Pub. Mat. UAB
nº 11, març 1979

INTEGRACIÓ ESTOCÀSTICA

David Nualart
(Universitat Politècnica de Barcelona)

1. Moviment brownià. El problema de la integral estocàstica.

El problema de la integral estocàstica consisteix bàsicament en donar sentit a un proces estocàstic definit per una integral de la forma $\int_0^t f(s)\, dW_s$, on $W=(W_t)_{t\in R_+}$ és un procés de moviment brownià, és a dir, un procés amb les condicions:

a) els increments del procés en intervals disjunts són independents,

b) l'increment $W_t - W_s$ té llei $N(o,\sigma^2.(t-s)), \sigma > o$, per tot $s \leq t$.

Intuïtivament es pot considerar el moviment brownià W com a l'aproximació asimptòtica del passeig aleatori d'una partícula sobre la recta real, de forma que en cada interval de temps la partícula rep un gran nombre de petits impulsos independents. Concretament, considerem per cada $n \in N$ el procés $S_n(t) = \sum_{i \leq k} \Delta_i^n + (t - \frac{k}{2^n})\Delta_k^n$, per $t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$, on $(\Delta_i^n)_{i\in N}$ és una successió de variables aleatòries independents amb llei

$$\mathcal{L}(\Delta_i^n) = \frac{1}{2}\delta_{\sigma.2^{-\frac{n}{2}}} + \frac{1}{2}\delta_{-\sigma.2^{-\frac{n}{2}}}, \quad \sigma > o.$$

El procés S_n descriu el moviment d'una partícula que a l'instant $\frac{k}{2^n}$ té una col.lisió, i entre dos d'aquests instants es mou amb velocitat constant. Aleshores es pot demostrar que per cada $t \in R_+$, les variables aleatòries $S_n(t)$ convergeixen en llei cap a una variable W_t i que el procés estocàstic $W=(W_t)_{t\in R_+}$ és un moviment brownià. En realitat, hi ha convergència feble de les lleis de probabilitat induïdes per aquests processos en l'espai mètric $C([0,1])$, (veure [1], [12]).

L'any 1908, P.Langevin ([2]) va estudiar el moviment d'una partícula lliure en un fluid. Cada composant X_t de la velocitat de la partícula satisfà l'anomenada equació de Langevin,

$$m\, d\, X_t + \alpha\, X_t = \sigma\, d\, W_t\,, \quad \alpha > 0,\ \sigma \text{ constants.}$$

El terme $\alpha\, X_t$ correspon a la fricció dinàmica de la partícula amb el fluid i depèn de la viscositat. El segón terme $\sigma\, d\, W_t$ representa la força causada pels xocs de la partícula amb les molècules del fluid que va trobant.

Com que aquestes col.lisions són molt nombroses i independents, aquest terme es pot descriure per un diferencial del brownià, en el sentit de que la suma dels impulsos en un interval de temps $[s,t]$ serà $\sigma(W_t - W_s)$.

L'equació de Langevin és un cas particular de les equacions diferencials estocàstiques, que en general són de la forma

$$d\,X_t = a\,(t, X_t)\,d\,t + \sigma\,(t, X_t)\,d\,W_t,$$

i s'introdueixen com a models per l'evolució d'un sistema dinàmic X_t, afectat per una perturbació aleatòria en forma de "soroll blanc", és a dir, que pot prendre valors arbitraris i independents en tot instant, i que correspon al terme $\sigma(t, X_t)\,d\,W_t$.

Un procés estocàstic $X = (X_t)_{t \in R_+}$ es diu que és solució d'aquesta equació diferencial estocàstica segons K.Itô ([4],[5]), amb condició inicial $X_o = \xi$ (on ξ és una variable aleatòria) si per tot $t \in R+$,

$$X_t(\omega) = \xi(\omega) + \int_o^t a(s, X_s(\omega)\,d\,s + \int_o^t \sigma(s, X_s(\omega))\,d\,W_s(\omega) \quad , \text{ q.s.}$$

La primera integral es pot definir per cada trajectòria ω, pero aquest mètode no es pot utilitzar en la segona integral que és un cas particular d'integral estocàstica. En efecte, es demostra que existeixen versions del procés de moviment brownià W amb trajectòries contínues, però que amb probabilitat 1 no són derivables en cap punt de R_+. En conseqüència tenen variació total infinita en tot interval afitat $[0,t]$:

$$\sup \{\sum_{i=0}^{n} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|, \pi = \{0 = t_o < \ldots < t_n = t\}, \text{ partició de } [0,t]\} = \infty, \text{ q.s.}$$

Per conseqüent cal donar sentit a expressions de la forma $\int_o^t X_s(\omega)\,d\,W_s(\omega)$ per a poder fonamentar teòricament l'estudi de les equacions diferencials estocàstiques, i hem de tenir en compte que no es pot prendre una integral ordinària en cada trajectòria.

