

UN PROBLEMA EN RELACIÓ ABE LA SUMA D'ESPÀIS TANCATS

Julià Cufí

1.- Introducció i notacions.

Considerem la circumferència unitat T i un subconjunt arbitrari $E \subset T$. L_E^∞ serà l'àlgebra de Banach de les funcions de $L^\infty = L^\infty(T, dm)$ ($dm =$ mesura de Lebesgue sobre T) que són essencialment contínues a cada punt de E . H^∞ és la subàlgebra de L^∞ de les funcions que tenen nuls tots els coeficients de Fourier negatius. Direm C a l'àlgebra L_T^∞ de les funcions contínues a T .

Sarason [3] va provar que la suma $H^\infty + C$ és tancada a L^∞ i Davie-Gamelin-Garnett [1] van estendre aquest resultat provant que $H^\infty + L_E$ també és tancat a L^∞ , per qualsevol $E \subset T$. Stegenga [5] va generalitzar el teorema de Sarason, substituint H^∞ per un subespai H de L^∞ , dèbilment tancat i invariant enfront de la multiplicació per la funció identitària a T . És sabut [5] que aquests espais són de dues formes possibles: a) $H = L^\infty(K)$, espai de les funcions de L^∞ nul·les quasi per tot fora de K , on K és un subconjunt mesurable de T . b) $H = \psi \cdot H^\infty$ on ψ és una funció unimodular de L^∞ .

És natural, doncs, generalitzar aquests resultats, intentar de trobar sota quines condicions serà tancada la suma $H + L_E^\infty$, on H és un espai dels tipus anteriors. Això és el que fem aquí quan H és del tipus a) o del tipus b) amb la restricció $\psi \cdot H^\infty \cap L_E^\infty = 0$. Queda pendent, però, el cas més interessant de que $\psi \cdot H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$. També caldrà a aquesta nova situació altres resultats coneguts quan $E = T$ i això planteja nous problemes.

2.- La suma $L^\infty(K) \dot{+} L_E^\infty$.

Teorema.- Siguin E, K subconjunts de T , amb K mesurable. Aleshores la suma $L^\infty(K) \dot{+} L_E^\infty$ és tancada a L .

Per demostrar que la suma de dos espais tancats és tancat fem servir el següent resultat ben conegut [5] :

Lema.- Siguin X, Y subespais tancats de l'espai de Banach Z . Aleshores $X \dot{+} Y$ és tancat si i només si existeix un $k < \infty$ tal que:

$$d(y, X \dot{+} Y) \leq k \cdot d(y, X) \quad \text{per a tot } y \text{ de } Y.$$

(d és la distància associada a la norma de l'espai Z).

Demostrem el Teorema suposant, de moment, que el conjunt E és un interval obert, $E = (a, b) \subset T$. Anem a veure que si $g \in L_E^\infty$, tenim

$$(1) \quad d(g, L^\infty(K) \cap L_E^\infty) \leq d(g, L^\infty(K)).$$

Observem que $d(g, L^\infty(K)) = \| \chi_{K^c} g \|_\infty$ i sigui H un subconjunt compacte de $K_0 \cap E$, on K_0 és l'interior essencial de K (és a dir, la reunió de tots els conjunts oberts de T que tallen a $K^c = T - K$ en un conjunt de mesura zero). Sigui ara ψ una funció contínua a T , que valgui 1 sobre H i amb $\text{sup}(\psi) \subset K_0 \cap E$ i definim:

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) \cdot \psi(x) & \text{si } x \in E \\ g(x) \cdot \chi_E(x) & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

de manera que $g_1 \in L^\infty(K) \cap L_E^\infty$. A més a més:

$$\begin{aligned} d(g, L^\infty(K) \cap L_E^\infty) &\leq \| g - g_1 \|_\infty \leq \max (\| g \|_{E-H}, \| g \|_{T-(E \cap H)}) \leq \\ &\leq \max (\| g \|_{E-(K_0 \cap E)}, \| g \|_{T-(E \cap K)}). \end{aligned}$$

Considerem ara les dues possibilitats :

1) Si $d(g, L^\infty(K) \cap L_E^\infty) = \| g \|_{T-(E \cap K)}$ és clar que (1) val.

