalo $[0,\tau)$ de la <u>ecuación diferencial funcional</u>

(1) $$D_t\, g(x_t) = f(x_t)$$

(aquí $D_t := \frac{d}{dt}$), con valor inicial φ, si existe $D_t\, g(x_t)$, se satisface la igualdad (1) para $t\in(0,\tau)$ y además $x_0 = \varphi$.

Esta definición no implica que x sea derivable, aunque $g(x_t)$ debe tener derivada continua en $(0,\tau)$.

4. A fin de poder asegurar que la ecuación (1) define un semisistema dinámico local, restringimos f y g en la forma que se indica en a) y b) a continuación:

a). f es localmente lipschitziana, es decir, para todo conjunto cerrado y acotado de Ω, existe L tal que

$$|f(\varphi)-f(\psi)|\leq L|\varphi-\psi|, \quad \varphi,\psi\in K.$$

b) Por ser $dg(\varphi)$, $\varphi\in\Omega$, un funcional lineal continuo, admite la representación de Riesz.

$$dg(\varphi)\psi=\int_{-r}^{0}(d\nu_\phi)\psi \quad , \quad \psi\in C,$$

donde representamos los elementos de $\mathbb{R}^n$ como matrices columna y ν_ϕ es una matriz de $n\times n$ de funciones de variación acotada en $[-r,0]$.

Pediremos que ν_ϕ satisfaga para cada φ la condición

$$\nu_\phi(0)-\nu_\phi(0^-)=E(\varphi),$$

con $E(\varphi)$ continua en φ, $\det E(\varphi)\neq 0$, y que exista $\alpha:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tal que $\alpha(\varphi,0)=0$ y

$$\int_{-s}^{0}(d\nu_\phi)\psi-E(\varphi)\psi(0)\leq\alpha(\varphi,s)\ \psi,$$

$\alpha\in\Omega$, $s\in\mathbb{R}$, $\psi\in C$.

A una ecuación como (1) en que f y g cumplan las condiciones a) y b) se le llama una <u>ecuación diferencial funcional neutra</u>, y son las que consideraremos de ahora en adelante.

Se demuestra en [8] que en este caso, para toda φ en Ω, la ecuación (1) admite una única solución $x(\cdot,\varphi)$ definida en un máximo intervalo $(0,\tau_\phi)$, $\tau_\phi\in(0,\infty]$, y que T definida por $x_t(\cdot,\varphi)=:T(\varphi,t)$ es una función continua de (φ,t).

Además el conjunto $\{(\psi,t):\exists\varphi\in\Omega \text{ con } \psi=T(\varphi,t)\}$ es abierto en $C\times\mathbb{R}^+$.

Por lo tanto T es un semisistema dinámico local.

5. Observamos que si g es la identidad, la ecuación (1) es una ecuación del tipo retrasado como las consideradas en [2]. Si además $r=0$, entonces se trata de una ecuación diferencial ordinaria. En el caso en que f y g sean lineales y que sólo dependan de los valores de x_t en un número finito de puntos, se obtienen las ecuaciones difero-diferenciales de tipo retrasado y neutro tratadas en [1].

La generalización respecto a los trabajos [4] y [5] de que se tratará en esta memoria, es el considerar que g no es necesariamente la identidad, lo que motiva que $T(t)$ no es necesariamente una aplicación compacta para $t \leq r$.

El interés de esta generalización está motivado en parte por la aparición de ecuaciones de tipo neutro en problemas prácticos (Ver [9]).

6. Si f y g son lineales la aplicación T es un semisistema diná mico en el sentido de la sección 1, con $X = C$.

En tal caso, la E que aparece en 4 b) es constante y no singular, y podemos suponer, multiplicando por E^{-1} que es la identidad.

Si M es el funcional lineal continuo definido por

$$M(\varphi) = \varphi(0) - g(\varphi),$$

nuestra ecuación lineal tendrá la forma

$$D_t\,(x(t) - M(x_t)) = L(x_t), \tag{2}$$

con

$$M(\varphi) = \int_{-r}^{0} (d\mu)\varphi$$

$$L(\varphi) = \int_{-r}^{0} (d\eta)\varphi \quad ,$$

en que μ, η son funciones de variación acotada en $[-r,0]$ y μ es continua en 0.

Obsérvese de nuevo que se pide, para que x sea solución, que $x(t) - M(x_t)$ sea diferenciable para $t > 0$.

Ejemplos sencillos de ecuaciones del tipo (2) son $x'(t) = x(t-1)$ y $D_t(x(t)-x(t-1)) = 0$.

7. Resulta (Ver [10] para la demostración), que $T(t)$, $t\in\mathbb{R}^+$, es un semigrupo fuertemente continuo de operadores acotados de C en C. (Por fuertemente continuo queremos decir que $T(s)\varphi \to T(t)\varphi$ cuando $s\to t$, para toda $t\in\mathbb{R}^+$, $\varphi\in C$).

Por lo tanto existe el operador infinitesimal A de $T(t)$, definido por medio de

$$A\varphi = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)\varphi - \varphi),$$

que en este caso coincide con el generador infinitesimal por ser cerrado (Consultar [11] para las definiciones y propiedades básicas).

En [10] se demuestran las propiedades expresadas en las 3 secciones siguientes.

8. El dominio $D(A)$ de A viene dado por $D(A) = \{\varphi\in C : \varphi'\in C,\ \varphi'(0) = L(\varphi)+M(\varphi')\}$.

Para $\varphi\in D(A)$ se tiene $(A\varphi)(\theta) = \varphi'(\theta)$, $\theta\in[-r,0]$.

Resulta que $D(A)$ es denso en C, invariante bajo la acción de $T(t)$ y que si $\varphi\in D(A)$ se tiene

$$D_t T(t)\varphi = T(t)A\varphi = AT(t)\varphi.$$

(Evitaremos escribir paréntesis para la composición de aplicaciones si estas aparecen en el orden natural (...( )))), si es que el número de estos paréntesis se vuelve engorroso).

El contradominio $R(A)$ de A es C.

9. A posee únicamente espectro puntual es decir $\sigma(A) = P\sigma(A)$, y éste consiste en todas las raices (complejas) de la ecuación característica

(3) $\det \Delta(\lambda) = 0$,

donde

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \lambda \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(\theta) - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta).$$

Resulta que $\sigma(A)$ es un conjunto discreto y su parte real está acotada superiormente.

Si λ está en el conjunto resolvente de A, y $\varphi \in C$, se tiene

$$(\lambda I - A)^{-1}\varphi(\theta) = be^{\lambda\theta} + \int_{\theta}^{0} e^{\lambda(\theta-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi,$$

donde

$$b = \Delta(\lambda)^{-1} \left(\varphi(0) + M(\varphi) + \int_{-r}^{0} (\lambda d\mu + d\eta) \int_{\theta}^{0} e^{\lambda(\theta-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi\right)$$

Además, si λ es una raiz de (3) de multiplicidad m, se tiene que C es la suma directa de los subespacios $N_\lambda := N(\lambda I - A)^m =$ $= \{ \varphi \in D(A) : (\lambda I - A)^m \varphi = 0 \}$, de dimensión m, y $R_\lambda := R(\lambda I - A)^m =$ $= \{ \varphi \in C : \exists \psi \in D(A)$ tal que $(\lambda I - A)^m \psi = \varphi \}$, (ver [12]).

Si $k \geq m$ se tiene que $N(\lambda I - A)^m = N(\lambda I - A)^k$, $R(\lambda I - A)^m =$ $= R(\lambda I - A)^k$.

Los subespacios N_λ y R_λ son invariantes bajo la acción de T(t).

Por conmutar A con $(\lambda I - A)^k$ se tiene que N_λ es invariante bajo A.

10. Si $\Phi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ es una base de N_λ y B es la matriz definida por $A\Phi = \Phi B$, se tiene que el único valor propio de B es λ, que $\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{B\theta}$, y que $T(t)\Phi = \Phi e^{Bt}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Como esta expresión última tiene sentido para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos dfinir T(t) en N_λ para todo valor de t en $\mathbb{R}$ por medio de dicha expresión. De esta manera queda definido un sistema dinámico T en N_λ.

De hecho, dado $\varphi \in N_\lambda$, si $a \in \mathbb{R}^m$ es tal que $\varphi = \Phi a$, se tiene que $T(t)\varphi = \Phi x(t)$, en que x(t) es la solución de la ecuación diferencial $x' = Bx$, con $x(0) = a$.

Tenemos de esta manera que dada $\varphi \in C$, se puede expresar en forma única como $\varphi = \varphi^N + \varphi^R$, en que $\varphi^N \in N_\lambda$ y $\varphi^R \in R_\lambda$, y se tiene que $T(t)\varphi = T(t)\varphi^N + T(t)\varphi^R$.

Se puede caracterizar R_λ mediante el operador adjunto de A, lo que es útil para los cálculos prácticos. Referimos para ello al trabajo [10].

11. En el caso en que M en (2) es nula ocurre que (ver [2]) sólo hay un conjunto finito Λ de puntos de $\sigma(A)$ con parte real mayor o igual que un número real dado γ, y que vale la acotación

$$|T(t)\varphi| \leq Ke^{\gamma t}|\varphi|,$$

en el subespacio de dado por la intersección de las R_λ para $\lambda \in \Lambda$.

Se tiene también que $\sigma(T(t))$ es $\overline{\exp\{\sigma(A)t\}}$, y que T(t) es una aplicación compacta para $t \geq r$.

12. En el caso en que M no es cero, nos encontramos en una situación muy diferente, y no podemos asegurar que T(t) es compacto para $t \geq r$ (de hecho no es necesario ni que su espectro sea discreto en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$).

Sin embargo, con ciertas restricciones en M sigue siendo cierto que si no existen valores propios de A con parte real en un intervalo centrado en γ (aunque haya una infinidad de ellas por parta real mayor que γ), se puede expresar C como suma directa de subespacios invariantes en que valen ciertas acotaciones exponenciales. Estos resultados, que hacen posible la extensión a ecuaciones neutras de los trabajos [4] y [5], son debidos a D. Henry y se hallan expuestos en [6].

13. La restricción suplementaria que se impondrá a M de ahora en adelante es que μ no tiene parte singular en su descomposición de Lebesgue, es decir, que

$$(4) \qquad M(\varphi) = \int_{-r}^{0} (d\mu)\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(-r_k) + \int_{-r}^{0} a\varphi,$$

en que $0 < r_k \leq r$, y a, a_k son matrices tales que $a \in L^1[-r,0]$ y

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente.

14. Lo que se hace en [7] es considerar primero la ecuación funcional

$$(5) \qquad x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x(t-r_k), \quad t \geq 0,$$

que se puede escribir

$$x(t) = M^0(x_t)$$

o bien

$$N^0(x_t) = 0,$$

y cuyas soluciones vienen dadas por el semigrupo $T^0(t)$ actuando en el subespacio C^0 de C que es anulado por N^0.

Este semigrupo es fuertemente continuo y tiene como generador infinitesimal al operador A^0, cuyo dominio $D(A^0)$ viene dada por los elementos de C^0 cuya derivada (respecto a θ) está en C^0, y si $\varphi \in C^0$, $A^0\varphi = \varphi'$.

Se tiene entonces que si $h(\lambda) = \det(I - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-\lambda r_k})$, $\sigma(A^0) = P\sigma(A^0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : h(\lambda) = 0\}$.

Nótese que h es una función casi periódica de λ.

El espectro de A^0, a diferencia de lo que ocurre con el espectro de A cuando $M = 0$, puede tener una infinidad de puntos en una faja de $\mathbb{C}$ con parte real en un intervalo finito.

Se tiene entonces que si $\alpha \notin \operatorname{Re}\sigma(A^0)$, entonces $C^0 = P^0 \oplus Q^0$, P^0 y Q^0 invariantes bajo $T^0(t)$, P^0 es la clausura de la extensión lineal de los $N_\lambda(A^0)$ para todas las λ tales que $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$, y que $T^0(t)$ se puede extender en forma única a un grupo definido para toda $t \in \mathbb{R}$ en P^0 (de tal manera que $T^0(t)\varphi$ es solución de (5) para toda $t \in \mathbb{R}$).

Dada φ en C^0, es expresable en forma única como $\varphi = \varphi^P + \varphi^Q$, $\varphi^P \in P^0$, $\varphi^Q \in Q^0$. Se tiene entonces que $T^0(t)\varphi = T^0(t)\varphi^P + T^0(t)\varphi^Q$.

Existen constantes K, ε tales que

$$|T^0(t)\varphi^Q| \leq Ke^{(\alpha-\varepsilon)t}|\varphi^Q|\ ,\ t\geq 0,\ \varphi^Q \varepsilon Q^0,$$

$$|T^0(t)\varphi^P| \leq Ke^{(\alpha+\varepsilon)t}|\varphi^P|\ ,\ t\leq 0,\ \varphi^P \varepsilon P^0.$$

Además, si $Z=\left\{\zeta \in \mathbb{R} : \zeta = \operatorname{Re}\lambda,\ \lambda \varepsilon \sigma(A^o)\right\}$, se tiene

$$\sigma(T^0(t)|_{P^0}) \subset \left\{\mu : |\mu| = e^{\zeta t},\ \zeta \varepsilon \bar{Z},\ \zeta > \alpha\right\},$$

$$\sigma(T^0(t)|_{Q^0}) \subset \left\{\mu : |\mu| = e^{\zeta t},\ \zeta \varepsilon \bar{Z},\ \zeta < \alpha\right\}.$$

El operador $T(t)$ correspondiente a la ecuación (2) difiere de $T^0(t)$ en un operador compacto (como se demuestra en [7]), y el espectro continuo de $T(t)$ es el mismo que el de $T^0(t)$. Como ya se sabe que para los espectros puntuales y residuales se tiene $P\sigma(T(t)) = \exp\{tP\sigma(A)\}$, $R\sigma(T(t)) = \exp\{tR\sigma(A)\}$, (ver [11]), y $R\sigma(A) = \phi$, el espectro de $T(t)$ diferirá del de $T^0(t)$ en un conjunto acotado de puntos que tendrán como único posible punto de acumulación el 0.