Aleshores la construcció de la integral estocàstica es basa en la propietat de "variació quadràtica" del moviment brownià:

Si $(\pi_n)_{n \in N}$ és una successió decreixent de particions de $[0,t]$ tal que $||\pi_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $(||\pi_n|| = \max_i (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)})$, si $\pi_n = \{t_0^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)}\})$, llavors

$$\sum_{i=0}^{n} (W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} t.$$

Formalment podem dir que $(dW_t)^2$ és equivalent en mitja quadràtica a dt. O sigui, podem escriure $dW_t = \xi_t \sqrt{dt}$ on $(\xi_t)_{t \in R_+}$ és una família de variables aleatòries independents de llei $N(0,1)$. Llavors el "soroll blanc" que des d'un punt de vista formal es defineix com la derivada del moviment brownià, seria $\frac{dW_t}{dt} = \frac{\xi_t}{\sqrt{dt}}$ i tindria per tant variança infinita en cada instant, quan dt tendeix a zero. Això correspon a l'idea intuïtiva de que en tot instant pot prendre valors arbitraris amb la mateixa probabilitat, i justifica el fet de que $\frac{dW_t}{dt}$ no és un procés sino que s'ha de considerar dins el marc de la teoria dels funcionals lineals aleatoris o distribucions aleatòries.

2. Integració estocàstica d'una funció determinista .

La integral estocàstica $\int_0^t f(s)\, dW_s$ en el cas d'una funció f determinista va ésser utilitzada per primera vegada per N.Wiener ([6]).

Si λ representa la mesura de Lebesgue en la recta, i $\mathcal{B}(I)$ és la tribu dels Borelians de l'interval $I=[0,T]$, llavors aquesta integral consisteix en construir una isometria entre espais de Hilbert:

$$W: L^2(I, \mathcal{B}(I), \lambda) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$
$$f \to \int_0^T f(s)\, dW_s ,$$

que compleixi les propietats,

a) W és lineal,

b) W conserva el producte escalar: $E(\int_0^T f(s) dW_s \cdot \int_0^T g(s)\, dW_s) = \int_0^T f(s)\, g(s)\, ds$,

c) W(f) té llei normal: $\mathcal{L}(\int_0^T f(s) dW_s) = N(0, \int_0^T f(s)^2 ds)$,

d) $W(1_{[0,t]}) = W_t$.

En general, donat qualsevol espai de Hilbert H, existeix una aplicació $\varphi: H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ lineal, que conserva el producte escalar i que és Gaussiana, és a dir, per tot conjunt finit $h_1, \dots, h_n$ d'elements de H, les variables $\varphi(h_1), \dots, \varphi(h_n)$ tenen llei conjunta normal. En particular podem prendre $H = L^2(S, \mathcal{S}, m)$ on $(S, \mathcal{S}, m)$ és un espai de mesura qualsevol, i per tant l'aplicació W és un exemple d'aquestes aplicacions.

Observem que la restricció de W als indicadors dels borelians $W(B) = W(1_B)$, on $B \in \mathcal{B}(I)$, defineix una mesura vectorial a valors en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definida en l'espai mesurable $(I, \mathcal{B}(I))$, que és σ-additiva, Gaussiana, independent ($W(B_1)$ i $W(B_2)$ son variables aleatòries independents si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$) i compleix

$$E(W(A)W(B)) = \lambda(A \cap B), \text{ per tot } A, B \in \mathcal{B}(I).$$

La integral indefinida $X = \left(\int_0^t f(s)\, dW_s\right)_{t \in R_+}$ és un procés amb increments independents i trajectòries contínues. Reciprocament, tot procés estocàstic amb aquestes propietats es pot escriure com integral indefinida respecte a un procés de moviment brownià.