2) Si $d(g, L^\infty(K) \cap L^\infty_E) = \|g\|_{E-(K_0 \cup E)} = \|g\|_{E-K_0} = \rho$, aleshores

hi ha encara dues possibilitats:

1') $\rho = |g(\alpha)|$, amb $\alpha \in E$, per tant, $\alpha \notin K_0$ i $|g(x)| \geq \rho - \varepsilon$

a un entorn $U(\alpha)$ amb $n(U \cap K^c) > 0$ el que dona $\|X_{K^c}\| \geq \rho$.

2') Hi ha $\alpha_n \in K_0$ amb (α_n) convergent i $|g(\alpha_n)| \rightarrow \rho$, de ma-

nera que per a tot $\varepsilon > 0$ és $|g(\alpha_n)| > \rho - \varepsilon$ (per algun n) i, per

tant, $|g(x)| > \rho - \varepsilon$ si $x \in U(\alpha_n)$ i $U(\alpha_n) \not\subset K_0$ el que dona

$n(K^c \cap U) > 0$ i $\|X_{K^c}\| \geq \rho - \varepsilon$.

Això prova (1) en tots els casos, quan $E = (a, b)$. Sigui ara

E arbitrari i $g \in L^\infty_E$; tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha una funció

$g_\varepsilon \in L^\infty_{E_\varepsilon}$ (E_ε obert que conté a E) amb $\|g - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Per tant

$d(E_\varepsilon, L^\infty(K) \cap L^\infty_{E_\varepsilon}) \leq d(g_\varepsilon, L^\infty(K) \cap L^\infty_{E_\varepsilon}) \leq d(g_\varepsilon, L^\infty(K))$

i ara fent $\varepsilon \rightarrow 0$ resulta (1). //

3.- La suma $\Psi H^\infty + L^\infty_E$ en el cas $\Psi H^\infty \cap L^\infty_E = 0$.

Considerem ara el cas en què l'espai invariant és del tipus

ΨH^∞ amb $\Psi \in L^\infty$, unimodular, i fem, en tot aquest apartat, la hipòtesi

de que $\Psi H^\infty \cap L^\infty_E = 0$. En aquestes condicions $\Psi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat si

i només si existeix $k < \infty$ amb

$$\|g\|_\infty \leq k \cdot d(g, \Psi H^\infty) \quad \text{per a tota } g \in L^\infty_E.$$

Definició: Si f i g són funcions de L^∞ direm

$$d_A(f, g) = \overline{\lim}_{\frac{z \rightarrow 1}{|z| < 1}} \text{ess } |f(z) - g(z)|; \quad \rho_A(f, g) = \lim_{\frac{z \rightarrow 1}{|z| < 1}} \text{ess } |f(z) - g(z)|$$

Equivalentment, si estenem f i g harmònicament al disc unitat

$$d_A(f, g) = \overline{\lim}_{\frac{z \rightarrow 1}{|z| < 1}} |f(z) - g(z)|; \quad \rho_A(f, g) = \lim_{\frac{z \rightarrow 1}{|z| < 1}} |f(z) - g(z)|$$

Trabé posem :

$$d_a(f, H^\infty) = \inf_{g \in H^\infty} d_a(f, g) \quad ; \quad \rho_a(f, H^\infty) = \inf_{g \in H^\infty} \rho_a(f, g)$$

Proposició 1. - Si $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ és tancat, on φ és unimodular, $E \subset T$ qualsevol i $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty = 0$, aleshores existeix un $\varepsilon > 0$ tal que

$$d_a(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon \quad \text{per a tot } \alpha \in T \quad \text{i} \quad \rho_a(\bar{\varphi}, H) \geq \varepsilon \quad \text{per a tot } \alpha \notin \bar{E}.$$

En efecte: com que $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ és tancat es compleix

$$\|g\|_\infty \leq k \cdot d(\alpha, \varphi H^\infty) \quad \text{per a tota } g \in L_E^\infty$$

i, en particular, $\varphi H^\infty + \mathbb{C}$ és tancat i, segons [5], $d_a(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \in T$, per algun $\varepsilon > 0$.