Se obtiene entonces el siguiente

<u>Teorema</u>. Para la ecuación (2) sujeta a las restricciones (4) se tiene:

$$P\sigma(T(t))\setminus\{0\} = \{e^{\lambda t} : \lambda \in \sigma(A)\},$$

$$R\sigma(T(t)) = \phi,$$

$$C\sigma(T(t))\setminus\{0\} \subset \{\mu : |\mu| = e^{\zeta t},\ \zeta \varepsilon \bar{Z}\}.$$

Si $\alpha \not\in \overline{\operatorname{Re}\sigma(A)}$, entonces existen subespacios P y Q invariantes bajo $T(t)$, $P = \overline{\text{ext lin}}\ \{N_\lambda : \lambda \varepsilon \sigma(A), \operatorname{Re}\lambda > \alpha\}$,

$$Q = \{\phi : E_\lambda \varphi = 0,\ \operatorname{Re}\lambda > \alpha\}.$$

(Aquí E_λ es la proyección sobre N_λ a lo largo de $R_\lambda(A)$).

La restricción de $T(t)$ a P se puede extender de forma única a un grupo $T(t)$ de operadores acotados tales que $T(t)\varphi$ es solución de (2) para todo $t \varepsilon \mathbb{R}$.

Dada φ en C, se puede expresar en forma única como $\varphi = \varphi^P + \varphi^Q$, y se tiene que $T(t)\varphi = T(t)\varphi^P + T(t)\varphi^Q$.

Además existen constantes positivas K, M y ε tales que

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
&|T(t)\varphi^P| \le Ke^{(\alpha+\varepsilon)t}|\varphi^P|\,, \quad t\le 0\,,\ \varphi^P \in P,\\
&|T(t)\varphi^Q| \le Ke^{(\alpha-\varepsilon)t}|\varphi^Q|\,, \quad t\ge 0,\ \varphi^Q \in Q,\\
&|T(t)\varphi^P| \ge Me^{(\alpha+\varepsilon)t}|\varphi^P|\,, \quad t\ge 0,\ \varphi^P \in P.
\end{aligned}
$$

15. Se demuestra en [13] que la solución con valor inicial φ de la ecuación no homogénea

$$(7) \qquad D_t\,(x(t)-M(x_t)-k(t)) = L(x_t)\,,$$

en que $k:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ es continua, viene dado por

$$x_t\,(\varphi,k) = T(t)\varphi + K(t)k,$$

con

$$(8) \qquad K(t)k=-\int_0^t d_s X(t-s+\cdot)\,(k(s)-k(0))\,,$$

donde X es una matriz de funciones definidas en $[-r,\infty)$, de variación acotada en intervalos finitos y que se anula en $[-r,0]$. Se puede pensar en X como una solución fundamental de la ecuación (2). Tenemos que observar que $X(s)$ tiene en 0 un salto unitario, pasando de 0 a I, por lo que $d_s X(s)$ tiene un impulso unitario en 0, que hay que tomar en cuenta en las integraciones. De hecho resulta que si k es absolutamente continua, se tiene

$$\int_0^t X(t-s+\cdot)k'(s)\,ds = -X(t+\cdot)k(0) - \int_0^t d_s X(t-s+\cdot)k(s)\,.$$

Para los detalles ver [13] y [1].

Si E es la proyección sobre P según Q, denotaremos

$$K^P(t)k = EK(t)k,$$

$$K^Q(t)k = (I-E)K(t)k, \qquad t\ge 0,$$

y definiremos para $t<0$,

$$K^P(t)k = -T(t)\big|_P\,K^P(t)k.$$

Si k es constante se tiene que tanto $K^P(t)k$ como $K^Q(t)k$ son 0, por lo que existen funciones de variación acota da X^P, X^Q tales que

$$K^P(t)k = \int_0^t d_s X^P(t-s+\cdot)(k(s)-k(0)),$$

$$K^Q(t)k = \int_0^t d_s X^Q(t-s+\cdot)(k(s)-k(0)),$$

y $X(t) = X^P(t) + X^Q(r)$ para $t \geq -r$.

Aunque X no es una función continua (de hecho tiene un salto unitario en 0), y que por lo tanto no tiene sentido el aplicar T(t), a sus columnas, es habitual (ver [7], pág 122) el utilizar las notaciones

$$T(t)X_0 = X_t, \quad t \geq 0$$
$$T(t)X_0^P = X_t^P, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$T(t)X_0^Q = X_t^Q, \quad t \geq 0$$

Esto está motivado porque si X_0 es continua, entonces $T(t)X_0$ es, efectivamente, la matriz obtenida aplicando t(t) a las columnas de X_0.

En caso en que P es de dimensión finita resulta que X_0 tiene columnas en C y entonces las columnas de $T(t)X_0$ son soluciones de(2) (Ver más adelante la sección 17).

Se tiene el siguiente

Teorema. Si $\alpha \notin \overline{\mathrm{Re}\,\sigma(A)}$ y $C = P \oplus Q$ es la descomposición dada por el teorema de la sección 14, entonces las soluciones de (7) cumplen

$$(9) \qquad x_t^P(\varphi,k) = T(t)\varphi^P + \int_0^t d_s T(t-s) X_0^P(k(s)-k(0)), \; t \in \mathbb{R},$$
$$x_t^Q(\varphi,k) = T(t)\varphi^Q + \int_0^t d_s T(t-s) X_0^Q(k(s)-k(0)), \; t \geq 0,$$

en que los términos representan elementos de C, y se ha utilizado la notación

$$\int_0^t d_s T(t-s) X_0^{P,Q} k(s) = \int_0^t (d_s X^{P,Q}(t-s+\cdot))k(s)$$

Además existen K y $\varepsilon > 0$ tales que

$$(10) \qquad |T(t)X_0^P| \leq Ke^{(\alpha+\varepsilon)t}, \; t \leq 0$$
$$|T(t)X_0^Q| \leq Ke^{(\alpha-\varepsilon)t}, \; t \geq 0, \qquad \text{y}$$

(11) $$\int_{-\infty}^{0} |d_s T(s) X_0^P| e^{-(\alpha+\varepsilon)s} \leq K$$

$$\int_0^{\infty} |d_s T(s) X_0^Q| e^{-(\alpha-\varepsilon)s} \leq K.$$

También se verifica que

$$T(t)\int_0^t d_s T(-s) X_0^{P,Q}(k(s)-k(0)) = \int_0^t d_s T(t-s) X_0^{P,Q}(k(s)-k(0)).$$

16. Si consideramos ahora la ecuación

(12) $$D_t\,(x(t)-M(x_t)) = L(x_t)+h(t),$$

con h continua, podemos reducirla al caso anterior tomando una k tal que $k' = h$. En tal caso, integrando por partes, obtenemos la siguiente versión del teorema anterior

Teorema. Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior se tiene para las soluciones de (12)

(13) $$x_t^P(\varphi,h) = T(t)\varphi^P + \int_0^t T(t-s) X_0^P h(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x_t^Q(\varphi,h) = T(t)\varphi^Q + \int_0^t T(t-s) X_0^Q h(s)\,ds, \quad t \geq 0.$$

Existen K y $\varepsilon > 0$ tales que (10) se cumple.

Para una α fija, las constantes K y ε pueden tomarse las mismas en todos los casos en que han aparecido; basta para ello tomar para K la máxima y para ε la mínima.

De ahora en adelante en las expresiones como (9) y (13) no escribiremos θ, para abreviar.

17. Si Λ es un conjunto finito de elementos de $\sigma(A)$, podemos tomar $P = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ y $Q = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ y obtenemos la descomposición $C = P \oplus Q$.

Entonces, análogamente a lo expresado en las secciones 15 y 16, para las soluciones de la ecuación

$$D_t\,(x(t)-M(x_t)-k(t)) = L(x_t)+h(t)$$

valen las expresiones

$$x_t^{P,Q}(\cdot,\varphi) = T(t)\varphi^{P,Q} + \int_0^t T(t-s)X_0^{P,Q}h(s)\,ds -$$

$$-\int_0^t d_s T(t-s)X_0^{P,Q}(k(s)-k(0)).$$

Sea Φ una base de P (que es de dimensión finita, m). En 10 se demuestra que existe una matriz Ψ tal que $X_0^P = \Phi\Psi$, y que $T(t)X_0^P = \Phi e^{Bt}\Psi$, donde B es la matriz $m\times m$ definida por $A\Phi = \Phi B$.

Haremos notar que si en lugar de considerar la solución $x(\cdot,\varphi)$ tal que $x_0(\cdot,\varphi)=\varphi$, consideramos la solución $x(\cdot,\sigma,\varphi)$ que cumple con $x_\sigma(\cdot,\sigma,\varphi)=\varphi$, entonces la expresión anterior toma la forma

$$x_t^{P,Q}(\cdot,\sigma,\varphi) = T(t-\sigma)\varphi^{P,Q} + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^{P,Q}h(s)\,ds -$$

$$-\int_\sigma^t d_s T(t-s)X_0^{P,Q}(k(s)-k(0)).$$

CAPITULO II

Variedades asintóticas a singularidades genéricas

18. Consideraremos la ecuación

$$D_t\,(x(t)-M(x_t)-G(x_t)) = L(x_t)+F(x_t), \tag{14}$$

en que supondremos que L y M satisfacen las condiciones de las secciones 6 y 13.

Supondremos además que F y G son funciones continuas de un abierto Ω, $0\in\Omega\subset C$, en $\mathbb{R}^n$, satisfaciendo

$$\begin{aligned} &F(0)=G(0)=0\\ &|F(\varphi)-F(\psi)|\le\rho(\delta)\,|\varphi-\psi|,\\ &|G(\varphi)-G(\psi)|\le\rho(\delta)\,|\varphi-\psi|,\ |\varphi|,|\psi|\le\delta \end{aligned} \tag{15}$$

donde ρ es una función continua no decreciente tal que $\rho(0)=0$.

La ecuación (1) es del tipo (14) si f y g son de clase C' en Ω y $f(0)=g(0)=0$. En tal caso $x(t)-M(x_t)$ y $L(x_t)$ son respectivamente las derivadas de Frechet de f y g en 0, evaluadas en x_t.

Como en el capítulo anterior, denotaremos por $x(\cdot,\varphi)$ la solución de (14) con valor inicial φ.

Esta ecuación admite como solución $x(t)=0$ para toda $t\in\mathbb{R}$, y por lo tanto 0 es un punto de reposo del semisistema dinámico local definido por (14) en Ω. Si consideramos una ecuación con el punto de reposo que no esté en el origen; una traslación basta para ponérnosla en la forma deseada.

19. Asociada a (14) consideraremos la ecuación lineal

$$D_t\,(x(t)-M(x_t)) = L(x_t), \tag{16}$$

que es la misma ecuación (2) considerada en el capítulo anterior.

Por T(t) denotaremos el semigrupo de operadores definidos por las soluciones de (16), y por A denotaremos el correspon diente generador infinitesimal.

Si cero no está en la clausura de la parte real del espectro de A, entonces, de acuerdo con el teorema de la sección 14, existen subespacios P y Q tales que toda φ en C admite la descomposición única $\varphi=\varphi^P+\varphi^Q$, $\varphi^P\in P$, $\varphi^Q\in Q$, $T(t)\varphi^P$ está definido para toda t en $\mathbb{R}$, y

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad & |T(t)\varphi|\leq Ke^{\varepsilon t}|\varphi| \quad , \ t\leq 0\\
& |T(t)\varphi|\leq Ke^{-\varepsilon t}|\varphi| \quad , \ t\geq 0\\
& |T(t)\varphi|\geq Me^{\varepsilon t}|\varphi| \quad , \ t\geq 0
\end{aligned}
$$

Estos dos subespacios P y Q son pues variedades asintóticas a 0, en el sentido de que son invariantes bajo $T(t)$ y las trayectorias tienden a 0 cuando $t\to\infty$ en Q (variedad estable) y cuando $t\to-\infty$ en P (variedad inestable). Todos los puntos de C que no están ni en P ni en Q no tienden a 0 ni para $t\to\infty$ ni para $t\to-\infty$. (Puede ser que P o Q se reduzcan a $\{0\}$).

En este caso, es decir, cuando $0\notin\overline{\operatorname{Re}\sigma(A)}$, decimos que 0 es un punto de reposo genérico de la ecuación (14).

Usaremos la notación π_P para la proyección sobre P a lo largo de Q, y π_Q para la proyección sobre Q a lo largo de P, de manera que tendremos $\varphi^P=\pi_P\varphi$, $\varphi^Q=\pi_Q\varphi$.

20. Demostraremos en este capítulo que si 0 es un punto de reposo genérico de (14), entonces existen variedades invariantes asintóticas a 0 y tangentes a P y a Q respectivamente en dicho punto. Más precisamente, demostraremos que existe un entorno de 0 y en él dos conjuntos $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ invariantes locales bajo la acción definida por (14), tales que las proyecciones π_P y π_Q son homeoformismos, y que en $\mathfrak{P}$ las trayectorias están definidas para $t\in(-\infty,0]$ y tienden exponencialmente a 0 cuando $t\to-\infty$, sin salir del entorno, mientras que en $\mathfrak{Q}$ lo hacen cuando $t\to\infty$. Una trayectoria que no esté ni en $\mathfrak{P}$ ni en $\mathfrak{Q}$ deja el entorno de 0 considerado para t creciente. $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son respectivamente las

variedades inestable y estable asintóticas en 0, restringidas al entorno que hemos mencionado.

Por medio de una translación, la situación se repite en cualquier punto de reposo de (1) con f y g $\in C'(\Omega)$ si la parte lineal es este punto es "genérica".

Se pueden definir los conjuntos de Ω dados por $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{T(t)\mathfrak{P}\}$ y $\{\varphi\in\Omega: \exists t$ tal que $T(t)\varphi\in\mathfrak{Q}\}$. Estos son los conjuntos asintóticos inestable y estable respectivamente, correspondientes al punto de reposo considerado. No es claro, sin embargo, que el conjunto estable tenga que ser una variedad modelada sobre un subespacio de C.

21. De las secciones 15 y 16 deducimos que la solución $x_t(\cdot,\varphi)$ de (14) satisface la ecuación integral

$$x_t(\cdot,\varphi) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)X_0F(x_s)\,ds - \int_0^t d_s T(t-s)X_0(G(x_s)-G(\varphi)), \tag{18}$$

para los valores $t \geq 0$ en que dicha solución exista.

