

UNA CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE GRUPS QUE OPEREN SOBRE UN PRODUCTE D'ESFERES.

M. Castellet \*

1. Introducció

L'estudi de grups finits que operen sense punts fixos sobre una esfera està íntimament lligat al dels grups periòdics, és a dir grups per als quals la cohomologia és periòdica o bé, equivalentment, tals que llurs subgrups de Sylow són cíclics o quaterniònics (1). En aquest treball considero grups finits que operen sense punts fixos sobre un producte d'esferes  $S^n \times S^n$  i analitzo propietats homològiques i no, per tal que això sigui possible. La cohomologia utilitzada és sempre la de Tate i la notació la de (1) i (2).

2. Acció d'un grup finit sobre  $S^n \times S^n$

$X$  serà sempre una varietat compacta amb la mateixa cohomologia entera que  $S^n \times S^n$ ; és a dir  $H^0 X = \mathbb{Z}$ ,  $H^n X = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,  $H^{2n} X = \mathbb{Z}$ .

---

\* Aquest és un resum d'un treball realitzat l'any 1975 amb ajut d'una Borsa d'Estudis de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques. El treball sencer serà publicat per l'Institut d'Estudis Catalans.

$$H^i X = 0 \text{ per } i \neq 0; n, 2n.$$

Si  $G$  és un grup finit que opera lliurement sobre  $X$  podem considerar la successió espectral de Swan  $E_i^{p,q}$  associada a l'acció de  $G$  sobre  $X$  (6); es té

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q X)$$

En virtut de les propietats cohomològiques de  $X$  i tenint en compte que el bigrau de les diferencials  $d_i$  és  $(i, 1-i)$  i que a l'operar  $G$  lliurement,  $E_\infty = 0$ , s'obté una successió exacta llarga

$$\dots \rightarrow E_2^{p+2n+1,0} \xrightarrow{\beta} E_2^{p,2n} \xrightarrow{\beta} E_2^{p+n+1,n} \xrightarrow{\alpha} E^{p+2n+2,0} \dots$$

on  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  poden ésser explicitades.

Suposem, ara, que l'acció de  $G$  sobre  $X$  conserva l'orientació (és a dir, que el  $G$ -mòdul  $H^{2n} X$  és trivial). Aleshores un petit càlcul mostra que l'estructura del  $G$ -mòdul  $H^n X = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  és també la trivial i per tant tenim:

**Teorema** Si  $G$  és un grup finit que opera sense punts fixos i conservant l'orientació sobre un producte d'esferes  $S^n \times S^n$ , es té una successió exacta llarga

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{p+2n+1} G \xrightarrow{\partial} H^p G \xrightarrow{\beta} H^{p+n+1} G \oplus H^{p+n+1} G \xrightarrow{\alpha} \\ \rightarrow H^{p+2n+2} G \xrightarrow{\partial} \dots \end{aligned}$$

Corol·lari En les condicions anteriors, si  $|G| = r$  es té una successió exacta.

$$0 \rightarrow H^n G \rightarrow H^{n+1} G \rightarrow Z/rZ \oplus Z/rZ \rightarrow H^{n+1} G \rightarrow H^n G \rightarrow 0$$

(Ja que la finitud de  $G$  ens dona l'isomorfisme  $H^n G = \text{Hom}(H^{-n} G, Z/rZ) = H^{-n} G$ .)

### 3. Grups cohomològicament semiperiòdics

Diré que un grup finit  $G$  d'ordre  $r$  és cohomològicament semiperiòdic- $n$  (c.s.p.- $n$ ) si existeix una successió exacta

$$0 \rightarrow H^{n-1} G \rightarrow H^n G \rightarrow Z/rZ \oplus Z/rZ \rightarrow H^n G \rightarrow H^{n-1} G \rightarrow 0$$

Proposició Tot grup periòdic- $n$  és c.s.p.- $n$

Proposició Si  $G$  és c.s.p.- $n$ , aleshores

$$H^n G / H^{n-1} G = Z/hZ \oplus Z/kZ \quad \text{on } h, k = |G|$$

(És conseqüència de la definició i del teorema de Kulikov (5)).

Proposició El producte directe d'un grup periòdic- $n$  per un grup periòdic- $m$  és c.s.p.- $(m.c.m.(n,m))$ .

(Conseqüència de les fórmules de Künneth).

Corol.lari Si  $Q_S$  és el grup de quaternions generalitzat d'ordre  $S$ , es té

- a)  $Z/rZ \oplus Z/sZ$  és c.s.p.-2
- b)  $Z/rZ \times Q_S$  és c.s.p.-4
- c)  $Q_I \times Q_S$  és c.s.p.-4

Teorema  $G = Z/pZ \oplus Z/pZ \oplus Z/pZ$  no és c.s.p.- $n$  per a cap  $n$ .

Demostració: Com que  $H^{2n}G = G$  i  $H^{2n-1}G = 0$ , no pot existir cap successió exacta com la del corol.lari de l'apartat 2, ja que a  $G$  hi ha  $p^3-1$  elements d'ordre  $p$  i a  $Z/p^3Z \oplus Z/p^3Z$  només n'hi ha  $p^2-1$ .