Sigui ara $\varepsilon = k^{-1}$ i vegem que $\rho_a(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ si $\alpha \notin \bar{E}$. Si fos $\rho_a(\bar{\varphi}, H^\infty) < \varepsilon$ per un $\alpha \notin \bar{E}$, això voldria dir que hi ha una funció $h \in H^\infty$ tal que per a tot entorn $U(\alpha)$ existeix $h \in U(\alpha)$ amb $h(M) > 0$ i $|\bar{\varphi}(z) - h(z)| < \varepsilon$ si $z \in M$.

Afegeix una funció $g \in H^\infty \cap L_E^\infty$ tal que $\|g\|_\infty = 1$ i $|g| < \delta$ fora de M ; per exemple agafem:

$$u(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in M \\ \log & \text{si } \theta \notin M \end{cases} \quad \text{i} \quad g(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta+z}}{e^{i\theta-z}} u(\theta) \cdot d\theta \right)$$

de manera que $|g| = 1$ q.p.t. a M i $|g| = \delta$ ($\delta < 1$) q.p.t. a M^c .

Ara tenim

$$\|g\bar{\varphi} - gh\|_\infty < \varepsilon \quad \text{i}$$

$$1 = \|g\|_\infty \leq \varepsilon^{-1} d(\alpha, \varphi H^\infty) \leq \varepsilon^{-1} d(\alpha, \varphi gh) = \varepsilon^{-1} d(\bar{\varphi}, gh) < 1,$$

contradicció. //

Intentem ara de demostrar la suficiència de les condicions que hem trobat; això es pot fer si posem alguna restricció a E .

Proposició 2. - Sigui E un interval obert de T , $\varphi \in L^\infty$ unimodular i

suposen que hi ha un número $\epsilon > 0$ tal que

$$d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) > \epsilon \quad \text{per a tot } \alpha \in T \text{ i } \rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) > \epsilon \quad \text{per a tot } \alpha \in \bar{E}.$$

Si, a més, $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty = \emptyset$ aleshores $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ és tancat.

Per provar la Proposició només ens cal veure que per a tota g de L_T^∞ és

$$\|g\|_\infty \leq d(g, \varphi H^\infty).$$

Si λ és un punt de E , tenim:

$$|g(\lambda)| \cdot |\bar{\varphi}(\lambda) - h(\lambda)| \leq |g(\lambda) - g(\lambda)| + \|g - g(\lambda)\varphi h\|_\infty$$

i això dona, si $g(\lambda) \neq 0$: $|g(\lambda)|\epsilon \leq \|g - \varphi h\|_\infty$ per a tota $h \in H^\infty$.

Ara cal provar l'acotació

$$\epsilon |g(\lambda)| \leq d(g, \varphi H^\infty) \quad \text{q.p.t. } \lambda \text{ de } T - E.$$

Per això, proven el següent

Lema. - Si $g \in L^\infty(T-E)$ es pot triar una representació $g(\lambda)$ d'aquesta classe de funcions amb la propietat de que q.p.t. λ de $T-E$ tinguem:

$$\text{per a tot } \epsilon > 0 : \quad m \left\{ z \in T-E : |g(z) - g(\lambda)| < \epsilon \right\} > 0.$$

En efecte: posem $T-E$ com a reunió $T-E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup N$ de compactes K_n (amb $m(K_n) > 0$) i $m(N) = 0$, essent contínua la restricció de g a K_n . Si per un punt $\lambda \in K_n$, tot entorn de λ talla K_n en un conjunt de mesura positiva, és clar que la propietat es compleix a λ . Anem a reduir cada K_n a un compacte més petit en el que això passa, trobant només un conjunt de mesura zero.