Sus proyecciones sobre P y Q cumplen para estos mismos valores de t:

$$x_t^{P,Q} = T(t)\varphi^{P,Q} + \int_0^t T(t-s)X_0^{P,Q}F(x_s)\,ds - \int_0^t d_s T(t-s)X_0^{P,Q}(G(x_s)-G(\varphi)). \tag{19}$$

Hacemos notar que, debido a $T(0)X_0$ es nulo, se tiene que

$$\int_0^t d_s T(t-s)X_0(G(x_s)-G(\varphi)) = T(t)X_0G(\varphi) + \int_0^t d_s T(t-s)X_0G(x_s).$$

22. <u>Lema</u>. Supóngase $0 \notin \mathrm{Re}\,\sigma(A)$ y sean P y Q como en la sección 19. Entonces una función $\xi:(-\infty,0] \to C$ continua y acotada con

$\xi(0)=\varphi$ es solución $x_t(\cdot,\varphi)$ de (14) para $t\in(-\infty,0]$ si y sólo si satisface la ecuación integral

$$(20)\qquad \xi(t)=T(t)\varphi^{P}+\int_0^t T(t-s)X_0^{P}F(\xi(s))ds - $$
$$-\int_0^t d_s T(t-s)X_0^{P}(G(\xi(s))-G(\xi(0)))+$$
$$+\int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^{Q}F(\xi(s))ds -$$
$$-\int_{-\infty}^t d_s T(t-s)X_0^{Q}(G(\xi(0))-G(\xi(0))),\quad t\leq 0.$$

Análogamente, una función continua y acotada $\eta:[0,\infty)\to C$ con $\eta(0)=\psi$ es solución $x_t(\cdot,\psi)$ de (14) para $t\in[0,\infty)$ si y sólo si satisface la ecuación integral

$$(21)\qquad \eta(t)=T(t)\varphi^{Q}+\int_0^t T(t-s)X_0^{Q}F(\eta(s))ds -$$
$$-\int_0^t d_s T(t-s)X_0^{Q}(G(\eta(s))-G(\eta(0)))+$$
$$+\int_{\infty}^t T(t-s)X_0^{P}F(\eta(s))ds -$$
$$-\int_{\infty}^t d_s T(t-s)X_0^{P}(G(\eta(s))-G(\eta(0))),\quad t\geq 0.$$

<u>Demostración</u>. Consideremos que la solución $x_t(\cdot,\varphi)$ está definida para $t\in(-\infty,0]$.

Se tiene entonces que existe k_1 tal que $|x_t|\leq k_1 k$, $t\leq 0$.

Tenemos de (19) que para toda $t\leq 0$,

$$\varphi^{Q}=T(-t)x_t^{Q}+\int_t^0 T(-s)X_0^{Q}F(x_s)ds -$$
$$-\int_t^0 d_s T(-s)X_0^{Q}(G(x_s)-G(x_0)).$$

De las acotaciones (6) se tiene

$$|T(-t)x_t^{Q}|\leq ke^{\varepsilon t}|x_t^{Q}|\leq K\, k_1\, k\, e^{\delta t},\quad t\leq 0$$

De donde deducimos que $|T(-t)x_t^{Q}|\to 0$ cuando $t\to-\infty$, y por lo tanto

$$\varphi^{Q}=\int_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^{Q}\, F(x_s)\,ds-\int_{-\infty}^{0} d_s\, T(-s)X_0^{Q}(G(x_s)-G(x_0)).$$

Se tiene ahora por (19) que

$$x_t = x_t^{P}+ x_t^{Q}= T(t)\varphi^{P}+ T(t)\Big[\int_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^{Q}F(x_s)\, ds -$$

$$-\int_{-\infty}^{0} d_s\, T(-s)X_0^{Q}(G(x_s) - g(x_0))\Big] +$$

$$+\int_{0}^{t}T(t-s)X_0F(x_s)\,ds-\int_{0}^{t}d_s\, T(t-s)X_0(G(x_s)-G(x_0)),\ t\leq 0,$$

de donde se sigue que x_t debe satisfacer la ecuación integral (20).

Recíprocamente, si $\xi:(-\infty,0]\to 0$ continua y acotada, satisface (20), definiendo φ^{Q} como arriba, se tiene que ξ tiene que satisfacer la fórmula de variación de parámetros (18), lo que le impone que $\xi(t)$ debe ser x_t para cierta t (debido a que $X_0=0$ en $[-r,0]$). Por la unicidad de las solu ciones se sigue que esta x_t es $x_t(\cdot,\varphi)$.

Esto demuestra la primera mitad del lema.

Consideremos ahora que la solución $x_t(\cdot,\varphi)$ está definida para $t\epsilon\ 0,\infty)$ y que $|x_t|\leq k$, $t\epsilon(-\infty,0]$.

Tenemos de (19) que para toda $t\geq 0$

$$T(t)\Big(\varphi^{P}+\int_{0}^{t} T(-s)X_0^{P}\, F(x_s)\,ds - \int_{0}^{t} d_s\, T(-s)X_0^{P}(G(x_s)-G(\varphi))\Big)\leq k\,k_1$$

Si llamamos χ_t al termino siguiendo a T(t), resu lta que $\chi_t\ \epsilon\ P$ para $t\ \epsilon\ \mathbb{R}^{+}$.

Por lo tanto, de la acotación (17) se sigue que $Me^{\varepsilon t}|\chi_t|\leq k\,k_1$, lo cual implica que $\chi_t\to 0$ cuando $t\to\infty$.

A partir de aquí tenemos que

$$\varphi^{P}=\int_{\infty}^{0}T(-s)X_0^{P}\,F(x_s)\,ds-\int_{\infty}^{0}d_s\, T(-s)X_0^{P}\,(G(x_s)-G(\varphi)).$$

Utilizando (19) obtendremos ahora la segunda parte del lema de la misma manera que la anterior.

23. <u>Teorema</u>. Si $0 \notin \overline{\mathrm{Re}\,\sigma(A)}$ y $C = P \oplus Q$ es la descomposición correspondiente a 0 según la sección 19, entonces existe $\delta > 0$ tal que π_P es un homeomorfismo entre el conjunto $\mathfrak{P} = \{\varphi \in C : |\varphi^P| \leq \delta/2K,\ |x_t(\cdot,\varphi)| \leq \delta,\ t \leq 0\}$ y $P \cap B_\delta/2K$ (resp. π_Q entre $\mathfrak{Q} = \{\varphi \in C : |\varphi^Q| \leq \delta/2K\ , |x_t(\cdot,\varphi)| \leq \delta,\ t \geq 0\}$ y $Q \cap B_{\delta/2K}$), $(B_{\delta/2K} = \{\varphi \in C :\ \varphi \leq \delta/2K\})$. Existen $M, \mu > 0$ tales que $\varphi \in \mathfrak{P}$ (resp. $\varphi \in \mathfrak{Q}$), implica $x_t(\cdot,\varphi) \leq Me^{\mu t}|\varphi|,\ t \leq 0$ (resp. $x_t(\cdot,\varphi) \leq Me^{-\mu t}|\varphi|,\ t \geq 0$).

$\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son tangentes respectivamente a P y Q en 0.

<u>Demostración</u>. Vamos a demostrar primero la parte correspondiente a $\mathfrak{P}$. Consideremos el espacio de funciones $E = \{\xi : (-\infty,0] \to C \mid \xi \text{ continua},\ |\xi(t)| \leq k,\ t \in (-\infty,0]\}$, con la norma $|\xi|_E = \inf\{k : |\xi(t)| \leq k,\ t \in (-\infty,0]\}$. Es un espacio de Banach.

Sea $\varphi^P \in P \cap B_{\delta/2K}$ para $\delta > 0$, y consideremos $E_\delta(\varphi^P) = \{\xi \in E : |\xi|_E \leq \delta,\ \xi(0)^P = \varphi^P\}$. Dada $\xi \in E_\delta(\varphi^P)$ definimos $\Phi\xi$ por medio de

$$\begin{aligned}(\Phi\xi)(t) &= T(t)\varphi^P + \int_0^t T(t-s)X_0^P F(\xi(s))\,ds - \\ &- \int_0^t d_s T(t-s)X_0^P(G(\xi(s)) - G(\xi(0))) + \\ &+ \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Q F(\xi(s))\,ds - \\ &- \int_{-\infty}^t d_s T(t-s)X_0^Q(G(\xi(s)) - G(\xi(0))),\quad t \leq 0.\end{aligned}$$

Φ está definido de $E_\delta(\varphi^P)$ en E. En particular las integrales entre $-\infty$ y t existen debido a las cotas (10) y (11) para $\alpha = 0$. Vamos a ver que $\Phi E_\delta(\varphi^P) \subset E_\delta(\varphi^P)$. Es obvio que $(\Phi\xi)(0) = \varphi^P$. Observamos que

$$\int_0^t d_s T(t-s)X_0^P G(\xi(0)) + \int_{-\infty}^t d_s T(t-s)X_0^Q G(\xi(0)) = -T(t)\, X_0 G(\xi(0))$$

debido a que $T(0)X_0^P + T(0)X_0^Q = 0$.

Utilizando las cotas (10), (11), (15) y (17) tenemos:

$$|(\Phi\xi)(t)| \le Ke^{\varepsilon t} + K\rho(\delta)\delta e^{\varepsilon t}\int_t^0 e^{-\varepsilon s}ds + K\rho(\delta)\delta e^{-\varepsilon t}\int_{-\infty}^t e^{\varepsilon s}ds +$$

$$+ |T(t)X_0^P||G(\xi(o))| + \int_t^0 |d_s T(t-s)X_0^P||G(\xi(s))| +$$

$$+ \int_{-\infty}^t |d_s T(t-s)X_0^P||G(\xi(s))| \le \delta/2 + 2K\rho(\delta)\delta/\varepsilon +$$

$$+ 4K\rho(\delta)\delta \le \delta$$

si δ es suficientemente pequeño.

Mostraremos ahora que Φ es una contracción en $E_\delta(\varphi^P)$:

$$|(\Phi\xi_1 - \Phi\xi_2)(t)| \le K\rho(\delta)e^{\varepsilon t}\int_t^0 e^{-\varepsilon s}|\xi_1(s) - \xi_2(s)|\,ds +$$

$$+ K\rho(\delta)e^{-\varepsilon t}\int_{-\infty}^t e^{\varepsilon s}|\xi_1(s) - \xi_2(s)|\,ds +$$

$$+ \rho(\delta)\int_t^0 |d_s T(t-s)X_0^P||\xi_1(s) - \xi_2(s)| +$$

$$+ \rho(\delta)\int_{-\infty}^t |d_s T(t-s)X_0^Q||\xi_1(s) - \xi_2(s)| +$$

$$+ K\rho(\delta)|\xi_1(0) - \xi_2(0)| \le 7K\rho(\delta)|\xi_1 - \xi_2|_E.$$

Para que sea una contracción escogemos δ tal que $7K\rho(\delta) < 1$.

Concluimos entonces que para cada φ^P en $P \cap B_{\delta/2K}$ existe una única $\xi^\sim$ en $E_\delta(\varphi^P)$ tal que $\xi^\sim = \Phi\xi^\sim$.

De acuerdo con el lema anterior, tenemos entonces que $\xi^\sim(t)$ es solución $x_t(\cdot,\varphi)$ de (14) con $x_0 = \varphi = \xi^\sim(0)$ para $t \in (-\infty, 0]$.

Definimos ahora la aplicación $\sigma_P : P \cap B_{\delta/2K} \to C$ por medio de

$$\sigma_P(\varphi^P) = (\Phi\xi^\sim)(0) = \varphi^P + \int_{-\infty}^0 T(-s)X_0^Q F(\xi^\sim(s))\,ds -$$

$$- \int_{-\infty}^0 d_s T(-s)X_0^Q(G(\xi(s)) - G(\xi(0))).$$

Es claro que $\sigma_P^{-1} = \pi_P$ y que $\sigma_P(P \cap B_{\delta/2K}) = \mathfrak{P}$.

Para probar que c_P es un homeomorfismo sólo falta comprobar su continuidad.

Sean $\varphi_1^P, \varphi_2^P \in P \cap B_{\delta/2k}$ y sean $\xi_1^\sim, \xi_2^\sim$ los puntos fijos correspondientes en $E_\delta(\varphi_1^P)$, $E_\delta(\varphi_2^P)$. (Nótese que la δ se pudo escoger independientemente del elemento φ^P).

Veremos que si $0<\mu<\varepsilon$, y δ es suficientemente pequeño, se tiene

(22) $$|\xi_1^\sim(t) - \xi_2^\sim(t)| \leq 2Ke^{\mu t}|\varphi_1^P - \varphi_2^P|, \quad t \leq 0.$$

Para ello definimos las sucesiones ξ_1^i, ξ_2^i por medio de

$$\xi_j^0(t) = T(t)\varphi^P,$$

$$\xi_j^{i+1}(t) = (\Phi\xi^i)(t), \qquad j=1,2$$

Siendo Φ una contracción, ξ_1^i, ξ_2^i tienden uniformemente a $\xi_1^\sim, \xi_2^\sim$.

Para $i=0$ se tiene

$$|\xi_1^0(t) - \xi_2^0(t)| \leq Ke^{\varepsilon t}|\varphi_1^P - \varphi_2^P| \leq 2Ke^{\mu t}|\varphi_1^P - \varphi_2^P|,$$

si suponemos, lo que siempre podemos hacer, que $K>1$.

Suponiendo ahora

$$|\xi_1^i(t) - \xi_2^i(t)| \leq 2Ke^{\mu t}|\varphi_1^P - \varphi_2^P|, \quad t \leq 0,$$

tenemos

$$\begin{aligned}
|\xi_1^{i+1}(t) - \xi_2^{i+2}(t)| &\leq Ke^{\varepsilon t}|\varphi_1^P - \varphi_2^P| + K\rho(\delta)e^{\varepsilon t}|\xi_1^i(0) - \xi_2^i(0)| + \\
&+ 2K^2\rho(\delta)|\varphi_1^P - \varphi_2^P|\left(e^{\varepsilon t}\int_t^0 e^{(\mu-\varepsilon)s}ds + \right. \\
&\left. + e^{-\varepsilon t}\int_{-\infty}^t e^{(\mu+\varepsilon)s}ds\right) + 2K\rho(\delta)|\varphi_1^P - \varphi_2^P|e^{\mu t}\times \\
&\times \left(\int_0^t |d_s T(s)X_0^P|e^{-\mu s} + \int_0^\infty |d_s T(s)X_0^Q|e^{-\mu s}\right) \leq \\
&\leq Ke^{\mu t}|\varphi_1^P - \varphi_2^P|\left(1 + 4K\rho(\delta)\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2-\mu^2} + 2\delta\rho(\delta) + \right. \\
&\left. + 2M\rho(\delta)\right) \leq 2Ke^{\mu t}|\varphi_1^P - \varphi_2^P|, \quad t \leq 0,
\end{aligned}$$

si δ es suficientemente pequeña.

Aquí M es una constante que acota cada una de las dos últimas integrales.

