Pub. Mat. UAB
nº 11, març 1979

ESPAIS DE FUNCIONS ANALITIQUES EN EL DISC (1)

Julià Cufí

L'estudi d'espais i àlgebres de Banach de funcions analítiques en el disc amb condicions de creixement ha desvetllat molt d'interès en els darrers vint anys paral·lelament al desenvolupament de la teoría de les àlgebres uniformes o àlgebres de Banach amb representació de Gelfand isomètrica i el seu estudi ha estat motivat, en part, per la teoría espectral de Gelfand. Però tot i això, no es pot dir que el tema de les àlgebres analítiques en el disc sigui ben bé un tema nou, sinó més aviat el resultat de nous plantejaments i de la consideració de problemes nous en un tema força clàssic. En efecte, el tema que volem tractar gira al voltant de la teoría dels espais de Hardy, teoría que té els seus orígens en les descobertes fetes fa uns cinquanta anys per matemàtics tals com Hardy, Littlewood, Privalov, F. i M. Riesz, Smirnov i G. Szegö i que s'ha de considerar com un capítol de la teoria de les funcions analítiques d'una variable complexe i, fins i tot, un capítol fonamental amb moltes connexions íntimes amb l'anàlisi de Fourier.

Els treballs dels matemàtics suara esmentats tractaven de propietats de funcions individuals dels espais H^p (espais de Hardy) i eran d'esperit clàssic. En temps més recents el desenvolupament de l'anàlisi funcional estimulà altre vegada l'interès pels espais H^p com

(1) Conferència donada a l'E.T.S.I.I. de Barcelona el 15 de desembre de 1977.

a espais vectorials i aquest punt de vista ha fet néixer una gran quantitat de problemes nous i ha donat nous mètodes per a resoldre els vells problemes portant un gran avenç de la teoria.

Volem dir ara, breument, quins han estat els moments més importants en aquest trànsit de la teoria clàssica al moment actual i de manera especial pel que fa a alguns dels problemes que ens proposem explicar.

En els seus inicis la teoria dels H^p depenía fortament de algunes eines de la teoria de funcions analítiques (productes de Blaschke, representació conforme,...) encara que era coneguda la relació de les funcions de H^p amb funcions definides sobre la circumferència unitat, gràcies al treball de Fatou a l'any 1906 en una de les primeres i més importants aplicacions de la teoria de Lebesgue a la teoria de funcions analítiques. Aquesta relació és la que lliga els H^p a problemes de sèries de Fourier (teoremes de Hardy i Littlewood), lligam que es coneix amb el nom de mètodes complexos a la teoria de sèries de Fourier. Cal citar per la seva especial importància els treballs dels germans Riesz del 1916 al 1927 que contenen els teoremes de factorització i els resultats de M. Riesz sobre les funcions conjugades.

Amb el naixement de l'anàlisi funcional sembla que els analistes oblidin tots aquells treballs, plens de integrals i d'acotacions, i a primera vista molt distants dels nous mètodes, més algebraics. Però a l'any 1949, Arne Beurling publica un article que és pot considerar històric: "On two problems concerning linear transformations in Hilbert space" (Acta Math. 81) en el qual determina els subespais tancats de l'espai de Hilbert invariants pel "shift operator" i això ho aconsegueix precisament agafant com a model d'espai de Hilbert l'espai H^2. En aquest treball es trova, per primera vegada, el nom de part externa i part interna per als factors de la descomposició de Riesz. Aquesta descoberta desvetlla l'interès dels analistes per aquesta part de l'anàlisi després de quasi vint anys d'oblit.

D'aleshores ençà els espais H^p són estudiats com a espais de Banach i de manera especial creix el interès per l'àlgebra H^∞ de les funcions analítiques acotades en el disc. A l'any 1957 un grup bastant nombrós de matemàtics es reuneixen a la "Conference of Analytic Functions" al Institute for Advanced Studies de Princeton i publiquen, amb el pseudònim de I.J. Schark, tot el que en aquell moment se sabía arran de H^∞. Quant a problemes no resolts cal citar el famós de la corona que ja havía estat plantejat per Kakutani a l'any 1941 de la forma següent:

si $f_1,\dots,f_n$ són funcions de H^∞ i $|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta > 0$ per tot z, $|z|<1$, es poden trobar $g_1,\dots,g_n$ de H^∞ tals que $\sum_{i=1}^{n} f_i g_i \equiv 1$?