A partir d'aquest resultat es pot plantejar el problema de caracteritzar tots els processos amb increments independents. En primer lloc, separant les discontinuïtats fixes, podem suposar que el procés X és continu en probabilitat. Llavors es demostra que les discontinuïtats que pot encara presentar el procés (que ja no són fixes, és a dir, el conjunt de trajectòries discontínues en un instant donat té probabilitat zero) només poden ser de salts. O sigui, que amb probabilitat 1, existeixen els limits laterals en tot $t \in R_+$. Utilitzant aquesta propietat, podem descomposar el procés en una part amb trajectories contínues que serà de la forma $\int_0^t f(s)\, dW_s$ més una part purament discontínua que correspondrà a una "suma de salts" i que s'expressa mitjançant una integral estocàstica respecte una mesura de Poisson N:

$$X_t = \int_0^t f(s)\, dW_s + a(t) + \int_{R \times [0,t]} \left(x . N(dx,ds) - \frac{x}{1+x^2}\, \nu(dx,ds)\right).$$

N és una mesura puntual estocàstica de Poisson definida en la banda $R \times [0,t]$, és a dir, és una mesura vectorial a valors en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, σ-additiva, independent, tal que per tot Borelià G de $R \times [0,t]$, $N(G)$ és una variable aleatòria de Poisson de paràmetre $\nu(G)$, on ν és una mesura positiva. Si G és un rectangle $B \times [r,s]$, llavors $N(B\times[r,s])$ representa el nombre de salts del procés d'amplitud pertanyent a B, que es produeixen entre els instants r i s, i $\nu(B\times[r,s])$ és el valor mig del nombre d'aquests salts.

En conseqüència, $\int_{R\times[0,t]} x\, N(dx, ds)$ serà la suma de les amplituds dels salts del procés x. Aquesta integral, però, pot no existir perque la mesura $\nu_t(B) = \nu(B\times[0,t])$ sobre R, pot donar mesura infinita a un entorn de l'origen. ν_t s'anomena mesura de Lévy del procés X i compleix sempre $\int_R (1\wedge x^2)\, \nu_t\,(dx) < \infty$.

A partir d'aquesta condició es pot donar sentit a la integral estocàstica anterior, afegint un terme de centrament i utilitzant la convergència en L^2, d'una forma anàloga a la integral respecte el brownià.

Aquesta descomposició dels processos amb increments independents és deguda a P.Lévy, i se'n pot deduir la forma general de les lleis infinitement divisibles.

Una possible generalització consistiria en caracteritzar com a suma d'integrals estocàstiques les mesures vectorials μ independents, a valors en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, definides en un espai mesurable qualsevol $(S, \mathcal{S})$. Suposant que μ és difusa es tractaria de trobar una mesura independent i gaussiana W en S i una mesura independent de Poisson N en el producte $R\times S$ tals que per tot conjunt $A\in\mathcal{S}$,

$$\mu(A) = W(A) + \int_{R\times A} x\, N(dx,ds) \quad .$$

La dificultat d'aquestes generalitzacions prové de no poder disposar de teoremes relatius a la regularitat de les funcions $\mu(A,\omega)$, definides en $\mathcal{S}$ per cada $\omega\in\Omega$, semblants a les propietats de les trajectòries dels processos amb increments independents.

3. Construcció de la integral estocàstica d'un procés .

La construcció de la integral estocàstica d'un procés $X = (X_t)_{t\in R_+}$ respecte un procés de moviment brownià W, és deguda a K.Itô (1944), ([3]).

Es tracta de definir l'expressió $\int_0^t X_s(\omega)\, d\, Z_s(\omega)$, on Z, de moment, és un procés qualsevol.

L'element bàsic per a definir aquestes integrals consisteix en una base estocàstica $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}, P)$, és a dir, una família creixent $(\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}$ de subtribus de $\mathcal{F}$ en un espai de probabilitat $(\Omega,\mathcal{F},P)$, de manera què $\mathcal{F}_t$ representa la tribu dels esdeveniments que es poden produir abans de l'instant t. En el cas d'integrar respecte al moviment brownià W, prendrem per exemple, com $\mathcal{F}_t$ la tribu generada per les variables W_s, $0 \leq s \leq t$.

Els processos X que volem integrar es poden considerar com funcions reals mesurables definides en el producte $(R_+\times \Omega, \mathcal{B}(R_+)\otimes \mathcal{F})$, però amb la restricció d'ésser no-anticipatius o adaptats, és a dir, X_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable per tot $t\in R_+$.