A partir de aquí obtenemos, substituyendo en la expresión para σ_ρ, que

$$|\sigma_\rho(\varphi_1^P)-\sigma_\rho(\varphi_2^P)|\leq|\varphi_1^P-\varphi_2^P|+$$
$$+\int_{-\infty}^{0}|T(-s)\,X_0^Q|\,|F(\xi_1^\sim(s))-F(\xi_2^\sim(s)))\,ds+$$
$$+|T(t)X_0^P|\,|G(\xi_1^\sim(0)-\xi_2^\sim(0))|+$$
$$+\int_{-\infty}^{0}|d_s T(-s)X_0^Q|\,|G(\xi_1^\sim(s))-G(\xi_2^\sim(s))|\leq$$
$$\leq|\varphi_1^P-\varphi_2^P|+2K^2\rho(\delta)\,\frac{1}{\varepsilon}|\varphi_1^P-\varphi_2^P|+4K^2\rho(\delta)\,|\varphi_1^P-\varphi_2^P|\leq$$
$$\leq L|\varphi_1^P-\varphi_2^P|\,,$$

para una cierta constante M, lo cual prueba la continuidad lipschitziana de σ_P, y con ello que π_P es un homeomorfismo.

La demostración de que

$|\xi^\sim(t)|\leq 2Ke^{\mu t}|\varphi_1^P-\varphi_2^P|$, y que por lo tanto las trayectorias en $\mathfrak{P}$ tienden exponencialmente a 0 cuando $t\to-\infty$ se sigue de (22) tomando $\xi_2^\sim=0$.

Para demostrar la tangencia de $\mathfrak{P}$ y P en 0, obsérvese que, puesto que toda $\varphi\in\mathfrak{P}$ corresponde a una $\xi^\sim$, tenemos del lema de la sección anterior que

$$|\varphi^Q|\leq\int_{-\infty}^{0}|T(-s)X_0^Q|\,|F(\xi^\sim(s))|\,ds+$$
$$+\int_{-\infty}^{0}|d_s T(-s)X_0^Q|\,|G(\xi^\sim(s))|+$$
$$+\int_{-\infty}^{0}|d_s T(-s)X_0^Q|\,|G(\xi^\sim(0))|\leq$$
$$\leq\frac{2}{\varepsilon}K^2\rho(2K|\varphi^P|)\,|\varphi^P|+2K^2\rho(2K|\varphi^P|)\,|\varphi^P|+$$
$$+K\rho(2K|\varphi^P|)|\varphi|\,,$$ de donde se sigue que

$|\varphi^Q|/|\varphi|\to 0$ cuando $\varphi\to 0$, que es precisamente la expresión de la tangencia de $\mathfrak{P}$ y P en 0.

La demostración de la parte correspondiente a $\mathfrak{Q}$ se lleva al cabo en forma análoga, considerando el espacio de funciones

$$F:\{\eta:[0,\infty)\to C:\eta \text{ continua, } |\eta(t)|\leq k,\ t\in[0,\infty)\},$$

con la norma $|\eta|_F = \inf\{k:|\eta(t)|\leq k,\ t\in[0,\infty)\}$.

Para $\psi^Q \in Q\cap B_{\delta/2K}$ se considera entonces el conjunto

$$F_\delta(\varphi^Q)=\{\eta\in F:|\eta|_F\leq\delta,\ x_0^Q=\varphi^Q\},$$

y se define un operador $\Psi:F_\delta(\varphi^Q)\to F_\delta(\varphi^Q)$, por medio de $(\Psi\eta)(t)$ igual a la expresión en el lado derecho de (21).

Se demuestra que Ψ es una contracción y tiene por tanto un único punto fijo $\eta^\sim$. El resto de la demostración se sigue de manera análoga a lo que hemos hecho, utilizando también el lema de la sección anterior.

24. Del teorema anterior obtenemos que toda solución que no sale de B_δ para t creciente pertenece a la variedad $\mathfrak{Y}$, por lo que tenemos el comportamiento de las trayectorias en un entorno del orígen es del tipo de un punto silla.

Si se supone que para un cierto real $\alpha\geq 0$, $\alpha\not\in\overline{\operatorname{Re}\sigma(A)}$, y se toma la descomposición correspondiente $C=P\oplus Q$, entonces, de manera totalmente análoga a como hemos procedido, obtenemos la existencia de una variedad invariante $\mathfrak{P}$, tangente a P en 0, y tal que está constituida por todas las trayectorias que están definidas en $(-\infty,0]$, y cumplen $|x_t|\leq Me^{\alpha t}|x_0|$ para $t\in\mathbb{R}$ y alguna $M>0$.

Si $\alpha\leq 0$ se obtiene que existe $\mathfrak{Y}$ invariante, tangente a Q en 0, y que está constituido por las trayectorias que cumplen $|x_t|\leq Me^{\alpha t}|x_0|$, $t\geq 0$ para cierta $M>0$.

25. Debemos hacer notar que en el trabajo [14], siguiendo los lineamientos del trabajo [5], se prueba un teorema como el que hemos probado en este capítulo, pero con la fuerte restricción

de que P sea de dimensión finita. Esta restricción ha podido ser salvada gracias a los resultados de [7].

CAPITULO III

Trayectorias periódicas en el entorno de un punto de reposo.

26. Para la ecuación (14) con $0 \notin \overline{\mathrm{Re}\,\sigma(A)}$, establecimos en el capítulo anterior la existencia de la variedad asintótica $\mathfrak{Y}$ y el que todas las trayectorias que no están en dicha variedad dejan el entorno B_δ cuando t crece. Se tiene entonces que en B_δ no hay trayectorias periódicas, exceptuando la idénticamente 0. Vemos además que una perturbación que no haga cambiar mucho $\sigma(A)$, respetará dicha situación, a saber, que exista algún entorno sin trayectorias periódicas no triviales, debido a que para modificarla necesitaríamos cambiar $\sigma(A)$ hasta hacer que el cero estuviera en la adherencia de su parte real.

Vamos a considerar en este capítulo la misma ecuación (14), pero suponiendo que $\sigma(A)$ contiene un número finito de valores puramente imaginarios, todos múltiplos de un mismo número, y vamos a permitir que F y G contengan una parte lineal pequeña distinta de 0.

Nuestro objeto va a consistir en dar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de trayectorias periódicas en un entorno del origen. Estas condiciones se presentarán en forma de una ecuación de "bifurcación" o "determinante", que deben cumplir los puntos fijos de cierta aplicación.

El nombre "bifurcación" aparece de que al cambiar los parámetros de F y G, la solución idénticamente nula se "bifurca" para dar orígen a otras soluciones periódicas.

Es interesante hacer notar que las ecuaciones de bifurcación se pueden resolver por aproximaciones sucesivas, prestándose por lo tanto al cálculo numérico.

El método que vamos a desarrollar es una adaptación a las ecuaciones neutras del de Cesari-Hale, que se encuentra descrito para ecuaciones ordinarias en [15]. Este método comienza considerando ciertas ecuaciones no autónomas dependientes en t, para las cuales se obtiene la teoría. Dicha teoría se aplica entonces a resolver nuestro problema y sirve, además, para decidir sobre la estabilidad de las trayectorias periódicas encontradas.

27. Consideraremos la ecuación

$$(23)\quad D_t\,(x(t)-M(x_t)-G(t,x_t,\mu)=L(x_t)+F(t,x_t,\mu),$$

en que L y M satisfacen las condiciones de las secciones 6 y 13, mientras que F,G continuas estarán definidas en $\mathbb{R}\times\Omega\times I$, donde Ω es un entorno de 0 en C y I es el intervalo real $[-\mu_0,\mu_0]$ para cierta $\mu_0>0$. Nuestras hipótesis sobre F y G son:

i) $F(t,0,0)=0$

ii) $F(\cdot,\varphi,\mu)$ es periódica de período τ en $\mathbb{R}$ (τ-periódica)

iii) $|F(t,\varphi_1,\mu)-F(t,\varphi_2,\mu)|\le\rho(|\mu|,\varepsilon)|\varphi_1-\varphi_2|$, para φ_1, $\varphi_2\in B_\varepsilon\subset\Omega$ y ρ es una función continua, no decreciente en $|\mu|$ y ε, y con $\rho(0,0)=0$,

y las mismas para G.

Las condiciones garantizan la existencia y unicidad locales de solución con valor inicial φ para $t=\sigma$, cuyo valor en t denotaremos por $x(t,\sigma,\varphi)$ (ver [8]).

Observemos que las condiciones impuestas sobre F, G no impiden que tengan una parte lineal distinta de 0.

28. Supondremos que la ecuación lineal correspondiente

(24) $D_t\,(x(t)-M(x_t)) = L(x_t)$

es tal que $\sigma(A)$ contiene un conjunto finito Λ de valores imaginarios, y que todos ellos son múltiplos de $2\pi i/\tau = i\omega$. (Si el problema es real, todos ellos aparecerán en pares conjugados).

De acuerdo con la sección 10, tendremos subespacios de C, P y Q invariantes bajo la acción de T(t) tales que toda φ en C es expresable en forma única como $\varphi = \varphi^P + \varphi^Q$, con $\varphi^P \in P, \varphi^Q \in Q$. P será de dimensión finita m.

Si Φ es una base de P, entonces a todo elemento φ de P le corresponde un único elemento $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $\varphi = \Phi p$. En tal caso tenemos $T(t)\varphi = \Phi e^{Bt}p$, B la matríz $m \times m$ definida por $A\Phi = \Phi B$. Los valores propios de B son los elementos de Λ.

Si se escoge apropiadamente Φ, podemos obtener B en forma canónica de Jordan. Para el resto de este capítulo vamos a hacer la hipótesis complementaria sobre A, de que esta forma canónica sea diagonal, es decir, que B sea diagonalizable. Con esta hipótesis resulta que en P todas las trayectorias son periódicas con período τ.

Dado un elemento φ de C, designaremos por $p(\varphi)$ al único elemento de $\mathbb{R}^m$ tal que $\varphi = \Phi p(\varphi) + \varphi^Q$.

29. Denotaremos por S el espacio de las funciones continuas τ-periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$ con la norma del supremo $|\ |_S$.

Por Σ denotaremos el espacio de funciones continuas τ-periódicas de $\mathbb{R}$ en C con la norma del supremo $|\ |_\Sigma$.

Definimos el operador $\Omega: S \to S$ por

$$(\Omega f)(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{B(t-s)} f(s)\,ds.$$

Obsérvese que $(\Omega f)(t)$ es de la forma $e^{Bt}a$, y es por lo tanto, solución de la ecuación $y' = By$.

Usaremos indistintamente $(\Omega f)(t)$ y $\Omega(f(t))$.

30. Lema. Si $f \in S$, entonces la ecuación $y'(t) = By(t) + f(t)$, en que B es como en la sección 28, tiene una solución periódica si y sólo si $\Omega f = 0$, y en tal caso para todo $a \in \mathbb{R}^m$ la ecuación admite una única solución $y\sim(a)$ tal que $\Omega(y\sim(a)) = e^{B\cdot} a =: v(a)$.

Además se verifica la desigualdad

$$|y\sim(a) - v(a)|_S \le K \int_0^\tau |f(s)|\,ds,$$

en que K no depende ni de f ni de a.

(Nótese que $y\sim(a)$ no es necesariamente la solución con valor a en $t = 0$).

Demostración. La solución con valor y_0 en $t = 0$ viene dada por

$$y(t) = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{B(t-s)} f(s)\,ds. \tag{25}$$

Debido a que $e^{Bt} y_0$ es τ-periódica, a fin de tener $y(t)$ τ-periódica, es necesario y suficiente que $\int_0^\tau e^{-Bs} f(s)\,ds = 0$, o, usando nuestra notación, que $\Omega(f) = 0$.

Tenemos de (25) que $e^{-Bt} y(t) = a + g(t)$, donde $a = y_0 + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_0^t e^{-Bs} f(s)\,ds\,dt = y_0 + c$, y g es una función en S con valor medio 0.

Aplicando el operador Ω a $y \in S$ obtenemos

$$\Omega y(t) = e^{Bt} \left(y_0 + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_0^\xi e^{-Bs} f(s)\,ds\,d\xi\right) = e^{Bt} a =: v(a)(t),$$

con lo que tenemos una correspondencia biunívoca entre las soluciones periódicas de la ecuación homogénea y de la no homogénea.

El hecho de que $|g|_\Sigma \le k \int_0^\tau |f(s)|\,ds$ para alguna k independiente de f o de la solución particular, se sigue inmediatamente observando que

$$|g|_\Sigma \leq 2\tau |e^{-B\tau}|_\Sigma \int_0^t |f(s)|\, ds;$$

y de aquí se sigue la última parte del lema tomando $K = |e^{Bt}|_\Sigma\, k$, donde $|e^{Bt}|_\Sigma$ significa el supremo de la norma de la matríz para $t \in [0,\tau]$.

31. Lema. Sean $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $k:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ periódicas de período τ. Existe una única $\varphi \in Q$ tal que

$\tilde{x}_t^Q = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)X_0^Q h(s)\,ds + \int_0^t d_s T(t-s)X_0^Q (k(s) - k(0))$ es τ-periódica.

Además se verifica que

$$|\tilde{x}_t{}^Q|_\Sigma \leq K' \left(\int_0^\tau |h(s)|\, ds + \sup_{s\in[0,\tau]} |k(s)|\right),$$

en que K' es independiente de h y de k.

Demostración. Si $\tilde{x}_t{}^Q$ es τ-periódica, se tiene

$$\varphi = T(\tau)\varphi + \int_0^\tau T(t-s)X_0^Q h(s)\, ds + \int_0^\tau d_s T(t-s)X_0^Q\big(k(s)-k(0)\big),$$

es decir,

$$\varphi = (I-T(\tau))^{-1}\left(\int_0^\tau T(t-s)X_0^Q h(s)\, d_s + \int_0^\tau d_s T(t-s)X_0^Q (k(s)-k\ (0))\right)$$

Tenemos que $(I-T(\tau))^{-1}$ existe porque $(I-T(\tau))\varphi = 0$ implica $\varphi = 0$. Este es el caso, pues hemos supuesto que no hay soluciones τ-periódicas en Q, excepto la que es idénticamente nula.