Ara el problema s'enuncia dient si el disc unitat és dens a l'espectre de H^∞ i la resposta afirmativa no va ésser trovada fins a l'any 1962 per L. Carleson.

A l'any 1960 E. Stein i G. Weiss iniciàren, encara que amb moltes arrels en treballs anteriors, la teoria dels espais H^p en vàries variables reals i, en alguna mesura, van alliberar la teoría de la seva dependència de les tècniques de variable complexe basant-la, més aviat, en les nocions de funció harmònica conjugada, majorant harmònica,... Aquesta teoria, que fa per la transformació de Fourier el mateix paper que els H^p en el disc fan per les series de Fourier, està també relacionada amb les integrals singulars de Calderón i Zygmund, generalització de la transformació de Hilbert.

Deixant de banda altres camins que ha seguit la teoria dels H^p com ara l'estudi de H^∞ a altres dominis plans i l'extensió dels H^p a vàries variables complexes volem citar una darrera qüestió que ha influit molt en els problemes que considerarem: l'estudi dels operadors de Toeplitz, generalització introdüida a l'any 1964 per Brown i Halmos de les matrius finites que són constants a les diagonals, estudiades per Toeplitz cap el 1911. Si $h \in L^\infty$, l'operador de Toeplitz T_h a H^2, es defineix com $T_h(f) = P(hf)$ si f és de H^2, siguent P la projecció de

L^2 sobre H^2. $\underline{h}$ és el símbol de l'operador i moltes qüestions (invertibilitat, espectre de T_h, ésser T_h de Fredholm,...) depenen de que $\underline{h}$ pertanyi a una certa subàlgebra de L^∞ i de l'estructura de les funcions d'aquesta subàlgebra. En aquest context són importants els treballs de Widom, Douglas i Sarason.

Donem ara les nocions indispensables per a entendre el que segueix. Sigui T la circumferència unitat del pla complex i dm la mesura de Lebesgue normalitzada sobre T. H^p és el subespai de $L^p(T,dm)$ de les funcions $\underline{f}$ tals que $\hat{f}(n) = 0$ si $n < 0$, on $\hat{f}$ és la transformada de Fourier de $\underline{f}$. La integral de Poisson de $\underline{f}$ és, aleshores, una funció holomorfa al disc unitat tal que la norma de la convergència en mitja d'ordre p de la restricció a cada circumferència de radi $r < 1$ es manté acotada quan $r \longrightarrow 1$. Si $p = \infty$ és una funció holomorfa i acotada al disc. Tota funció amb una condició de creixement d'aquest tipus prové d'una funció de H^p a T que és la que ve donada quasi pertot pel seu límit radial. Una funció <u>interna</u> és una funció de H^∞ que sigui de mòdul 1 q.p. a T; un <u>producte de Blaschke</u> és una funció interna de la forma

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{|a_n|} \frac{z-a_n}{1-\bar{a}_n z} \qquad \text{on} \quad |a_n| < 1 \ \text{i} \ \sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$$

Un teorema, degut a Frostman, assegura que tota funció interna és límit uniforme sobre el disc de productes de Blaschke. L'àlgebra del disc, A, és l'àlgebra $H^\infty \cap C$, on C són les funcions contínues a T.

En un cert sentit totes les qüestions que anem a considerar es poden veure com una generalització d'un famós teorema demostrat per Wermer el 1953 i que diu :

- L'àlgebra del disc A és una subàlgebra tancada maximal de C.

Tant d'interès com el mateix teorema (un teorema d'aproximació, de fet), en té la demostració molt senzilla que en van donar Hoffman i Singer (1960) i que aplicada a H^∞ dóna el següent resultat:

- Tota àlgebra tancada B : $H^\infty \subsetneq B \subsetneq L^\infty$, conté l'àlgebra C.