Fixem-nos en K_n : considerem els intervals racionals de la recta i sigui A_n el conjunt de punts x de K_n per als quals hi ha un interval racional I_x que conté a x i tal que $m(I_x \cap K_n) = 0$. Sigui U_n la reunió d'aquests intervals I_x per x de A_n éssent així, U_n un obert, reunió d'intervals que tallen K_n en un conjunt de mesura

nul·la. Si ara treiem de K_n la seva intersecció amb U_n , hem tret un conjunt de mesura zero i per cada punt $\lambda \in K_n - U_n$ tot entorn seu talla K_n en un conjunt de mesura positiva.

Continuant amb la demostració de la Proposició, tenim per a qualsevol $\lambda \in E$ (si $g(\lambda) \neq 0$):

$$|g(\lambda)| |\bar{\varphi}(z) - g(z)| \leq |g(\lambda) - g(z)| + \|g - g(\lambda)\varphi h\|_\infty;$$

per a tot $\delta > 0$ és $|g(\lambda) - g(z)| < \delta$ a un conjunt de mesura positiva i per \underline{z} d'aquest conjunt tenim $|\bar{\varphi}(z) - h(z)| \geq \varepsilon$ q.p.t.; per tant, concluïm

$$|g(\lambda)| \varepsilon \leq \delta + \|g - g(\lambda)\varphi h\|_\infty \quad \text{i, per tant,}$$

$$|g(\lambda)| \cdot \varepsilon \leq \|g - g(\lambda)\varphi h\|_\infty \quad //$$

En el cas en que ECT sigui arbitrari, és clar que podem deduir que $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ és tancat de la hipòtesi de que $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \in E$ i $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \notin E$. Però no és clar que es pugui deduir del fet que $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \in T$ i $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \notin \bar{E}$. Tampoc és clar si $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ tancat implica $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \notin \bar{E}$. Resumint:

Teorema. - Si ECT, φ unimodular de L^∞ , i $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty = 0$, aleshores $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ tancat dóna $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ a T i $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ fora de \bar{E} . Si $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ a E i $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ fora de E, tenim que $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ és tancat.

Exemple. - És clar que, sota la hipòtesi $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty = 0$, si $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ és tancat, també ha de ser-ho $\varphi H^\infty + \mathbb{C}$. Doncs ara un exemple en el qual $\varphi H^\infty + \mathbb{C}$ és tancat però, en canvi, $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ no ho és, tot i que $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty = 0$:

Signi φ un producte de Blaschke, els zeros del qual s'acu-

mulen a tots els punts de la circumferència. Com que $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) = 1$ a tot punt de T , ja és $\varphi \in H^\infty + C$ tancat (cf. [5]); agafem com a E un interval tancat propi de T , amb lo qual $\varphi \in H^\infty \cap L_E^\infty = 0$. Ara bé, a qualsevol punt α de T és $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) = 0$ ja que podem agafar una successió $(\lambda_n) \rightarrow \alpha$ amb $\varphi(\lambda_n) \rightarrow \lambda$, $|\lambda| > 0$ i $|\varphi(\lambda_n)| \geq \delta > 0$; ara (λ_n) conté una successió parcial que és d'interpolació per H^∞ ([2] pàg. 204); sigui encara (λ_n) i agafem una funció f de H^∞ amb $f(\lambda_n) = 1/\varphi(\lambda_n)$ de manera que $f(\lambda_n) \cdot \varphi(\lambda_n) = 1$. Aleshores:

$$\rho_\alpha(\bar{\varphi}, f) = \lim \inf \|\varphi(z) - f(z)\| = \lim \inf \|1 - \varphi(z)f(z)\| = 0.$$

De fet, en aquest cas, $\varphi \in H^\infty + L_E^\infty$ no és tancat per qualsevol E amb $\bar{E} \neq T$.