La solución viene dada entonces por

$$\tilde{x}_t^Q = (I-T(t))^{-1}\left(\int_t^{t+\tau} T(t+\tau-s)X_0^Q h(s)\,ds + \int_t^{t+\tau} d_s\ (t+\tau-s)X_0^Q(k(s)-k(0)\right)$$

Para obtener una cota para la Σ- norma de $\tilde{x}_t^Q$ vemos:

$$|\tilde{x}_t^Q|_\Sigma \leq |(I-T(\tau))^{-1}|\Big(\sup_{s\in[t,t+\tau]} |T(t+\tau-s)X_0^Q| \int_0^\tau |h(s)|\, ds \times$$
$$\times\ 2 \sup_{s\in[0,\ \tau]} |k(s)| \int_t^{t+\tau} |d_s T(t+\tau-s)X_0^Q|\Big) \leq$$
$$\leq\ |(I-T(t))^{-1}|\ \Big(\sup_{s\in[0,\tau]} |T(t)X_0^Q| \int_0^\tau |h(s)|\, ds \times$$

$$\times\, 2 \sup_{s\in[0,\tau]} |k(s)| \int_0^\tau |d_s T(s) X_0^Q| \Big) \le$$
$$\le K \left(\int_0^\tau |h(s)|\, ds + \sup_{s\in[0,\tau]} |k(s)| \right)$$

32. Teorema. La ecuación

$$D_t\,(x(t)-M(x_t)-k(t)) = L(x_t) + h(t), \quad t \ge 0, \tag{26}$$

con k y h continuas y τ- periódicas y L y M como en la sección 28, admite una solución τ-periódica si y sólo si

$$\Omega(\Psi h + B\Psi k) = 0,$$

en que Ψ es la matriz que aparece en la sección 17.

En este caso para toda $a \in \mathbb{R}^a$ existe una única solución $\tilde{x}_t(a)$ τ-periódica tal que $\Omega(p(\tilde{x}_t(a)) = e^{Bt}(a+b) =: e^{Bt}c$, con $b = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{-Bs}\Psi k(s)\,ds$.

Vale además la desigualdad

$$|\tilde{x}_t(a) - T(t)\Phi c|_\Sigma \le K\left(\int_0^\tau |h(s)|\,ds + \sup_{s\in[0,\tau]} |k(s)|\right)$$

para una constante K que no depende ni de h ni de k.

Demostración. Proyectando las soluciones de (26) sobre P y Q de acuerdo con la sección 17, y tomando en cuenta (sección 18) que $T(t)X_0^P = \Phi e^{Bt}\Psi$, obtenemos que $x_t(\cdot,\varphi)$ es la solución de (26) con valor inicial φ si y sólo si

$$\begin{aligned} &p(x_t(\cdot,\varphi)) - \Psi k(t) = e^{Bt}(p(\varphi)-\Psi k(0)) + \\ &+\int_0^t e^{B(t-s)}(\Psi h(s) + B\Psi k(s))\,ds, \end{aligned} \tag{27}$$

$$x_t^Q(\cdot,\varphi) = T(t)\varphi^Q + \int_0^t T(t-s)X_0^Q h(s)\,ds + \int_0^t d_s T(t-s) X_0^Q k(s)\,ds.$$

Denotando por f a $\Psi h + B\Psi k$ y por $y(t)$ a $p(x_t) - \Psi k(t)$, la primera igualdad nos queda

$$y(t) = e^{Bt}y(0) + \int_0^t e^{B(t-s)} f(s)\,ds,$$

que no es más que la solución de la ecuación diferencial $y' = By + f$ que toma el valor $y(0)$ para $t = 0$.

Se sigue entonces de los lemas anteriores la con clusión de nuestro teorema.

En particular la desigualdad proviene de

$$|D(x_\cdot)-(\Psi k+e^{B\cdot}a)|\leq K'\int_0^\tau|\Psi h(s)+B\Psi k(s)|\ ds\leq$$

$$\leq K''\int_0^\tau(|h(s)|+|k(s)|)\ ds.$$

33. De lo dicho anteriormente se sigue que si $\xi\in\Sigma$, entonces, para toda $a\in\mathbb{R}^m$, la ecuación $y'(t)=By(t)+H(t,\xi(t))-\Omega H(t,\xi(t))$, donde $H(t,\varphi)$ es continua, τ-periódica en t y localmente lipschitziana en φ, tiene una única solución $\bar{y}(a,\xi)$ en S tal que $\Omega(\bar{y}(a,\xi))=e^{B\cdot}=\ (a)$.

Para abreviar usaremos la notación

$$f(\xi)(t)=H(t,\xi(t))-\Omega H(t,\xi(t)).$$

La solución $\bar{y}(a,\xi)$ puede escribirse entonces

$$\bar{y}(a,\xi)(t)=e^{Bt}\Big(a+\int_0^t e^{-Bs}f(\xi)(s)\,ds-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_0^u e^{-Bs}f(\xi)(s)\,ds\,du\Big)=:$$

$$=:e^{Bt}\ (a+g(t)).$$

Podemos ocuparnos de las componentes de g(t) por separado. Cada una de las funciones g_i, $i=1,\dots,m$, tiene valor medio 0, por lo que existe $\sigma_i\in[0,\tau]$ tal que $g_i(\sigma_i)=0$. Sea $\bar{\sigma}$ el vector de componentes $(\sigma_1,\dots\sigma_m)$, y sea

$$\int_{\bar{\sigma}(\xi)}^t e^{-Bs}f(\xi)(s)\,ds \qquad \text{el vector } g(t)$$

que tiene por componentes

$$g_i(t)=\int_{\sigma_i(\xi)}^t e^{-Bs}f_i(\xi)(s)\,ds.$$

Notemos que realmente $\bar{\sigma}(\xi)$ no es una función de ξ, puesto que puede haber más de una valor de σ para los que $g_i(\sigma_i)$ se anule, aún restringiéndonos al intervalo $[0,\tau]$. Con $\bar{\sigma}(\xi)$ expresamos entonces cualquier valor con esta propiedad.

Observamos ahora que si tomamos otro elemento ξ' de Σ, la siguiente propiedad de aditividad vale para alguna

$\bar{\sigma}(\xi+\xi')$ con componentes en $[0,\tau]$:

$$\int_{\bar{\sigma}(\xi)}^{t} e^{-Bs} f(\xi)(s)\,ds + \int_{\bar{\sigma}(\xi')}^{t} e^{-Bs} f(\xi)(s)\,ds =$$

$$= \int_{\bar{\sigma}(\xi+\xi')}^{t} e^{-Bs}(f(\xi)(s) + f(\xi')(s))\,ds.$$

Esto se sigue de que los dos términos del primer miembro tienen valor medio 0, y por lo tanto su suma también. Siendo la derivada de dicho primer miembro $f(\xi)-f(\xi')$, deducimos que existe $\bar{\sigma}(\xi+\xi')$ con la propiedad mencionada.

34. Volveremos ahora a la ecuación (23) de la sección 27, con las condiciones ahí establecidas para F y G.

Para una α tal que $0<\alpha<1$ fijas, vamos a considerar para cada d con $B_d \subset \Omega$ y cada $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\Phi e^{B\cdot}a|_\Sigma \le \alpha d$, el subconjunto $\Sigma_{a,d}$ de Σ dado por:

$$\Sigma_{a,d} = \{\xi \in \Sigma : \tilde{\Omega}\xi = \Phi e^{B\cdot}a, |\xi|_\Sigma \le d\},$$

donde $\tilde{\Omega}:\Sigma \to \Sigma$ está definido por $\tilde{\Omega} = \Phi\Omega p$.

<u>Lema</u>. Existe $\mu_1 > 0$, $d > 0$ tal que para toda $a \in \mathbb{R}^n$ con $|\Phi e^{Bt}a|_\Sigma \le \alpha d$ y para toda μ con $\mu \le \mu_1$, existe una única $\xi = \xi(a,\mu)$ en $\Sigma_{a,d}$ tal que satisface las relaciones

(28) $\quad D_t y(t,\xi(t),\mu) = By(t,\xi(t),\mu) + f(t,\xi(t),\mu),$

donde $\quad y(t,\xi(t),\mu) = p(\xi(t)) - \Psi G(t,\xi(t),\mu),$

$\quad f(t,\xi(t),\mu) = H(t,\xi(t)\mu) - \Omega H(t,\xi(t)\mu),$

con $\quad H(t,\xi(t),\mu) = \Psi F(t,\xi(t),\mu) + B\Psi G(t,\xi(t),\mu)$, y

(29) $$\xi(t)^Q = T(\ \xi(t)^Q + \int_0^t T(t-s)X_0^Q F(s,\xi(s),\mu)\,ds +$$
$$+\int_0^t d_s\, T(t-s)X_0^Q\Big(G(s,\xi(t),\mu) - G(0,\xi(0),\mu)\Big)$$

Además $\xi(a,\mu)$ es continua en (a,μ).

<u>Demostración</u>. Para $a \in \mathbb{R}^n$ el lema de la sección 30 nos da una única solución $\tilde{y} = \tilde{y}(a,\zeta,\mu)$ tal que $\Omega\tilde{y} = e^{B\cdot}a$, de la ecuación

$$y\ (t) = By(t) + f(t,\zeta(t),\mu),$$

Por otro lado tenemos por el lema de la sección 31, una única solución τ-periódica $\tilde{x}_t^Q(\zeta,\mu)$ de la ecuación

$$x_t^Q = T(t)x_0^Q + \int_0^t T(t-s)X_0^Q\ F(s,\zeta(s),\mu)ds +$$
$$+\int_0^t d_s T(t-s)X_0^Q(G(s,\zeta(s),\mu)-G(0,\zeta(0),\mu)) .$$

Definimos el operador $\mathfrak{S}_{a,\mu}$ de $\Sigma \to \Sigma$ por medio de

$$\mathfrak{S}_{a,\mu}\,\zeta(t) = \Phi\tilde{y}(a,\zeta,\mu)(t) + \Phi\Psi G(t,\zeta(t),\mu) +$$
$$+ \tilde{x}_t^Q(\zeta,\mu) = (\mathfrak{S}_{a,\mu}^P\,\zeta + \mathfrak{S}_{a,\mu}^Q\,\zeta)(t) .$$

Se tiene $\tilde{\Omega}(\mathfrak{S}(\zeta)) = \Phi\, e^{Bt}c$

Supongamos ahora $\zeta \in \Sigma_d$:

Tenemos del lema de la sección 30

$$|\tilde{y}-e^{B\cdot}a| \leq K\int_0^\tau |f(s,\zeta(s),\mu)|\, ds,$$

de donde, tomando en cuenta $|\Omega f|_\Sigma \leq |f|_S$, se sigue

$$|\mathfrak{S}^P\zeta|_\Sigma \leq |\Phi e^{Bt}a| + |\Phi\Psi G(t,\zeta(t),\mu)| +$$
$$+ 2K\int_0^\tau |\Psi F(s,\zeta(s),\mu) + B\Psi G(s,\zeta(s),\mu)|\, ds \leq$$
$$\leq \alpha d + |\Phi||\Psi|\rho(|\mu|,d)d +$$
$$+ 2K\tau\rho(|\mu|,d)d(|\Psi| + |B||\Psi|) \leq d$$

si $|\mu|$ y d son suficientemente pequeñas.
Para $\mathfrak{S}^Q\zeta$ se tiene del lema de la sección 31 que para toda ε

$$|\mathfrak{S}^Q\zeta|_\Sigma \leq K'(\int_0^\tau |F(s,\zeta(s),\mu)|\, ds +$$
$$\sup_{s\in[0,\tau]} |G(s,\zeta(s),\mu)|) \leq$$
$$\leq K'(\tau\rho(|\mu|,d)d + \rho(|\mu|,d)d) < \varepsilon$$

si $|\mu|$,d son suficientemente pequeños.

De aquí se sigue que para $|\mu|$, d suficientemente pequeños $\mathfrak{F}$ aplica $\Sigma_{a,d}$ en $\Sigma_{a,d}$.

Comprobaremos ahora que $\mathfrak{F}$ es una contracción: Consideremos dos elementos ζ_1, ζ_2 de $\Sigma_{a,d}$.
Tenemos, de la expresión obtenida en la sección 33

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{F}^P\zeta_1 - \mathfrak{F}^P\zeta_2|_\Sigma \leq |\Phi| \Big| \int_{\bar{\sigma}(\zeta_1-\zeta_2)}^{t} & e^{-Bs}(f(s,\zeta_1(s),\mu) - \\
& -f(s,\zeta_2(s),\mu))\, ds \Big| + \\
& +|\Phi||\Psi||G(t,\zeta_1(t),\mu) - G(t,\zeta_2(t),\mu)| \leq \\
& \leq 2|\Phi||e^{B\cdot}|_\Sigma \tau\rho(|\mu|,d)|\zeta_1-\zeta_2|_\Sigma + \\
& +|\Phi||\Psi|\rho(|\mu|,d)|\zeta_1-\zeta_2|_\Sigma \leq \\
& \leq \delta_1|\zeta_1-\zeta_2|_\Sigma .
\end{aligned}
$$

Por otro lado, del lema de la sección 31

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{F}^Q\zeta_1 - \mathfrak{F}^Q\zeta_2| & \leq 2K'(\tau\rho(|\mu|,d) + \rho(|\mu|,d))|\zeta_1-\zeta_2| \leq \\
& \leq \delta_2|\zeta_1-\zeta_2|
\end{aligned}
$$

Tomando $|\mu|$, d suficientemente pequeños para que $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ sea menor que 1, la aplicación $\mathfrak{F}_{a,\mu}$ es una contracción de $\Sigma_{a,d}$ en $\Sigma_{a,d}$, y por lo tanto existe una única $\xi(a,\mu)$ para la que se cumple

$$\mathfrak{F}_{a,\mu}\, \xi(a,\mu) = \xi(a,\mu)$$

Por ser $\mathfrak{F}_{a,\mu}$ continuo en (a,μ), y al ser $\mathfrak{F}_{a,\mu}$ una contracción se sigue que el punto fijo, $\xi(a,\mu)$, es también continuo en (a,μ).

Por último observamos que $\xi(a,\mu)$ cumple las ecuaciones (28) y (29), con lo cual queda demostrado el teorema.

También observamos que si ρ no depende de d, entonces los resultados anteriores son válidos para cualquier d tal que $B_d \subset \Omega$.

35. <u>Teorema.</u> Si para una (a,μ) particulares se tiene que la $\xi(a,\mu)$ del teorema anterior, que satisface (28) y (29), también satisface

$$(30) \qquad \Omega H(t,\xi(a,\mu)(t),\mu) = 0,$$

entonces $\xi(a,\mu)(t)$ es igual a $x_t(a,\mu)$, donde $x(a,\mu)$ es una solución τ-periódica de (23). Recíprocamente toda solución de (23) con $|\mu| \leq \mu_1$ y perteneciente a $\Sigma_{a,d}$, es solución de (28) y (29).