Els processos més simples són els de la forma

$$X(t,\omega)= 1_{(r,s]\times F}(t,\omega) \ , \ r<s, \ F \in \mathcal{F}_r,$$

o sigui, són els indicadors dels conjunts del semianell

$$\mathcal{R}= \{(r,s] \times F, \ r<s, \ F\in \mathcal{F}_r\} \ .$$

La integral estocàstica d'un procés X d'aquesta forma, respecte Z té la seguent definició natural

$$(\int_0^\infty X_t \, d\, Z_t)(\omega) = 1_F(\omega)\ (Z_s(\omega)-Z_r(\omega)).$$

Es planteja llavors el problema de l'extensió d'aquesta integral per linealitat i continuïtat a una classe més àmplia de processos. Es consideren en principi els processos previsibles, és a dir, els processos mesurables respecte la tribu previsible $\mathcal{P}$ generada per $\mathcal{R}$. Es sabut que $\mathcal{P}$ coincideix amb la tribu generada pels processos adaptats i amb trajectòries contínues per l'esquerra .

El mètode per a estendre l'integral consisteix en buscar una mesura m sobre la tribu $\mathcal{P}$ tal que per tot procés X elemental (és a dir, combinació lineal d'indicadors de conjunts de $\mathcal{R}$) satisfà

$$E\left| \int_0^\infty X d\, Z \right|^p \leq \int_{R_+\times\Omega} |X|^p \, d\, m \quad , \text{ per algun } p\in N.$$

La classe de processos integrables serà llavors $L^p(R_+ \times \Omega, \mathcal{P}, m)$.

En el cas del brownià, si prenem p=2 i $m = \lambda \times P$, tindrem

$$E\left(\int_0^\infty X\,d\,W\right)^2 = \int_{R_+ \times \Omega} (X(t,\omega))^2 \,d\,t\,d\,P,$$

i llavors la integral $\int_0^\infty X\,d\,W$ serà una isometria entre els espais $L^2(R_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \times P)$ i $L^2(\Omega, \mathcal{F}^{\ell}, P)$.

Descriurem seguidament les propietats bàsiques d'aquesta integral.

1. Tot procés adaptat de $L^2(R_+ \times \Omega, \mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{F}^{\ell}, \lambda \times P)$ és mesurable respecte la completació $\overline{\mathcal{P}}$ de la tribu previsible per la mesura $\lambda \times P$, i per tant és integrable car pertany a $L^2(R_+ \times \Omega, \overline{\mathcal{P}}, \lambda \times P)$.
2. La integral indefinida, $Y_t = \int_0^t X_s\,d\,W_s$ és un procés estocàstic de L^2 que admet una versió amb trajectòries contínues, i té la propietat de martingala respecte la família de tribus $(\mathcal{F}^{\ell}_t)_{t \in R_+}$:

   $$E[Y_t \mid \mathcal{F}^{\ell}_s] = Y_s\text{ , per tot } s \leq t.$$

   Recíprocament, en la hipòtesi de que la família de tribus està generada pel brownià, tota martingala $M=(M_t)_{t \in R_+}$ és de la forma

   $$M_t = E(M_0) + \int_0^t X_s\,d\,W_s\ ,$$

   on $X(t,\omega)$ és un procés tal que $X \cdot 1_{[0,t] \times \Omega} \in L^2(R_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \times P)$, per a tot $t \in R_+$. En particular tota martingala es contínua.
3. La integral estocàstica es pot estendre a processos X, mesurables, adaptats i tals que $\int_0^t X_s^2(\omega)\,ds < \infty$, q.s., per tot $t \in R_+$, utilitzant la convergència en probabilitat..
4. Les regles del càlcul diferencial ordinari no són valides per la integral estocàstica, com es dedueix, per exemple, de la "fórmula de diferenciació d'Itô":

   Si $f(x,t): R \times R^+ \to R$ és tal que les derivades parcials $\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \frac{\delta f}{\delta t}$ són contínues, és compleix,

   $$f(W_t,t) = f(W_0,0) + \int_0^t \frac{\delta f}{\delta x}(W_s,s)\,d\,W_s + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta f}{\delta t}\right)(W_s,s)\,ds,\ \text{q.s.},$$

   per tot $t \in R_+$.

   Observem que el terme $\frac{1}{2}\ \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ prové de l'aproximació de Taylor de la funció f fins a l'ordre 2, i de la propietat de variació quadràtica del moviment brownià, que ens diu que $(d W_s)^2$ equival a ds.