Corol.lari  $Z/pZ \oplus Z/pZ \oplus Z/pZ$  no pot operar sense punts fixos i conservant l'orientació sobre cap producte d'esferes de la mateixa dimensió.

Aquest corol.lari ja fou demostrat per Heller l'any 1959 amb mètodes totalment diferents (3). La demostració que n'he donat té dos avantatges: dóna un resultat algebraic més fort i és força més curta i elegant.

#### 4. Grups semiperiòdics

El teorema d'Artin i Tate que he mencionat a la introducció dóna una caracterització dels grups periòdics en termes

de teoria de grups clàssica: tot subgrup de Sylow ha d'ésser cíclic o quaterniònic. Es planteja, aleshores, la possibilitat d'obtenir una caracterització semblant per als grups c.s.p.

Diré que un grup  $G$  és semiperiòdic si tot subgrup de Sylow de  $G$  és un producte de dos grups cíclics o quaterniònics.

### Proposició

- a) Tot grup periòdic és semiperiòdic
- b) El producte directe de dos grups periòdics es semiperiòdic.
- c) Tot grup abelià semiperiòdic és la suma directa de dos grups cíclics.

Corol·lari Tot grup abelià semiperiòdic és c.s.p.

El resultat següent permet determinar quins grups nilpotents són semiperiòdics.

Teorema Sigui  $G$  un grup finit nilpotent semiperiòdic. Aleshores:

$$a) |G| = 2^{a+b} \cdot q^{c+d}, \quad (2, q) = 1, \quad a+b \geq 3, \quad a \leq b, \quad c \leq d.$$

$$G = S_2 G \times (Z/q^c Z \times Z/q^d Z) \text{ on } S_2 G = Z/2^a Z \times Q_2 b.$$

$$Q_2^a \times Z/2^b Z \quad \text{o} \quad Q_2^a \times Q_2^b$$

b)  $G$  és c.s.p.-4 i

$$H^{4n}G/H^{4n-1}G = Z/2^a q^c Z \oplus Z/2^b q^d Z.$$

### 5. Algunes propietats d'extensió

Els resultats d'aquests apartats estan encaminats a demostrar l'equivalència entre semiperiòdic i c.s.p. o si més no a suggerir com s'ha de modificar el concepte de c.s.p. per tal de que valgui l'equivalència.

Proposició El producte semidirecte  $Z/rZ \rtimes Z/sZ$  de dos grups cíclics es c.s.p.-(2m) on m és l'enter positiu més petit tal que  $t^m \equiv 1 \pmod r$ , éssent t la imatge de 1  $\in Z/rZ$  per l'acció de 1  $\in Z/sZ$ .

(La demostració utilitza els càlculs fets per Wall a (7)).

Corol·lari  $Z/rZ \rtimes Z/sZ$  només pot operar sense punts fixos i conservant l'orientació sobre  $S^{Km-1} \times S^{Km-1}$  on K és parell i m com a la proposició anterior.

Proposició Sigui  $G$  una extensió d'un grup periòdic  $Q$  per un grup cíclic  $N = Z/rZ$ . Si  $2m$  no és un període de  $Q$  o si  $N^Q \neq N$ , el grup  $G$  no és c.s.p.-(2m) i, per tant, no pot

operar sense punts fixos i conservant l'orientació sobre

$$S^{2m-1} \times S^{2m-1}.$$

La demostració resulta del fet que

$$H^n G = H^n Q \oplus H^0(Q, H^n N),$$

conseqüència de l'estudi de les diferencials de la successió espectral de Lyndon-Hochschild-Serre (4).

El punt essencial en la demostració de la possible equivalència entre semiperiòdic i c.s.p. radica en el fet que tot subgrup d'un grup c.s.p. sigui o no c.s.p. La següent proposició n'és un resultat parcial.

Proposició Si  $G$  és c.s.p.- $n$  i  $U = \text{Sp } G$  és abelià,  $U$  és c.s.p.- $n$ .

## BIBLIOGRAFIA

- (1) H. Cartan- S.Eilenberg "Homological Algebra"  
Princeton 1956
- (2) M. Castellet "Grupos finitos con cohomologia periódica  
y espacios que admiten recubrimientos es-  
féricos"  
Tesis doctoral. Barcelona 1973.
- (3) A. Heller "A note on spaces with operators"  
Illinois J. Math. 3(1959), 98-100
- (4) P.J. Hilton- U.Stammbach "A course in homological Algebra"  
Grad. Text in Math.4  
Springer 1971
- (5) A. Kurosh "The theory of groups" Part I  
Chelsea Pub.
- (6) R. Swan "A new method in fixed point theory"  
Comment. Math. Helv.34(1960), 1-16
- (7) C.T.C.Wall "Resolutions for extensions of groups"  
Proc. Cambridge Phil.Soc. 57 (1961), 251-255