<u>Demostración</u>. La primera parte se sigue de que, al satisfacer $\xi(a,\mu)$ las condiciones estipuladas, entonces satisface la ecuación (18) (ver la demostración del teorema de la sección 32), con las F y G correspondientes, y, como se hizo notar en la demostración del lema de la sección 22, entonces corresponde a una x, solución de la ecuación.

La segunda parte se sigue de observar que al cumplir x la ecuación (23) para alguna μ suficientemente pequeña, entonces debe cumplir la ecuación de variación de parámetros (18) correspondiente, que es equivalente a que satisfaga (28), (29) y (30). El resultado se sigue entonces de la unicidad de solución de (28) y (29).

36. La ecuación (30) es conocida como la <u>ecuación de bifurcación</u> o <u>ecuación determinante</u>.

Obsérvese que si Λ es vacío, es decir si (24) tiene la solución idénticamente nula como la única solución τ-periódica, entonces la relación (30) se satisface siempre trivialmente, y concluimos que (23) tiene una única solución τ-periódica $x_t(\mu)$, que depende continuamente de μ, y que tiende a 0 cuando $\mu \to 0$.

37. Un método para determinar órbitas τ-periódicas de (23) para μ,d pequeñas, consiste en encontrar el punto fijo $\xi(a,\mu)$ de $\mathfrak{D}_{a,d}$, substituir estos valores en (30) y despejar a en términos de μ. Es claro que el método tal como lo acabamos de bosquejar no es práctico por que en general no podemos encontrar $\xi(a,\mu)$ explícitamente. Sin embargo, dado (a,μ), podemos encontrar una sucesión $\xi^k(a,\mu)$ de funciones τ-periódicas que converjan uniformemente a $\xi(a,\mu)$, debido a que $\xi(a,\mu)$ es punto fijo de una aplicación contractiva. La sucesión viene dada por

$$\xi^0(a,\mu) = \Phi e^{B\cdot} a$$

(31) $$\xi^k(a,\mu) = \mathfrak{D}_{a,d}\xi^{k-1}(a,\mu)$$

Observamos que debido a la forma de $\mathfrak{D}$ se tiene $\xi_t(a,0) = \Phi e^{Bt} a$ si se cumple o bien que $\phi(o,d) = 0$ para toda d tal que $B_d \subset \Omega$, o bien $a = 0$.

Ahora bien, si $\xi(a,\mu)$ es diferenciable con respecto a a, podemos usar el teorema de función implícita para decidir si se puede despejar a en la ecuación (30) en función de μ. Si esto fuera posible y $a(\mu)$ es continua, tendríamos además una aproximación de la a correspondiente a las soluciones periódicas para μ pequeña.

A fin de asegurar esta diferenciabilidad tenemos que imponer más restricciones a F y G.

38. Lema. Si F y G cumplen las condiciones impuestas anteriormente, y además existen $D_\varphi F(t,\varphi,\mu)$ y $D_\varphi G(t,\varphi,\mu)$ y son localmente lipschitzianas en φ con una constante de Lipschitz $\rho(|\mu|,\varepsilon)$ como en la sección 27 para $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in B_\varepsilon \subset \Omega$, $\mu \in [0,\mu_1]$, entonces tanto la $\xi(a,\mu)$ del lema de la sección 34 como $\Omega H(t,\xi(a,\mu)(t),\mu)$ son diferenciables respecto a a para μ y ε suficientemente pequeñas.

(Obsérvese que si $F(t,\varphi,\mu) = \mu \tilde{F}(t,\varphi)$

con $F^{\sim}$ y $D_{\varphi}N^{\sim}$ lipschitzianas, y lo mismo para G, entonces las condiciones del lema se cumplen).

Demostración. Usaremos inducción en la sucesión (31).

Tenemos que $D_a\xi^0(a,\mu)(t) = \phi e^{Bt}$. Suponiendo que $D_a\xi^k(a,\mu)(t)$ existe, tenemos (ver demostración del lema de la sección 34):

$$D_a\xi^{k+1}(\alpha,\mu)(t) = D_a\Phi\tilde{y}(a,\xi^k(a,\mu)(t),\mu) +$$
$$+D_a\Phi\Psi G(t,\xi^k(a,\mu)(t),\mu) + D_a\xi^k(a,\mu)(t)^Q$$

Tenemos de la sección 33:

$$D_a\tilde{y}(a,\xi^k(a,\mu)(t),\mu) = e^{Bt}(I + \int_0^t e^{-Bs}D_a f(s,\xi^k(a,\mu(s),\mu)ds-$$
$$-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_0^u e^{-Bs}D_a f(s,\xi^k(a,\mu)(s),\mu)ds\, du.$$

Y también

$$D_a\xi^k(a,\mu)(t)^Q = (I-T(t))^{-1}\Big(\int_t^{t+\tau} T(t+\tau-s)X_0^Q D_a F(s,\xi^k(a,\mu)(s),\mu)ds +$$
$$+\int_t^{t+\tau} d_s(t+\tau-s)X_0^Q D_a(G(s,\xi^k(a,\mu)(s),\mu)-G(0,\xi^k(a,\mu)(0),\mu)\Big).$$

Debido a nuestras hipótesis se sigue por inducción que $D_a\xi^{k+1}(a,\mu)(t)$ existe y es continua. Además podemos escoger μ,ε suficientemente pequenos para que $|D_a\xi^k(a,\varepsilon)|_\Sigma < M$ para todà k.

Se coteja que $D_a\xi^k(a,\mu)$ converge uniformemente en Σ_a a una matriz de funciones que es precisamente $D_a\xi(a,\mu)$. Para ello se observa que $D_a\xi^k(a,\mu)$ forma una sucesión de Cauchy en Σ:

$$|D_a\xi^{k+1}(a,\mu)-D_a\xi^k(a,\mu)|_\Sigma \leq$$
$$\leq \rho(|\mu|,\varepsilon)k_1(|\xi^k-\xi|_\Sigma + |\xi-\xi^{k+1}|_\Sigma) +$$
$$+ \rho(|\mu|,\varepsilon)k_2|D_a\xi^k - D_a\xi^{k-1}|_\Sigma.$$

En K_1 interviene la cota M de $|D_a\xi^k|_\Sigma$, mientras que en K_2 interviene la cota de $D_\varphi f$ en B_ε.

De que $\mathfrak{H}$ es una contracción con constante de Lipschitz δ (ver la demostración del lema de la sección 34), tenemos,

$$|\xi^k(\mu,\varepsilon)-\xi(\mu,\varepsilon)|_\Sigma \leq \frac{\delta^k}{1-\delta}\,|\xi^1(a,\mu)-\xi^0(a,\xi)|_\Sigma .$$

Sea γ el máximo de $\rho(|\mu|,\varepsilon)K_1$ y $\rho(|\mu|,\varepsilon)K_2$ y escójase $(|\mu|,\varepsilon)$ suficientemente pequeño para que $\gamma<1$. Si β es el máximo de γ y δ, se sigue de las desigualdades anteriores que

$$\begin{aligned}
&|D_a\xi^{k+1}(a,\mu)-D_a\xi^k(a,\mu)| \leq \\
&\leq \beta\left(\frac{\beta^k+\beta^{k-1}}{1-\beta}\right)|\xi^1(a,\mu)-\xi^0(a,\mu)|_\Sigma + \\
&+\beta\,|D_a\xi^k(a,\mu)-D_a\xi^{k-1}(a,\mu)| \leq \\
&\leq \beta(\Delta^k+\beta\Delta^{k-1}+\ldots+\beta^{k-1}\Delta^1)\,|\xi^1-\xi^0|_\Sigma + \\
&+\beta^k|D_a\xi^1-D_a\xi^0| \leq k\beta^k\frac{1+\beta}{1-\beta}|\xi^1-\xi^0|_\Sigma + \\
&+\beta^k\,|\xi^1-\xi^0|_\Sigma \leq \beta^k\left(k\frac{1+\beta}{1-\beta}+L\right)|\xi^1-\xi^0|_\Sigma ,
\end{aligned}$$

donde Δ^k denota a $\dfrac{\beta^k+\beta^{k-1}}{1-\beta}$, y L es una constante relacionando las normas de $|\xi^1-\xi^0|_\Sigma$ y $|D_a\xi^1-D_a\xi^0|_\Sigma$. Debido a que $\sum_{k=1}^{\infty} k\beta^k$ converge, se sigue que $\{D_a\xi^k(a,\mu)\}$ es una sucesión de Cauchy, que converge a un elemento de Σ, que es $D_a\xi(a,\mu)$.

Con esto queda demostrado el lema.

39. Estamos ahora en situación de dar un teorema que da condiciones suficientes prácticamente verificables para la existencia de soluciones τ-periódicas.

<u>Teorema</u>: Supongamos que se cumplan las hipótesis del lema ante

rior, y que, además, $H = \mu \tilde{H}$ con $\tilde{H}$ continua. Entonces, la existencia de a_0 con $|\Phi e^{B\cdot} a_0|_\Sigma < \delta$ y para la que

$$\text{(32)} \qquad \begin{aligned} &\Omega \tilde{H}(t, \Phi e^{Bt} a_0, 0) = 0, \ y \\ &\det D_a \Omega \tilde{H}(t, \Phi e^{Bt} a_0, 0) \neq 0, \end{aligned}$$

implica que existe $\mu_1 > 0$ tal que la ecuación (23) tiene una única solución $\tilde{x}(a_0, \mu)$ para cada μ con $|\mu| \leq \mu_1$ con la propiedad $\tilde{x}_t(a_0, 0) = \Phi e^{Bt} a_0$. Esta solución es continua en ε (en el espacio Σ).

<u>Demostración</u>: Del lema de la sección 34 tenemos que para μ, a suficientemente pequeñas, existe $\xi(a, \mu)$ punto fijo de $\mathfrak{F}$ (ver demostración de dicho lema). Del teorema de la sección 35, obtenemos que la ecuación (23) tiene una solución τ-periódica tal que $x_t(a, \mu) = \xi(a, \mu)$ para alguna a y $\mu \neq 0$, si se cumple (30). Por el lema anterior, $\Omega\tilde{H}(t, \xi(a, \mu)(t), \mu)$ es diferenciable respecto a a, y por lo tanto si se cumplen las condiciones (32) el teorema de la función implícita nos da una función τ-periódica para μ suficientemente pequeña.

Por otro lado, la forma de H, conteniendo un factor μ, nos asegura que $\Phi e^{Bt} a = \xi(a, 0)(t)$, y de ello la conclusión del teorema.

40. Si en el teorema anterior se tiene que $\det D_a \Omega \tilde{H}(t, \Phi e^{Bt} a_0, 0) = 0$, entonces no podemos asegurar nada sobre la existencia de soluciones periódicas sin el uso de aproximaciones de orden superior. Para hacer estos cálculos se puede usar el polígono de Newton.

Supongamos que a es un escalar, que $\Omega\tilde{H}(t, 0, 0) = 0$ y que $\Omega\tilde{H}(t, \xi(a, \mu)(t), \mu) =$

$$= \mu^\nu (k_0 a^{m_0} + k_1 a^{m_1} \mu^{n_1} + \ldots + k_p a^{m_p} \mu^{n_p}) + h(a, \mu) =$$

$$= \mu^\nu P(a, \mu) + h(a, \mu),$$

donde h consiste de términos de orden superior en a,μ, y $P(a,\mu)$ se ha escogido de manera de tomar en cuenta sólo los términos que se encuentran en el lado de más pendiente del polígono de Newton, es decir, aquellos para los que $\nu nj/(m_0-m_j)$ es un mínimo. Si $\lambda = n_j/(m_0-m_j)$, $j=0,1,\dots,p$, $a=\bar{a}\mu^{\lambda}$, $\Omega\bar{H}(t,\xi(\bar{a}\mu^{\lambda},\mu)(t),\mu) =: \bar{H}(\bar{a},\mu)$, entonces

$$(33)\quad \bar{H}(\bar{a},\mu) = \mu^{\nu+\lambda\mu_0}(k_0\bar{a}^{-m_0}+\dots+k_p\bar{a}^{-m_p}) + h(\bar{a},\mu) =$$
$$=: \mu^{\nu+\lambda m_0}\bar{P}(\bar{a}) + h(\bar{a},\mu),$$

donde $\qquad h(\bar{a},\mu)$ es $o(\mu^{\nu+\lambda m_0})$ para $\bar{a}$ fija.

Si se quiere determinar $\bar{a}(\mu)$ tal que $\bar{H}(\bar{a}(\mu),\mu)=0$ para μ suficientemente pequeño, cabe aplicar el teorema de función implícita. Debido a la forma de $\bar{F}(\bar{a},\mu)$, basta con encontrar $\bar{a}$ tal que $\bar{H}(\bar{a})=0$, $D_a\bar{P}(\bar{a})\neq 0$. La existencia de tal $\bar{a}$ implica la existencia de una solución de (33) tal que la $a(\mu)$ correspondiente es asintótica con $\bar{a}\mu^{\lambda}$ cuando μ tiende a 0.

En el caso en que $\Omega\bar{H}(t,\xi(a_0,0),0)=0$ para $a_0\neq 0$, el tratamiento es análogo, pero desarrollando en términos de $a-a_0$.

41. Tenemos ahora ya los resultados previos necesarios para abordar el problema propuesto al comenzar el capítulo, a saber, determinar las soluciones periódicas en el entorno de un punto de reposo (que consideramos, sin pérdida de generalidad que sea el 0), de la ecuación (14), que es la misma (23) cuando F y G son independientes de t. Supondremos que F y G cumplen las condiciones de la sección 27, y la parte lineal las estipuladas en la sección 28, es decir, que la matriz B es diagonalizable y tiene por valores propios múltiplos de $2\pi i/\tau = i\omega$ con lo cual todas las trayectorias contenidas en

P son τ-periódicas .

Aun cuando la diagonalización no podrá necesariamente obtenerse por medio de transformaciones reales, en el caso real, que es el que nos interesa, siempre podremos escoger Φ, la base de P, de tal manera que la matriz B sea de la forma

$$B(\omega)= \mathrm{diag}(0_p, C_1(\omega), \ldots, C_q(\omega)) ,$$

con $$C_j(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & n_j\omega \\ -n_j\omega & 0 \end{pmatrix},$$

donde 0_p es la matriz nula de $p \times p$, y n_j son enteros positivos. Puede ocurrir que $n_j = n_k$ para $j \neq k$.

En este caso no podemos suponer que el período τ de las soluciones del sistema lineal se preserve cuando se añaden F y G. Sin embargo es de esperarse que cuando μ tienda a 0, las soluciones periódicas de

$$(34) \qquad D_t(x(t)-M(x_t)-G(x_t,\mu)) = L(x_t) + F(x_t,\mu),$$

tiendan a las soluciones de la parte lineal (24), y que, por lo tanto, su período tenderá a τ.