4.- Funcions unimodulars de $H^\infty + L_E^\infty$.

Si φ és una funció unimodular de L^∞ , definim $Z(\varphi)$ com el conjunt de zeros comuns a totes les funcions de $\varphi \in H^\infty \cap C$ de manera que, o bé $Z(\varphi)$ és un conjunt tancat i de mesura zero de T , o bé $Z(\varphi) = T$. Si $\varphi \in H^\infty + C$ (unimodular), definim $\text{sup}(\varphi)$ com el conjunt de punts $\alpha \in T$ pels que és possible de trobar una successió (z_n) de punts del disc obert tal que $z_n \rightarrow \alpha$ i $\varphi(z_n) \rightarrow 0$. És sabut, [5], que amb la hipòtesi de que $\varphi \in H^\infty \cap C \neq 0$, $\varphi \in H^\infty + C$ és tancat si i només si $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \in Z(\varphi)$; així mateix, per una funció $\varphi \in H^\infty + C$ el fet de que $\text{sup}(\varphi)$ sigui de mesura zero és suficient per assegurar que φ és el producte d'una funció interna i una funció invertible a $H^\infty + C$.

Sigui, ara, E un subconjunt de T el qual suposarem, per simplificar, que és un interval tancat. Si $\varphi \in L^\infty$ és unimodular, definim $Z(\varphi)_E$ com el conjunt de punts de E que són zeros comuns a totes les funcions de $\varphi \in H^\infty + L_E^\infty$.

És fàcil de veure que si $\psi \in H^\infty + L_E^\infty$ és tancat i $\psi \in H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$, aleshores $d_\alpha(\bar{\psi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \in Z(\psi)_E$, ja que:

$$\text{per a tota } g \in L_E^\infty \text{ és } \|g\|_{Z(\psi)_E} \leq d(g, \psi \in H^\infty \cap L_E^\infty)$$

i, ara, es pot fer el mateix raonament que en el cas $E = T$ (cf. [5]). Com farem notar més endavant, és possible que aquesta condició sigui també suficient.

En tot cas, deixant de banda el problema de caracteritzar els parells E, ψ per als que $\psi \in H^\infty + L_E^\infty$ és tancat ($\psi \in H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$), sembla que la condició més pròxima a $\psi = 1$ és $Z(\psi) = \emptyset$ i, per aixó, és natural de plantejar la següent:

1a Qüestió: Si $\psi \in L^\infty$ és unimodular i $Z(\psi) = \emptyset$ (aixó ja implica $\psi \in H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$ per a tot $E \subset T$), és veritat que $\psi \in H^\infty + L_E^\infty$ és tancat per a tot $E \subset T$?

D'altra banda, és evident, d'acord amb les definicions anteriors, que per ψ unimodular i $E \subset T$ és $Z(\psi)_E \subset Z(\psi) \cap E$; també és natural de preguntar si val la igualtat. És fàcil de veure que aixó no és veritat en general; per exemple, si E és un interval propi i ψ és un producte de Blaschke, els zeros del qual s'acumulen a un punt de E i a un conjunt de mesura positiva a fora de E , aleshores $Z(\psi)_E$ és un punt i $Z(\psi) \cap E = E$. Ara bé, en aquest cas és $\psi \in H^\infty \cap L_E^\infty = 0$. Plantejen, doncs, la

2a Qüestió: Si $E \subset T$ i $\psi \in L^\infty$ unimodular tal que $\psi \in H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$, és veritat que $Z(\psi)_E = Z(\psi) \cap E$?

A la resta d'aquest treball ens ocuparem d'aquesta 2a qüestió i d'alguna altra relacionada amb ella.

Proposició 1. - Si ψ és una funció unimodular de $H^\infty + C$ tal que $\psi \in H^\infty \cap C \neq 0$, aleshores $\text{sup}(\psi) = Z(\psi)$.