Entre les àlgebres tancades B, intermediàries com les del resultat anterior, n'hi ha una de més petita, la que engendren H^∞ i C. Aquesta àlgebra va ser determinada per Sarason (1967) i és precisament $H^\infty + C$. Cal observar que $H^\infty + C$ és també l'àlgebra engendrada per H^∞ i els productes de Blaschke finits que són, justament, els p. de B. (1) invertibles a $H^\infty + C$. Dos anys més tard (1969), Douglas i Rudin van demostrar que també L^∞ era l'àlgebra tancada engendrada per H^∞ i els p. de B. invertibles a L^∞ (que són tots els p. de B.); de fet el seu teorema diu :

- La més petita àlgebra tancada i autoadjunta que conté totes les funcions internes, és L^∞.

Cal notar, però, que van deixar sense resposta la qüestió, ja plantejada abans, de si H^∞ era l'àlgebra tancada engendrada per les funcions internes.

Simultàniament, Douglas observà que el estudi dels operadors de Toeplitz a H^2 portava a l'investigació de certes subàlgebres de L^∞ que contenen H^∞ i definía les seves àlgebres en termes d'un sistema de generadors,plantejant el següent problema :

- Si B és una àlgebra tancada : $H^\infty \subset B \subset L^\infty$ i B_I és la subàlgebra de B engendrada per H^∞ i les inverses de les funcions internes invertibles a B, és $B_I = B$?

La resposta, afirmativa, a la qüestió de Douglas no ha estat trobada fins el 1975 encara que durant aquest temps es va provar que la conjectura era certa per algunes àlgebres particulars. Així, Davie-Gamelin-Garnett (1973) van demostrar que $B = B_I$ quan $B = H^\infty + L^\infty_E$, l'àlgebra engendrada per H^∞ i les funcions de L^∞ contínues a un conjunt $E \subset T$, i Sarason (1972) ho havia fet per l'àlgebra engendrada per H^∞

(1)D'ara endavant abreujarem producte de Blaschke per p. de B.

i les funcions contínues a $T - \{1\}$ i que en el punt $\underline{1}$ tenen límits laterals. El cas $B = L^{\infty}$ és el de Douglas-Rudin.

Anem a remarcar els aspectes més interessants del camí que va portar a la solució del problema de Douglas : passant de les àlgebres al seus espectres s'arriva a una condició necessària per a que el problema de Douglas tingui resposta afirmativa. Sigui X l'espectre de L^{∞} i Y l'espectre de H^{∞}; és sabut que Y és la reunió del disc unitat i una fibra sobre cada punt de T; que X és un subespai de Y (la frontera de Shilov de H^{∞}) i que tot punt de Y es pot representar per una única mesura positiva sobre X. D'això resulta que si B és una àlgebra (sempre tancada), $H^{\infty} \subsetneq B \subseteq L^{\infty}$, l'espectre de B, M(B), es pot mirar com un subespai de Y que conté a X. Una funció interna $\underline{h}$ és invertible a B si i només si $|\hat{h}| = 1$ a tot punt de M(B). Recíprocament, si B està engendrada per H^{∞} i les conjugades de certes funcions internes llavors M(B) està format pels punts de Y en els que la transformada de Gelfand de cada funció generatriu té mòdul 1. Resulta, per tant, que si el problema de Douglas té resposta afirmativa sempre que tinguem àlgebres tancades B, B' amb $H^{\infty} \subsetneq B, B' \subset L^{\infty}$ i $M(B) = M(B')$ ha de ser $B = B'$, és a dir, l'espectre determina les àlgebres intermediàries.

El primer pas per esbrinar aquesta darrera qüestió el va donar Sarason (1974) el qual va provar el següent resultat :

- Si B és àlgebra tancada amb $H^{\infty} \subsetneq B \subseteq L^{\infty}$ i $M(B) = M(H^{\infty} + C)$, llavors $B = H^{\infty} + C$.