Por lo tanto vamos a buscar soluciones periódicas de período $\tau(\mu) = 2\pi/\omega(\mu)$, con $\omega(\mu) = \omega + \eta(\mu)$, en que η es la función a determinar.

Tenemos $\xi(t) = \Phi p(\xi(t)) + \xi(t)^Q$ es solución de la ecuación (34), si y sólo si $P(\xi(t)) = :y(t) + \Psi G(\xi(t),\mu)$ y $\xi(t)^Q$ satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$(35) \qquad y'(t) = B(\omega(0))\, y(t) + g(x_t,\mu),$$

donde $$g(\xi(t),\mu) = \Psi F(\xi(t),\mu) + B\Psi G(\xi(t),\mu), \text{ y}$$

$$(36) \qquad \xi(t)^Q = T(t)\xi(0)^Q + \int_0^t T(t-s)X_0^Q F(\xi(s),\mu)\,ds +$$

$$+ \int_0^t d_s T(t-s) X_0^Q (G(\xi(s),\mu) - G(\xi(0),\mu)) .$$

Si aplicamos el cambio de variables periódico

$y(t) = e^{B(\omega(\mu))t} z(t)$, obtenemos en lugar de (35) la ecuación:

$$(37) \qquad z'(t) = \mu e^{-B(\omega(\mu))t} B(\eta(\mu)) e^{B(\omega(\mu))t} z(t) + + e^{-B(\omega(\mu))t} g(\phi e^{B(\omega(\mu))t} z(t) + x_t{}^Q, \mu),$$

En combinación con (36) esto es de la forma

$$z'(t) = Dz(t) + f(t, z(t), \xi(t)^Q, \mu, \eta)$$

$$(38) \qquad \xi(t)^Q = T(t) x_0^Q + \int_0^t T(t-s) X_0^Q \tilde{F}(s, z(s), \xi(s)^Q, \mu, \eta) ds + + \int_0^t d_s T(t-s) X_0^Q \tilde{G}(s, z(s), \xi(s)^Q, \mu, \eta),$$

donde D es la matriz 0 de $m \times m$, y $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ son τ-periódicas en t, y satisfacen todas las condiciones necesarias para que valgan el lema de la sección 34 y el teorema de la sección 35.

Si queremos aplicar el teorema de la sección 39 utilizando la diferenciabilidad de F y G, observamos que si definimos

$$\tilde{f}(a, \mu, \eta) = \int_0^{\tau(\mu)} \frac{1}{\mu} f(s, z(s, a, \mu, \eta), x_s^Q(a, \mu, \eta), \mu, \eta) ds,$$

entonces (32) viene dado por

$$(39) \qquad \tilde{f}(a_0, 0, \eta_0) = 0$$

$$\text{rango}(D_{(a,\eta)} \tilde{f}(a_0, 0, \eta_0)) = m,$$

con lo que se obtienen a y η en función de μ.

En este caso quedan determinadas η y p-1 de las componentes de a, mientras que la otra componente de a se puede fijar arbitrariamente debido a la autonomía de la ecuación, en que una familia monoparamétrica de soluciones corresponde a una sola órbita cerrada.

CAPITULO IV

Ejemplos y comentarios.

41. En este capítulo vamos a presentar un ejemplo a fin de indicar de que manera se puede proceder en un caso concreto para determinar los subespacios P y Q y la existencia de trayectorias periódicas. El ejemplo es de una ecuación con M y G iguales a 0, es decir, del tipo retrasado.

Indicaremos también cual es el procedimiento que se sigue para determinar las características de estabilidad de las trayectorias periódicas en el caso de ecuaciones de tipo retrasado, y esto nos hará ver que hay que llenar algunos huecos para hacer este procedimiento aplicable a la clase más amplia de ecuaciones de tipo neutro. Esto nos indica una dirección de investigación futura.

También, para concluir haremos notar como se dificulta el determinar trayectorias periódicas por métodos topológicos, debido a la falta de compacidad de las aplicaciones $T(t)$, a diferencia de lo que ocurre cuando las ecuaciones son del tipo retrasado.

42. Consideraremos la ecuación

$$z'''(t) + az''(t) + b^2 z'(t) + kz(t-r) + \varepsilon\psi(z(t-r)) = 0, \tag{40}$$

en que a, b^2, k, r y ε son constantes positivas, y ψ una función real, localmente lipschitziana.

Esta ecuación corresponde a un sistema con retroalimentación no lineal y con retraso en el tiempo.

Indicaremos que condiciones deben cumplir los parámetros para que las raices características sean todas de parte real negativa, excepto dos que serán puramente imaginarias. A continuación encontraremos P correspondiente a estas dos raices, y determinaremos soluciones periódicas.

43. La ecuación característica de la parte lineal de (40) es

$$k^3 + ak^2 + b^2k + ke^{-rk} = 0,$$

que con el cambio de variable $\lambda = rk$, y tomando $ar = p$, $b^2r^2 = q$, $kr^3 = m$, queda

(41) $$H(\lambda) = \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + me^{-\lambda} = 0$$

Vamos a ver que condiciones necesitamos pedir para que (41) tenga sólo dos raices imaginarias $\pm i\omega$, $\omega \geq 0$ y el resto con parte real negativa, (a fin de que en Q las trayectorias tiendan exponencialmente a 0). Para ello vamos a seguir el método dado en el capítulo 13 de [1].

Tenemos que $H(i\omega) = F(\omega) + iG(\omega)$ con

$$F(\omega) = -p\omega^2 \cos\omega + \omega\ (\omega^2 - q)\operatorname{sen}\omega + m$$

$$G(\omega) = -\omega(p\omega \operatorname{sen}\omega + (\omega^2 - q)\cos\omega).$$

Debido a que el término principal de $G(\omega)$ es $-\omega^3\cos\omega$, y $\cos(iy) \neq 0$ para toda y real, $G(\omega) = 0$ tiene precisamente $4n+2$ raices en la faja $-2n\pi \leq \mathrm{Re}\,\omega \leq 2n\pi$ para n suficientemente grande.

Estas $4n+2$ raices son reales porque $G(\omega) = 0$ es equivalente a $\operatorname{tg}\omega = (q-\omega^2)/p\omega$. Debido a que $\operatorname{tg}\omega$ y $(q-\omega^2)/p\omega$ son funciones impares, y a que además $(q-\omega^2)/p\omega \to -\infty$, $D_\omega((q-\omega^2)/p\omega) \to -1/p$, $D_\omega^2((q-\omega^2)/p\omega) = 2q/p\omega^3 \to 0$ cuando $\omega \to \infty$, con $2q/p\omega^3 > 0$, se tiene una raiz de $G(\omega) = 0$ en cada rama de $\operatorname{tg}\omega$, y a partir de cierto valor de ω, el valor de $\operatorname{tg}\omega$ será negativo.

Vamos a designar los valores no negativos de

ω tales que $G(\omega)=0$ por $\omega_0=0$, $\omega_1, \omega_2, \ldots$ y tomaremos $\omega_{-i}=-\omega_i$.

Debido a que queremos raices conjugadas, pediremos que para cierta j, ω_j y ω_{-j} sean tales que $F(\omega_j)=F(\omega_{-j})=0$, $G'(\omega_j)\neq 0\neq G'(\omega_{-j})$, mientras que para el resto de las ω_i se deberá verificar $G'(\omega_i)F(\omega_i)>0$, a fin de asegurar que las raices de $H(\lambda)=0$ tengan parte real negativa.

Tenemos

$$G'(\omega)=\omega(\omega^2-q-2p)\operatorname{sen}\omega+(q-3\omega^2-p\omega^2)\cos\omega\ ,$$

en que tanto F como G' son funciones pares.

Como $G'(0)=q$, $F(0)=m$, se tiene $F(0)G'(0)=qm>0$.

Para las ω_i no nulas, por otro lado

$$F(\omega_i)=-\cos\omega_i\ (p^2\omega_i^2+(\omega_i^2-q)^2)/p+m$$
$$G'(\omega_i)=-\cos\omega_i\ ((\omega_i^2-q)^2+\omega_i^2p+\omega_i^2p^2+pq)/p,$$

y debido a que el término entre paréntesis en la última expresión es siempre positivo, tenemos que $F(\omega_i), G'(\omega_i)$ tienen el mismo signo que

$$L(\omega_i)=\cos^2\omega_i\ (p^2\omega_i^2+(\omega_i^2-q)^2)/\omega_i^2p^2-m\cos\omega_i/p=$$
$$=1-m\cos\omega_i/\omega_i^2p.$$

Para i par tenemos $\cos\omega_i<0$, y por lo tanto $L(\omega_i)>0$.

Para i impar se tiene

$$m\cos\omega_i/\omega_i^2p=m/(\omega_i\sqrt{(p^2\omega_i^2+(\omega_i^2-q)^2)}).$$

Se debe por lo tanto cumplir

$1-m/(\omega_i\sqrt{(p^2\omega_i^2+(\omega_i^2-q)^2)})>0$ para todos los valores de i excepto uno.

La expresión bajo el radical es creciente para $\omega_i\geq 0$ si $p^2\geq 2q$, por lo que su valor mínimo se obtiene en ω_1. Si tomamos $m=\omega_1\sqrt{(p^2\omega_1^2+(\omega_1^2-q)^2)}$, podemos asegurar que tenemos sólo dos raices puramente imaginarias de $H(\lambda)=0$, mientras que el resto tienen parte real negativa. (Observemos que $0\leq\omega_1\leq\pi/2$).

44. Podemos escribir la parte lineal de la ecuación (40) en la forma

(42) $$x'(t)=Ax(t)+Bx(t-r),$$

donde $$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -b & -a\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -k & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

La ecuación (42) es de la forma

$$x'(t)=\int_r^0 d\eta(\theta)x(t+\theta) \text{ si tomamos}$$

$$\eta(\theta)=\begin{pmatrix}0 & u(\theta) & 0\\ 0 & 0 & u(\theta)\\ -ku(\theta+1) & -bu(\theta) & -au(\theta)\end{pmatrix},$$

donde $$u(t)=\begin{cases}0 & \text{para } t<0\\ 1 & \text{para } t\geq 0.\end{cases}$$

Vamos a descomponer $C=P\oplus Q$, en que P sea la suma de las N_λ correspondiente a las raices $i\omega_1, -i\omega_1$ (de ahora en adelante tomaremos $\omega_1=\omega$). De esta manera, en C, tendremos un subespacio bidimensional, P, en que todas las trayectorias serán periódicas, y un subespacio complementario Q, en que las trayectorias tenderán exponencialmente a 0 cuando $t\to\infty$.

Vamos a determinar una base de Φ para P.

Un vector característico c correspondiente a un valor propio λ de (42) debe satisfacer $\Delta(\lambda)c=0$, con

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ ke^{-\lambda r} & b^2 & a+\lambda \end{pmatrix}$$

de donde tomando en cuenta que $B = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$ y que

$$\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{B\theta}$$

se sigue que una posible Φ, real, (ver sección 10) viene dada por

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\omega\theta & \operatorname{sen}\omega\theta \\ -\omega\operatorname{sen}\omega\theta & \omega\cos\omega\theta \\ -\omega^2\cos\omega\theta & -\omega^2\operatorname{sen}\omega\theta \end{pmatrix} \quad , \ \theta \in [-r, 0] \ .$$

45. A fin de poder caracterizar los elementos de Q de una manera que se preste al cálculo, así como para determinar la matriz Ψ que aparece en la sección 17 y que entra en las ecuaciones de bifurcación, vamos a incluir los resultados de la parte que nos interesa de la teoría, que se encuentra expuesta en [2] para las ecuaciones del tipo retardado, y en [10] para las de tipo neutro.

Consideremos el espacio $C^* := C([0,r], \mathbb{R}^n)$, en que, por la conveniencia de la notación matricial, vamos a suponer que los vectores son matrices fila (recordemos que en C consideramos a los elementos como matrices columna). Para φ en C y ψ en C^* definamos la forma bilineal (ψ,φ) por medio de

$$(43) \quad (\psi,\varphi) = \psi(0)\varphi(0) - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)\,(d\eta(\theta))\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

en que η es la matriz de funciones de variación acotada que aparece en la representación del funcional L de (2).

Sea ahora el conjunto $D(A^*) \subset C^*$ de aquellos elementos que son funciones con derivada continua en $[0,r]$, y para los que se cumple

$$-\psi'(0) = \int_{-r}^{0} \psi(-\theta)d\eta(\theta).$$

Este conjunto es denso en C^*.

Resulta que existe un único operador lineal $A^*:D(A^*) \to C^*$ tal que $(\psi, A\varphi) = (A^*\psi, \varphi)$ donde A es, como hasta ahora, el generador infinitesimal del semigrupo T(t) definido por las soluciones de (2).

Este operador se puede definir equivalentemente por

$$A^*\psi(\iota) = \begin{cases} -\psi', & \iota \in (0,r] \\ \int_{-r}^{0} \psi(-\theta)d\eta(\theta), & \iota = 0. \end{cases}$$

Se demuestra que $\sigma(A) = \sigma(A^*)$ y que $\dim N(\lambda I - A^*)^k = N(\lambda I - A)^k$, $\forall k \in N$. Para una $\lambda \in \sigma(A)$, denotaremos por $N_\lambda^* = N(\lambda I - A^*)^m$, donde m es la multiplicidad de λ (ver sección 9)

Si Λ es un conjunto de elementos de $\sigma(A)$, se puede definir, análogamente a como se definió P en la sección 17, un subespacio P^* de C^* que será la suma directa de los subespacios N_λ^* correspondientes a los elementos de Λ.

Se demustra que si $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ es una base de P, entonces existe una base $\Psi = \mathrm{col}(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ de P tal que $(\Psi, \Phi) = ((\psi_i, \varphi_j)) = I$. Resulta que, en esta base, $\varphi^P = \Phi(\Psi, \varphi)$, por lo que los elementos φ de Q quedan caracterizados por $(\Psi, \varphi) = 0$. La matriz Ψ que entra en la expresión de $X_0^P = \Phi\Psi$, es precisamente $\Psi(0)$.

Podemos encontrar una base Ψ de P encontrando m vectores linealmente independientes de la ecuación

$$d\Delta(\lambda) = 0,$$

con $\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}d\eta(\theta)$. (ver ecuación (3)) y teniendo en cuenta que $\Psi(\iota) = e^{B\iota}\Psi(0)$, donde B es la matriz tal que $A\Phi = \Phi B$.