En efecte: Notem, en primer lloc, que la inclusió $\text{sup}(\varphi) \subset Z(\varphi)$ val sempre, ja que si $\varphi F = g$, $g \in C$, $F \in H^\infty$ i $\alpha \in \text{sup}(\varphi)$ ha de ser $g(\alpha) = 0$, perquè si $z_n \rightarrow \alpha$ i $\varphi(z_n) \rightarrow 0$ és $g(\alpha) = \lim g(z_n)$ i el nucli de Poisson és asintòticament multiplicatiu a $H^\infty + C$ ([4]).

Per provar la igualtat, observem que $\varphi \in H^\infty \cap C \neq 0$ implica que $\text{sup}(\varphi)$ sigui de mesura nul·la i, per tant, d'acord amb [5] pàg. 582,

$\varphi = \psi \cdot u$ a on ψ és una funció interna i u és una funció unimodular de $H^\infty + C$ invertible a $H^\infty + C$ (és a dir, quasi contínua). Sabem també per [4] que $u = h \cdot w$ a on $h \in C^{-1}$ i $w \in (H^\infty)^{-1}$; per tant:

$$\text{cada } g \in C, g = \varphi \cdot F, F \in H^\infty \text{ s'escriu: } g = \psi \cdot u \cdot F = \psi \cdot h \cdot w \cdot F ;$$

$$\text{així dona: } g \cdot h^{-1} = \psi \cdot w \cdot F$$

i, per tant, $Z(\varphi) \supset Z(\psi)$.

Ara bé, quan F varia a H^∞ , $w \cdot F$ també varia a H^∞ , per tant,

$$\text{si } g = \psi \cdot F \text{ també és } g = \psi \cdot w \cdot F_1 \text{ i } g \cdot h = \psi \cdot h \cdot w \cdot F_1 = \psi \cdot F_1$$

és a dir, $Z(\varphi) \supset Z(\psi)$.

Tenim, ja que, $Z(\varphi) = Z(\psi)$ i també $\text{sup}(\varphi) = \text{sup}(\psi)$, doncs u essent invertible a $H^\infty + C$, té suport buit. Com que ψ és interna, és clar que $\text{sup}(\psi) = Z(\psi)$, ja que $m(\text{sup}(\psi)) = 0$. Per tant, és $Z(\varphi) = \text{sup}(\varphi)$.

Amb el mateix argument es prova que $Z(\varphi)_E = Z(\psi)_E$ i d'aquí resulta que $Z(\varphi)_E = Z(\psi) \cap E$, ja que aquesta igualtat és veritat per una funció interna. Tenim així:

Proposició 2. - Si $\varphi \in H^\infty + C$ és unimodular i $\varphi \in H^\infty \cap C \neq 0$, aleshores és $Z(\varphi)_E = Z(\psi) \cap E$.

A la demostració de la Proposició 1 s'ha plantejat la relació entre la mesura del suport de φ i el fet de que $\varphi \in H^\infty \cap C \neq 0$. Observem que, de fet, quan $\varphi \in H^\infty + C$:

$n(\text{sup}(\varphi)) = 0$ és equivalent a $\varphi \text{H}^\infty \cap C \neq 0$.

La implicació de dreta a esquerra ja l'hem feta servir. Per al recíproc, si $n(\text{sup}(\varphi)) = 0$ tenim $\varphi = F.g$ amb $F \in \text{H}^\infty$ i $g \in C$, és a dir, $\varphi = I.E.g$ amb I interna, E externa i $\text{sup}(I) \subset \text{sup}(\varphi)$, de manera que dona $n(\text{sup}(I)) = 0$ i, per tant, hi ha una funció $H \in \text{H}^\infty$ amb $I.H \in C$, no idènticament nul·la; a més, E és invertible a H^∞ i tenim:

$$I.E.g.H.E^{-1} = \varphi . E^{-1}.H \in C \text{ i no és idènticament nul·la.}$$