Si la funció f és solució de l'equació del calor, o sigui,

$\frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta f}{\delta t} = 0$, llavors el procés $f(W_t, t)$ és martingala. En concret són interessants les martingales obtingudes quan f és una exponencial, que són de la forma $Z_t = e^{\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$, $\alpha \in R$. El procés Z_t s'anomena martingala exponencial i compleix $Z_t = 1 + \alpha \int_0^t Z_s \, d W_s$, és a dir, és solució de l'equació diferencial estocàstica $dZ_t = \alpha Z_t \, d W_t$ amb la condició inicial $Z_0 = 1$. Podriem dir que les martingales exponencials juguen el paper de les exponencials ordinàries en el càlcul diferencial estocàstic.

4. Integració respecte martingales.

Per demostrar la propietat d'isometria de la integral respecte al moviment brownià n'hi ha prou amb les propietats

$$E [W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = 0 \text{ , per tot } s \leq t$$

$$E [W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s] = 0 \text{ , per tot } s \leq t,$$

és a dir només cal que els processos $(W_t)_{t \in R_+}$ i $(W_t^2 - t)_{t \in R_+}$ siguin martingales respecte la família $(\mathcal{F}_t)_{t \in R_+}$.

Aleshores per tota martingala $M = (M_t)_{t \in R_+}$ de L^2 (és a dir, tal que $E(M_t^2) < \infty$ per tot t) i per tot procés X elemental, es compleix també una isometria

$$E\left(\int_0^\infty X \, d M\right)^2 = \int_{R_+ \times \Omega} (X(t,\omega))^2 \, d m,$$

on m és una mesura que pels conjunts del semianell $\mathcal{R}$ val

$$m ((s,t] \times F) = E (1_F . (M_t^2 - M_s^2)) .$$

L'existència d'una extensió σ-additiva de la mesura m a la tribu $\mathcal{P}$ és deguda a C.Doleans ([8]) i utilitza el fet de que podem prendre sempre una versió de la martingala M amb trajectòries contínues per la dreta.

Es pot introduir també la mesura m a partir de la descomposició de Doob-Meyer de la submartingala M^2 en suma d'una martingala N i d'un procés A amb trajectòries creixents i contínues per la dreta . En aquest cas la mesura m és precisament la restricció a la tribu $\mathcal{P}$ de la mesura sobre la tribu producte $\mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{F}^{\ell}$ generada pel procés creixent A, o sigui,

$$m((s,t) \times G) = E(1_G (A_t - A_s)), \; s \leq t, \; G \in \mathcal{F}^{\ell}.$$

LLavors en aquest cas es pot definir la integral estocàstica dels processos de l'espai $L^2 (R_+ \times \Omega, \mathcal{P}, m)$. La integral indefinida $Y_t = \int_0^t X_s \, dM_s$ és una martingala de L^2, contínua per la dreta, i tal que $Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{L^2} Y_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}^{\ell}, P)$.

El conjunt m_∞^2 de les martingales amb aquestes propietats és un espai de Hilbert amb el producte escalar $< M,N >= E(M_\infty \cdot N_\infty)$, i la integral estocàstica dóna lloc a una isometria:

$$L^2 (R_+ \times \Omega, \mathcal{P}, m) \to m_\infty^2$$
$$X \to \left(\int_0^t X_s \, d M_s\right)_{t \in R_+} .$$

Una exposició detallada d'aquesta teoria es troba en els treballs originals de P.A. Meyer i C. Dade ([9]) de M.Kunita - S. Watanabe ([11]) i també en articles més recents ([13]), ([14]). Citarem tot seguit alguns dels seus aspectes bàsics, que estudien l'extensió a la integral respecte martingales dels resultats que es coneixen en el cas del brownià.

1. Determinar condicions per tal que un procés de $L^2(R_+ \times \Omega, \mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{F}^{\ell}, m)$ sigui integrable, és a dir, sigui mesurable respecte la tribu completada $\overline{\mathcal{P}}$. En concret, es sap que si la mesura m és absolutament contínua respecte $\lambda \times P$, llavors tots els processos adaptats són integrables. Una extensió d'aquest resultat quan el procés creixent associat a m és continu es troba en ([16]).

2. Es defineix un temps d'atur o instant aleatori com una aplicació $T: \Omega \to R_+$ que compleix $\{\omega | T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t^{\ell}$, per tot $t \in R_+$. Aleshores es diu que un procés $M= (M_t)_{t \in R_+}$ és una martingala local de L^2 si existeix una

successió creixent $(T_n)_{n \in N}$ de temps d'atur tal que

a) $\lim T_n(\omega) = \infty$ per tot $\omega \in \Omega$.

b) Per cada $n \in N$, la localització del procés M pel temps d'atur T_n, definida com el procés $(M_{T_n(\omega) \wedge t}(\omega))_{t \in R_+}$, és una martingala de L^2.