Tant com el resultat té interès la tècnica que utilitzà Sarason en establir-lo i que donà el camí per la solució completa del problema de Douglas. Ell va observar lo que segueix :

Una funció unimodular de $H^{\infty} + C$ és invertible a $H^{\infty} + C$ si i només si la seva conjugada també pertany a $H^{\infty} + C$. Anomenant QC (quasi-contínues) les funcions de $H^{\infty} + C$ amb conjugada a $H^{\infty} + C$ es veu tot seguit que QC és $C + \tilde{C}$ (a on $\tilde{f}$ vol dir la transformada de Hilbert de f) i el punt essencial és que les funcions de QC es poden caracteritzar per condicions de regularitat. Això ho aconsegueix fent servir els resultats i les tècniques introduïdes per Fefferman i Stein el 1972 on, bàsicament identifican el dual de H^1 amb l'espai <u>BMO de les funcions d'oscil·lació mitjana acotada</u>, és a dir funcions $f \in L^1$ tals que

$$M_1(f) = \sup_{|I| \leq 2\pi} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| \, dm < \infty \qquad \text{a on} \quad f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f \, dm$$

Entre d'altres, Fefferman i Stein donen la següent caracterització de BMO : $BMO = L^\infty + \widetilde{L^\infty}$.

Sarason introdueix aleshores l'espai VMO (oscil·lació mitjana nul·la) posant

$$f \in VMO \text{ si } \quad M_o(f) = \lim_{a \to 0} \sup_{|I| \leq a} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| \, dm = 0$$

i estableix amb relativa facilitat la igualtat $VMO = C + \widetilde{C}$ de on $QC = L^\infty \cap VMO$. La condició de regularitat per que $f \in QC$ és que $|f|$ sigui contínua al disc tancat i d'aquí obté el seu resultat.

Posteriorment, el mateix resultat ($M(B) = M(H^\infty + C)$ implica $B = H^\infty + C$) va ser establert per altres àlgebres especials per Weight, Axler i Chang. Els esforços van culminar en el teorema de S.Y. Chang (1975) :

- Si B i B_1 són àlgebres tancades amb $H^\infty \subset B, B_1 \subset L^\infty$, siguent B una àlgebra de Douglas (és a dir $B = B_I$) i $M(B) = M(B_1)$, llavors $B = B_1$.

Amb la demostració d'aquest teorema la solució del problema de Douglas semblava molt propera i, efectivament, poc temps després D. Marshall va donar el pas final:

- Si B és una àlgebra tancada, $H^\infty \subset B \subset L^\infty$, llavors $M(B) = M(B_I)$.

La demostració del teorema de Chang és una aplicació interessant de les tècniques de Fefferman i Stein en establir la seva caracterització del espai BMO. Hom pot considerar només el cas de que B_I estigui engendrada per H^∞ i la conjugada de una sola funció $\underline{b}$ invertible a B_1.

Cal veure que si $w \in B$ llavors $\mathrm{dist}(w, \bar{b}^n H^\infty) = \mathrm{dist}(wb^n, H^\infty) \longrightarrow 0$. Aquesta distància, per un principi de dualitat, és igual al ínfim de les integrals $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} wb^n g \, dm$ (g variant a H^1_0) i aquestes integrals s'estimen tenint en compte que si $f \in BMO$ la mesura $(1-r)|\nabla f(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta$ és una mesura de Carleson.

Quant al teorema de Marshall també es pot considerar el cas especial $B = H^\infty[\bar{w}]$, on $w \in L^\infty$, w és unimodular i invertible a B. Si B_1 és una àlgebra tancada $H^\infty \subset B_1 \subset B$ tal que $M(B_1)$ conté estrictament a $M(B)$ llavors Marshall construeix un p. de B. interpolant (és a dir que la successió de zeros del p. de B. és una successió d'interpolació per a H^∞) que és invertible a B però no ho és a B_1. Així de fet, Marshall pot demostrar un resultat més fort que la qüestió inicial de Douglas:

- Tota àlgebra tancada B : $H^\infty \subset B \subset L^\infty$ està engendrada per H^∞ i els conjugats de productes de Blaschke interpolants.

Poc temps avans, Ziskind havía demostrat un cas particular: L^∞ està engendrada per H^∞ i els conjugats dels productes de Blaschke interpolants. La demostració de Marshall és una modificació de la de Ziskind i ambdues es basen en una construcció complicada que va introduir Carleson a la seva demostració del teorema de la corona.