És sabut, [5], que per $\varphi \in L^\infty$ unimodular, $Z(\varphi) = \emptyset$ és equivalent a $\varphi \text{H}^\infty \cap C \neq 0$ i $\bar{\varphi} \in \text{H}^\infty + C$. No podem preguntar-se si $Z(\varphi)_E = \emptyset$ serà equivalent a $\varphi \text{H}^\infty \cap C \neq 0$ i $\bar{\varphi} \in \text{H}^\infty + L_E^\infty$. En un sentit això és clar:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} \in \text{H}^\infty + L_E^\infty &\implies \text{sup}(d_\alpha(\bar{\varphi}, \text{H}^\infty)) \subset T-E \implies Z(\varphi) \subset T-E = Z(\varphi)_E \subset \\ &\subset Z(\varphi) \cap E = \emptyset. \end{aligned}$$

Fem notar que totes les implicacions són reversibles, tret de $Z(\varphi)_E = \emptyset \implies Z(\varphi) \subset T-E$ i aquesta també ho seria si fos afirmativa la resposta a la qüestió 2ª.

En tot cas, notem que $Z(\varphi) \cap E = \text{sup}(d_\alpha(\bar{\varphi}, \text{H}^\infty) \setminus X_E)$ dona suport al fet de que $\varphi \text{H}^\infty + L_E^\infty$ sigui tancat quan $d_\alpha(X_E) \geq \varepsilon$, és a dir $d_\alpha(\bar{\varphi}, \text{H}^\infty) \geq \varepsilon$ a $Z(\varphi)_E$, si val $Z(\varphi)_E = Z(\varphi) \cap E$.

Intentem ara de generalitzar a $\text{H}^\infty + L_E^\infty$ les Proposicions 1 i 2. En primer lloc, necessitem que si $Z(\bar{\varphi})_E = \emptyset$ aleshores sigui $\varphi = F.g$ amb $F \in \text{H}^\infty$ i $g \in L_E^\infty$. Això es prova amb la mateixa demostració que en el cas $E = T$ ([5] pàg. 581). Per tant, $\bar{\varphi} \text{H}^\infty \cap C \neq 0$ i $\bar{\varphi} \in \text{H}^\infty + L_E^\infty$ ens donen també $\varphi = F.g$ com abans. Igual que quan $E = T$, a través del teorema de factorització, s'obté $\varphi = \psi . u$ amb ψ interna i $u \in \text{H}^\infty + L_E^\infty$ unimodular invertible. També modificant trivialment la demostració de [4] pàg. 293, es pot escriure u com un producte $u = h.v$ amb $h \in (\text{H}^\infty)^{-1}$ i $v \in (L_E^\infty)^{-1}$.

Seguint els passos que hem fet per demostrar la Proposició 1,

tenim: si $\varphi \in H^\infty + L_E^\infty$ i $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$ és $\pi(\text{sup}(\varphi)_E) = 0$, on $\text{sup}(\varphi)_E = \text{sup}(\varphi) \cap E$.

En efecte: si $\varphi \cdot F = g$ amb $F \in H^\infty$, $g \in L_E^\infty$ i $\alpha \in E \cap \text{sup}(\varphi)$ és $g(\alpha) = 0$, ja que si $z_n \rightarrow \alpha$ i $\varphi(z_n) \rightarrow 0$ ha de ser $g(z_n) \rightarrow 0$, ja que el nucli de Poisson és asintòticament multiplicatiu a E ; de fet, podem concloure que $\text{sup}(\varphi)_E - \{a, b\} \subset Z(\varphi)_E$ (si $E = [a, b]$); però en tot cas, si $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$ és $\pi(\text{sup}(\varphi)_E) = 0$.