46. Tomando en cuenta lo anterior, obtenemos que una base Ψ de P con $\Lambda = \{\iota\omega, -\iota\omega\}$ viene dado en forma real por

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} (b^2-\omega^2)\cos\omega t + a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t & a\cos\omega t + \omega\,\mathrm{sen}\,\omega t & \cos\omega t \\ -a\omega\cos\omega t + (b^2-\omega^2)\,\mathrm{sen}\,\omega t & -\omega\cos\omega t + a\,\mathrm{sen}\,\omega t & \mathrm{sen}\,\omega t \end{pmatrix}$$

Queremos ahora modificar Φ y Ψ de manera de $(\Psi,\Phi) = I$. Para ello vamos a tomar valores de p,q y r tales que $\omega = \frac{\pi}{4}$. Se requieren que $\pi p/4 = q-(\pi/4)^2$. Si tomamos $r=2$, $b=1$, obtenemos $q=4$, con lo cual también se satisface la condición $p^2 \geq 2q$.

Se tiene también

$$m = 8k = \frac{\pi}{4}\sqrt{((\pi p/4)^2 + ((\pi/4)^2-q))} = (\pi/4)^2 p\sqrt{2}\ ,$$

o sea $k = \pi^2\sqrt{2}/64$.

Tomando estos valores obtenemos

$$\Omega = (\Psi,\Phi) = \begin{pmatrix} 1-2\omega^2 + \frac{4-\omega^2}{16}\sqrt{2} & \frac{4-\omega^2}{2} - \frac{4-\omega^2}{8}\omega\sqrt{2} \\ -\frac{4-\omega^2}{2} + \frac{4-\omega^2}{8}\omega\sqrt{2} & -\omega^2 - \frac{4-\omega^2}{16}\sqrt{2} \end{pmatrix} =:$$

$$=: \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ -\gamma & \beta \end{pmatrix}.$$

Los valores de α,β y γ son aproximadamente 0,07, -0,915 y 1,23, y por lo tanto $\det\Omega = \delta$ vale aproximadamente 1,47. Hacemos un cambio de base en P^* a fin de tener, si Ψ^* es esta nueva base, $(\Psi^*,\Phi) = I$.

Se tiene, con $\omega = \pi/4$,

$$\Psi^*(0) = \Omega^{-1}\Psi(0) = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} \beta(b^2-\omega^2) + a\gamma\omega & a\beta + \gamma\omega & \beta \\ \gamma(b^2-\omega^2) - a\alpha\omega & a\gamma - \alpha\omega & \gamma \end{pmatrix}.$$

47. Escribimos la ecuación (40) en la forma

$$x'(t) = \int_{-r}^{0} d\eta(\theta)x(t+\theta) + f(x_t),\ \text{con}$$

$$f(x_t) = -\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(x_1(t-2)) \end{pmatrix}$$

Si hacemos la descomposición

$$x_t = \Phi y(t) + x_t^Q, \quad y(t) = (\Psi^*, x_t),$$

obtenemos la ecuación diferencial

$$y'(t) = By(t) + \Psi^* f(\Phi y(t) + x_t^Q) . \tag{44}$$

Se tiene

$$f(x_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(-y_2(t)) + (x_t^Q(-2))_1 \end{pmatrix} .$$

Una vez substituidos los valores en (44), queda

$$y'(t) = \frac{\pi}{4}\ y_2(t) - \varepsilon\frac{\beta}{\delta}\ \psi(-y_2)(t) + (x_t^Q(-2))_1)$$

$$y_2^1(t) = -\frac{\pi}{4}\ y_1(t) - \varepsilon\frac{\gamma}{\delta}\ \psi(-y_2)(t) + (x_t^Q(-2))_1) \quad ,$$

y una ecuación para x_t^Q.

Vamos a suponer una ψ determinada, por ejemplo

$$\psi(x) = x - x^3$$

Siendo estas ecuaciones de la forma (35) y (36), podemos aplicar el método explicado. Aplicamos el cambio de variables periódico, con lo que obtenemos ecuaciones de la forma (38), tomamos la media de f en un período para $\varepsilon =$ de acuerdo con el teorema de la sección 39, y obtenemos par (39), con $a_0 = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$, una expresión para $f(a_0, \eta_0, 0) = 0$ que se reduce para $a_2 = 0$ a

$$\frac{1}{2}\ \gamma a_1 - \frac{3}{8}\ \gamma a_1^3 = 0$$

$$\delta\eta a_1 + \frac{1}{2}\beta a_1 - \frac{3}{8}\ a_1^3 = 0,$$

que nos dá $a_1 = 0$, con η indeterminado, y $a_1^2 = \frac{4}{3}$ con $\eta = 0$.

Esto indica que nuestra ecuación tiene dos soluciones periódicas para ε pequeña, que tienden respectivamente a 0 y a soluciones de período 8 y 'radio' $\sqrt{(4/3)}$ cuando $\varepsilon \to 0$.

48. Los métodos del capítulo anterior también pueden utilizarse para determinar las características de estabilidad de las soluciones periódicas obtenidas. Sin embargo para utilizarlo en el caso general de la ecuación neutra necesitamos contar con una teoría de Floquet válida para estas ecuaciones, cosa que no existe todavía. Esta teoría existe desde hace más de diez años para las ecuaciones de tipo retrasado, y se halla contenida en los trabajos de Stokes ([16] y [17]) y Shimanov ([18]).

Parece una vía válida de investigación futura el intentar generalizar esta teoría a tipos más generales de ecuaciones.

Vamos a bosquejar cuál es el método para la determinación de estas características de estabilidad, a fin de que se vea donde entra la teoría de Floquet, en el caso de las ecuaciones de tipo retrasado. La exposición es un resumen de lo expuesto en [5].

Considérese la ecuación

(45) $$x'(t) = L(x_t) + \mu F(x_t, \mu),$$

con F cumpliendo las condiciones impuestas anteriormente. Sea $\tilde{x}_t$ una solución periódica de (45) con período $\tau(\mu)$. Si consideramos $z = x - \tilde{x}$, obtenemos

$$z'(t) = L(z_t) + \mu\bar{F}(t, z_t, \mu) + \mu o(|z_t|),$$

en que $\bar{F}$ es lineal en z_t y de período $\tau(\mu)$ en t.

La aproximación lineal es la ecuación periódica

(46) $\qquad z'(t) = L(z_t) + \mu\overline{F}(t, z_t, \mu)$,

y las propiedades de estabilidad de $\mathfrak{X}_t$ estarán decididas por los exponentes característicos correspondientes (ver [17]). De hecho, se deduce de la teoría de Floquet, que si los exponentes característicos excepto uno de ellos (que debe ser cero debido a que la ecuación original es autónoma) tienen parte real negativa, entonces $\mathfrak{X}_t$ es asintóticamente estable.

Vamos a suponer que los valores característicos de $z'(t) = L(z_t)$, es decir, los elementos de $\sigma(A)$, tienen parte real negativa exceptuando un conjunto finito Λ de valores imaginarios, múltiplos enteros de $2\pi i/\tau$ (como en el capítulo anterior y en el ejemplo tratado en este capítulo). A fin de determinar si los exponentes característicos de (46) tienen parte real negativa (excepto el 0, claro), consideremos la descomposición de C en los subespacios P y Q correspondientes, con lo que se tiene para $y(t) = (\Psi, z_t)$:

$$y'(t) = By(t) + \mu\Psi\overline{F}(t, \Phi y(t) + z_t^Q, \mu).$$

Por medio del cambio de variables $y(t) = e^{B(\omega(\mu))t}v(t)$, se tiene $v'(t) = \mu(-e^{-B(\omega(\mu))t}v(t) +$

$+ e^{-B(\omega(\mu))t}\Psi\overline{F}(t, \Phi e^{B(\omega(\mu))t}v(t) + z_t^Q, \mu))$, donde, consideramos η definida por $\omega(\mu) = \omega + \mu\eta$.

De los trabajos [16] y [18], tenemos que para cada exponente característico ρ de esta ecuación, existe una solución $v(t) = e^{\rho t}\tilde{v}(t), z_t^Q = e^{\rho t}\tilde{z}_t$, con $\tilde{v}$ periódica de período $\tau(\mu)$.

Si se sustituyen estos valores en la ecuación anterior, y se toma $\rho = \mu\nu$, se obtiene

(47) $\qquad \tilde{v}'(t) = -\mu\nu\tilde{v}(t) + \mu(-e^{-B(\omega(\mu))t}B(\eta)e^{B(\omega(\mu))t}\tilde{v}(t) +$

$$+ e^{-B(\omega(\mu))t}\Psi\overline{F}(t, \Phi e^{B(\omega(\mu))t}\tilde{v}(t) + \tilde{z}_t^Q, \mu)).$$

Siendo esta ecuación del tipo de la (23) estudiada en el capítulo anterior, podemos aplicar la teoría allí desarrollada para encontrar las ecuaciones de bifurcación que nos dan los valores de ρ para los que tenemos soluciones $\tau(\mu)$-periódicas.

49. Vamos a aplicar el método recién bosquejado a determinar las características de estabilidad de la trayectoria periódica con $a_1 = \sqrt{4/3}, a_2 = 0$ de la sección 47.

Debemos encontrar la ecuación de primera variación (46) correspondiente a la trayectoria $\mathfrak{X} = \Phi e^{Bt} a_0$, con $B = B(\omega)$.

Se tiene

$$y_2(t) = (\Phi(-2) e^{Bt} a_0)_2 = a_1 \operatorname{sen} \omega t ,$$

y

$$\bar{F}(t, z_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\psi'(a_1 \operatorname{sen} \omega t)\, z_1(t-2) \end{pmatrix} .$$

Por otro lado $z_t = \Phi y(t) + z_t^Q$, y haciendo el cambio de coordenadas indicado en la sección anterior, se obtiene la ecuación (47) con el último término igual a

$$1/\delta\ \psi'(a_1 \operatorname{sen} \omega t)(-\operatorname{sen} \omega(\mu) t \cos \omega(\mu) t) \tilde{\nabla}(t) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \beta \cos \omega(\mu) t - \gamma \operatorname{sen} \omega(\mu) t \\ \beta \operatorname{sen} \omega(\mu) t + \gamma \cos \omega(\mu) t \end{pmatrix} .$$

Para $\psi(x) = x - x^3$, obtenemos entonces para la ecuación determinante:

$$\begin{pmatrix} -\rho + (\gamma/2 - 9\gamma a_1^2/8)/\delta & -\eta + (\beta/2 - 3\beta a_1^2/8)/\delta \\ \eta + (-\beta/2 + 9\beta a_1^2/8)/\delta & -\rho + (\gamma/2 - 3\gamma a_1^2/8)/\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0$$

Debido a que $a_1^2 = 4/3$ y $\eta = 0$, los valores de ρ que dan las soluciones periódicas buscadas son los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$

que son 0 y $-\gamma$.

De aquí deducimos que nuestra solución es asintóticamente estable.

50. Queremos hacer notar la siguiente diferencia fundamental entre las ecuaciones del tipo retardado y las más generales del tipo neutro. En las del tipo retardado se tiene que $T(t)$ es un operador compacto para $t \geq r$, lo que permite usar teoremas de punto fijo del tipo del de Schauder para determinar la existencia de órbitas cerradas. Este método ha sido utilizado por varios autores, y es el más viable para ecuaciones no lineales cuando no entran parámetros pequeños. En las ecuaciones neutras más generales, en que no podemos asegurar que $T(t)$ sea compacto para ninguna t, no podemos utilizar teoremas de punto fijo como el mencionado. Parece una línea de investigación interesante el encontrar criterios que los sustituyan.

Para terminar queremos recomendar la lectura del trabajo [19] de J. Hale, que nos parece una fuente de problemas interesantes, que se pueden generalizar a ecuaciones de tipo neutro.

REFERENCIAS

[1] Bellman, R. y Cooke, K.L. " Differential-diference equa tions". Academic-Press, 1963.

[2] Hale, J. "Functional differential equations". Springer-Verlag, 1971.

[3] Smale, S. "Differentiable dynamical systems". Bull. Amer. Math. Soc. vol.73 (1967) pp.747-817.

[4] Hale, J.K. y Perelló, C. "The neighborhood of a singular point of functional differential equations". Contrib Differential Equations, vol. 3 (1964) pp. 351-375.

[5] Perelló, C. "Periodic Solutions of differential equations with time lag containing a small parameter". J of Diff. Eqns. vol.4 (1968) pp. 160-175.

[6] Henry, D. "Linear autonomous neutral funtional differential equations". J. of Diff. Equs. vol.15(1974) pp.106-128.

[7] Bhatia, N.P. y Hajek, O. " Local semi-dynamical systems". Springer-Verlag, 1969.

[8] Hale, J.K. "Forward and backward continuation for neutral functional differential equations". J. of Diff. Eqns. vol. 9 (1971) pp. 168-181.

[9] Driver, R. "A functional-differential equation arising in a two-body problem of electrodynamics". Int. Symp. Nonlin. diff. eqns. and nonlin. mech. pp. 474-484, Academic-Press, New York, 1963.

[10] Hale, J.K. y Meyer, K.R. " A class of functional equations of neutral type". Memoirs of the Amer. Math. Soc. Nº 76, (1967).

[11] Hille, E. y Phillips, R.S. "Functional analysis/ and semigroups". Amer. Math. Soc., 1957.

[12] Levinger, B.W. "A folk theorem of functional differential equations". J.of Diff. eqns. vol.4(1968) pp.612-619.

[13] Hale, J.K. y Cruz, M.A. "Asymptotic behavior of neutral functional differential equations". Arch. Rat.Mech. Anal. vol. 34 (1969) pp. 331-353.

[14] Cruz, M.A. y Hale, J.K. "Exponential estimates and the sad dle point property for neutral functional differential equations". J. of Math. An. Appl. vol.34 (1971) pp. 267-288.

[15] Hale, J. K. " Oscillations in nonlinear systems". McGraw-Hill, New York, 1963.

[16] Stokes, A. "Floquet theory for functional differential equations". Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. vol.48 (1962) pp. 1330-1334.

[17] Stokes, A. "On the stability of a limit cycle of an autonomous functional differential equations". Contrib. Differential Equs. vol.3(1964) pp. 351-375.

[18] Shimanov, S.N. "On the theory of linear differential equations with periodic coeficients and time lag". Prikl.Mat.Meh. vol.27 (1963) pp.450-458.(Trad. al inglés: J. Appl.Math.Mech. vol.27(1963) pp.674-687).

[19] Hale, J.K. "Geometric theory of functional-differential equations". En "Differential equations and dynamical systems". Academic-Press,1967 pp. 247-266.