Anem a exposar ara altres problemes, relacionats amb el de Douglas, alguns dels quals encara no han estat resolts:

Si B és una àlgebra tancada, $H^\infty \subsetneq B \subsetneq L^\infty$, sigui C_B la C^*-àlgebra tancada engendrada pels p. de B. invertibles a B. Segons el teorema de Chang-Marshall $B = [H^\infty, C_B]$ i en algún cas particular se sabía que de fet $B = H^\infty + C_B$ (p. ex. $B = H^\infty + C$ o $B = H^\infty + L^\infty_E$). Es veritat, en general, que $B = H^\infty + C_B$? La resposta afirmativa la va donar Chang el 1976 (T.A.M.S. 1977) i una mica més tard Chang i Marshall en van donar una demostració més senzilla basada en un teorema clàssic de Nevanlinna.

Per veure que $B = H^\infty + L^\infty_E$ és una àlgebra de Douglas, Davie, Gamelin i Garnett havien establert la següent generalització del teorema de Douglas-Rudin: tota funció unimodular de L^{∞}_{E} es pot aproximar uniformement per quocients de p. de B. invertibles a $B = H^{\infty} + L^{\infty}_{E}$. Ja que segons Chang ($B = H^{\infty} + C_B$) C_B fa per una B qualsevol el paper de L^{∞}_{E}, és veritat que tota funció unimodular de C_B es pot aproximar per quocients de p. de B. invertibles a B? Marshall va provar recentment que si $u \in C_B$, u^2 es pot aproximar per quocients d'aquest tipus, però una resposta completa al problema no es coneix.

Finalment, citem una altre qüestió interessant amb relació al teorema de Chang-Marshall :

D'aquest teorema es dedueix fàcilment que si $f \in L^{\infty}$ i f restringida al suport de les mesures que representen els caràcters de B, pertany a l'àlgebra restricció de B a aquest suport, llavors $f \in B$. Aquest resultat es pot comparar amb la conclusió que dóna el teorema de Bishop sobre els conjunts d'antisimetría. Com que els suports de les mesures representatives són conjunts d'antissimetría la conclusió de Chang-Marshall és més forta que la del teorema de Bishop. Es natural pensar si hi ha alguna relació entre les dues conclusions en el sentit de que cada conjunt d'anti simetría estigui construit a base de suports. Encara que sembla que un resultat d'aquest tipus no ha de ser veritat per una àlgebra uniforme general, podría ser-ho en el cas present.

Reprenem ara una qüestió que havíem plantejat al parlar del teorema de Douglas-Rudin: és el fet de si els p. de B. (o les funcions internes) engendren l'àlgebra H^{∞} :

El 1976 Marshall, utilitzant una idea de Bernard sobre l'envoltura convexa de les funcions unimodulars en una àlgebra uniforme i el teorema de Nevanlinna a que ens hem referit abans (el qual es mereix ser més ben conegut), va donar la resposta afirmativa a aquest problema:

- H^{∞} és la més petita àlgebra tancada que conté les funcions internes.

Per un altre costat, Wermer havía posat la qüestió de quines eran les àlgebres tancades M : $A \subset M \subset H^{\infty}$ (A, àlgebra del disc) per les que era cert el teorema de la corona. Fins fa molt poc no es van conèixer contrexemples, és a dir àlgebres M: $A \subset M \subset H^{\infty}$ per les que el disc no és dens a l'espectre de M. Una classe de subàlgebres de H^{∞} es pot obtenir de la següent manera :

Sigui B àlgebra tancada, $H^{\infty} \subsetneq B \subsetneq L^{\infty}$, i C_B la C^*-àlgebra engendrada pels p. de B. invertibles a B; agafem $M = H^{\infty} \cap C_B$ amb lo qual $A \subset M$. Per aquestes àlgebres M, l'àlgebra C_B fa un paper equivalent al que fa L^{∞} respecte H^{∞}. Chang i Marshall (1976) fan aprofundir en aquesta relació i d'entre els seus resultats cal remarcar :

- $H^{\infty} \cap C_B$ està engendrada pels p. de B. invertibles a B, és a dir pels p. de B. de $H^{\infty} \cap C_B$.