Ara ens cal veure que $\pi(\text{sup}(\varphi)_E) = 0$ és suficient per tal d'assegurar la factorització $\varphi = \psi \cdot u$ amb ψ interna i $u \in (H^\infty + L_E^\infty)^{-1}$. Amb petites modificacions, que no val la pena de detallar, s'estenen el Lema i el Teorema 4.3 de [5] fent servir el criteri de que una funció és invertible a $H^\infty + L_E^\infty$ quan descotada inferiorment a un conjunt $\{re^{i\theta}$ amb $r_0 \leq r < 1$ i $e^{i\theta} \in E\}$. Així arribem a $\varphi = \psi \cdot h \cdot w$, $h \in (H^\infty)^{-1}$ i $w \in (L_E^\infty)^{-1}$. A partir d'aquesta descomposició, el mateix raonament de la Proposició 1 ens dona $Z(\varphi)_E = Z(\psi)_E$, sempre amb la hipòtesi $\varphi \in H^\infty + L_E^\infty$ i $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$. Com que $\text{sup}(\varphi)_E = \text{sup}(\psi)_E$ obtenim $Z(\varphi)_E = \pi(\varphi)_E$. De la mateixa manera que hem vist $Z(\varphi)_E = Z(\psi)_E$, resulta que per $\varphi \in H^\infty + L_E^\infty$ i $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$ i $F \subset E$, interval tancat és $Z(\varphi)_F = Z(\psi)_F$ i això dona $Z(\varphi)_F = Z(\psi)_E \cap F$. Així tenim:

Proposició 3. - Si $\varphi \in H^\infty + L_E^\infty$ i $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$, aleshores per a cada interval tancat $F \subset E$, tenim

$$Z(\varphi)_F = Z(\varphi)_E \cap F.$$

De la mateixa manera que en el cas de $H^\infty + C$, es pot veure que per $\varphi \in H^\infty + L_E^\infty$, $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty \neq 0$ és equivalent a $\pi(\text{sup}(\varphi)_E) = 0$.

Queda, però, la qüestió de si val $Z(\varphi)_E = Z(\varphi) \cap E$, al menys quan $\varphi \in H^\infty + L_E^\infty$. Podem veure, encara, que la resposta és afirmativa per a un tipus de funcions que són denses a $H^\infty + L_E^\infty$.

Proposició 4.- Si $\psi = \psi \cdot \bar{b}$ és unimodular, on $\psi \in H^\infty$ i \underline{b} és un producte de Blaschke de L_E^∞ i $\psi H^\infty \wedge L_E^\infty \neq 0$, aleshores $Z(\psi)_E = Z(\psi) \wedge E$.

En efecte, només cal veure que $Z(\psi) \wedge E \subset Z(\psi)_E = \text{sup}(\psi)_E$; és a dir, cal veure que $Z(\psi) \wedge E \subset \text{sup}(\psi) \wedge E$: sigui $\alpha \in E$, si $\alpha \notin \text{sup}(\psi)$ i vegem que $\alpha \notin Z(\psi)$, el que vol dir que es pot trobar una $F \in H^\infty$ amb $\psi F = g$, on $g \in C$ i $g(\alpha) \neq 0$. Ara bé, podem agafar $F_1, F_2 \in H^\infty$ amb $\psi F_1 = g_1 \in C$ i $\bar{b} F_2 = g_2 \in C$ i $g_1(\alpha) \neq 0$, $g_2(\alpha) \neq 0$ i només caldrà prendre $F = F_1 F_2$. //

REFERENCIES

- [1].- A.M. Davie-T.W. Gamelin-J. Garnett "Distance estimates and pointwise bounded density" Trans. Am. Math. Soc. 175 (1973) 37-68
- [2].- K. Hoffman "Banach Spaces of Analytic Functions" Prentice Hall Englewood Cliffs N.J. (1962)
- [3].- D. Sarason "Generalized Interpolation in H^∞ " Trans. Am. Math. Soc. 127 (1967) 179-203
- [4].- D. Sarason "Algebras of functions on the unit circle" Bull. Am. Math. Soc. 79 (1973) 286-299
- [5].- D.A. Stegenga "Sums of Invariant Subspaces" Pac. J. Math. Vol. 70 N^o 2 (1977) 567-584