- Una versió més general del problema de Douglas, que diu : si D és una àlgebra tancada, $H^{\infty} \cap C_B \subset D \subset C_B$, llavors D està engendrada per $H^{\infty} \cap C_B$ i els inversos dels p. de B. invertibles a D. (Quan $B = L^{\infty}$ tenim el problema de Douglas i quan $B = H^{\infty} + C$ s'obté el teorema de maximalitat de Wermer del qual el resultat de Chang-Marshall n'és, per tant, una generalització).

- Les àlgebres $H^{\infty} \cap C_B$ tenen la propietat de la corona.

- Si D és àlgebra tancada, $H^{\infty} \cap C_B \subset D \subset C_B$ i $C_{B,D}$ és la C^*-àlgebra engendrada pels p. de B. invertibles a D, llavors $D = H^{\infty} \cap C_B + C_{B,D}$.

Per acabar, citem alguns problemes interessants oberts en relació amb aquestes qüestions :

- Es H^{∞} l'àlgebra engendrada pels p. de B. interpolants? En tot cas, quina àlgebra engendren els p. de B. interpolants? Es L^{∞} l'àlgebra engendrada pels p. de B. interpolants i els seus conjugats?.

- Hi ha exemples d'àlgebres M, $A \subset M \subset H^{\infty}$, que no contenen cap p. de B., tret dels finits i, per tant, M no està engendrada pels p. de B.

de M. Caracteritzar les àlgebres M engendrades pels p. de B. de M.

- Si B és àlgebra tancada, $H^\infty \subsetneq B \subsetneq L^\infty$, a cada punt $\alpha \in T$ la fibra de $M(B)$ Z_α, verifica $X_\alpha \subset Z_\alpha \subset Y_\alpha$. ($X$ = Spec (L^∞), Y = Spec (H^∞)). Es pot considerar l'aplicació $\varphi_\alpha : M(H^\infty)_\alpha \longrightarrow M(H^\infty \cap C_B)_\alpha$ que és exhaustiva pel teorema de la corona per $H^\infty \cap C_B$. D'alguna manera quan més gran és la fibra Z_α menys injectiva és l'aplicació φ_α. Establir més a fons aquesta relació veient, per exemple, si el problema és local.

BIBLIOGRAFIA

1 BERNARD-GARNETT-MARSHALL: "Algebras generated by inner functions" J. Funct. Anal. Vol. 25 nº 30 (1977).

2 CARLESON L.: "Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem" Ann. Math. 76 (1962).

3 CHANG S.Y.: "A characterization of Douglas subalgebras" Acta Math. 137 (1976).

4 CHANG S.Y.: "Structure of subalgebras between L^∞ and H^∞" Trans. Am. Math. Soc. 227 (1977).

5 CHANG-MARSHALL: "Some algebras of bounded analytic functions containing the disc algebra" Lecture Notes in Math. 604

6 DAVIE-GAMELIN-GARNETT: "Distance estimates and pointwise bounded density" Trans. Am. Math. Soc. 175 (1973).

7 DETRAZ J. "Algèbres de fonctions analytiques dans le disque" Ann. Sci. Ec. Nor. Sup. t.3 (1970).

8 DOUGLAS R.G. "Banach Algebras Techniques in Operator Theory" Academic Press N.Y. (1972).

9 DOUGLAS-RUDIN: "Approximation by inner functions" Pac. J. Math. 31 (1969).

10 DUREN P.L.: "Theory of H^p Spaces" Academic Press N.Y. (1970).

11 FEFFERMAN-STEIN: "H^p spaces of several variables" Acta Math. 129 (1972).

12 HOFFMAN K. "Banach Spaces of Analytic Functions" Prentice Hall N.J. (1962).

13 MARSHALL D.: "Blaschke products generate H^∞" Bull. Am. Math. Soc. 82 (1976).

14 MARSHALL D.: "Subalgebras of L^∞ containing H^∞" Acta Math. 137 (1976)

15 SARASON D.: "Algebras of functions on the unit circle" Bull. Am. Math. Soc. 79 (1973).

16 SARASON D.: "Functions of vanishing mean oscillation" Trans. Am. Math. Soc. 207 (1975).

17 WERMER J.: "Algebras of continuous functions" Proc. Am. Math. Soc. 4 (1953).

18 ZISKIND S.: "Interpolating sequences and the Shilov boundary of H^∞" J. Funct. Anal. 21 (1976).