La integració estocàstica s'estén a les martingales locals utilitzant la convergència en probabilitat. L'interès del concepte de martingala local prové de que si M és una martingala contínua, llavors $(\varphi(M_t))_{t \in R_+}$ és una martingala local de L^2 per qualsevol funció contínua φ.

3. La fórmula de diferenciació d'Itô es generalitza al cas d'una martingala local de L^2 contínua M amb procés creixent associat A, i d'un procés V amb trajectòries contínues de variació total afitada en tot interval finit:

$$f(M_t,V_t) = f(M_o,V_o) + \int_o^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s,V_s)dM_s + \int_o^t (\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_s,V_s)dA_s +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial s}(M_s,V_s)\,dV_s).$$

Una versió d'aquesta fórmula en el cas discontinu es pot trobar en els treballs ([9],[11]).

4. Tota martingala Y de $\mathcal{M}^2_\infty$ admet una única descomposició ortogonal $Y = \int X dM + N$, on X és un procés integrable respecte M, o sigui, $X \in L^2(R_+ \times \Omega, \mathcal{P}, m)$ i N és una martingala de $\mathcal{M}^2_\infty$ tal que el producte $N.\int X\, d\, M$ és martingala. Observem que en el cas del brownià, N és constant.

5. Integració estocàstica i mesures vectorials.-

La integral estocàstica dels indicadors dels conjunts del semianell $\mathcal{R}$,

$$\int_o^\infty 1_{(r,s]\times F}\, dM = 1_F (M_s - M_r),$$

es pot considerar com una mesura μ a valors en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que s'estén additivament a l'anell $\mathcal{A}$ generat per $\mathcal{R}$.

Llavors a partir de la relació

$$\| \mu((r,s]\times F)\|^2 = E(1_F(M_s - M_r)^2) = m((r,s]\times F),$$

es demostra que μ es pot estendre a una mesura vectorial σ-additiva sobre la tribu $\mathcal{P}$, i que la integral d'un procés X de $L^2(R_+ \times \Omega, \mathcal{P}, m)$ respecte μ en el sentit de la teoria de la integració de Bartle ([17]) coincideix amb la integral estocàstica del procés X respecte la martingala M:

$$\int_{R_+ \times \Omega} X \, d\mu = \int_0^\infty X_t \, dM_t \ .$$

Aquest resultat es degut originalment a M.Pellaumail ([18]) i ha sigut desenvolupat en treballs posteriors ([19],[20]), on s'estudien les integrals respecte "mesures estocàstiques vectorials" a valors en $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definides com funcions additives $\mu: R \to L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tals que

$$\mu((r,s]\times F) = 1_F \cdot \mu((r,s]\times \Omega), \text{ si } s \leq t \text{ i } F \in \mathcal{F}_s \ .$$

Encara que l'utilització explícita de mesures vectorials no és necessària per a construir les integrals estocàstiques, la teoria de l'integració vectorial permet clarificar els conceptes i donar demostracions directes de propietats com l'existència i unicitat de les integrals estocàstiques.

6. Integració de processos a valors vectorials .-

Considerem un fenomen que a cada instant està descrit per una funció $X_t(x)$ definida en un obert A de R^n. Suposem que l'evolució del fenomen segueix una equació diferencial amb derivades parcials.

$$\frac{\partial X_t(x)}{\partial t} = \Delta\,(X_t(x)) + \sigma(X_t(x))\,\frac{\partial W_t}{\partial t} \quad ,$$

on Δ és un operador diferencial i $W_t(x))$ és una perturbació aleatòria del tipus "soroll blanc" distribuïda en l'espai i en el temps.

Una manera de donar sentit a aquestes equacions consisteix en considerar X com un procés estocastic $(X_t)_{t\in R_+}$ a valors en un espai de funcions, per exemple $L^2(A)$. Això implica la necessitat d'introduir processos de moviment brownià a valors en espais de Hilbert i de construir una teoria de la integral estocàstica de processos a valors en aquests espais.

Si fixem dos espais de Hilbert H i G i considerem l'espai L(H,G) de les aplicacions lineals contínues de H en G, la integral d'un procés X a valors en L(H,G) respecte una martingala M a valors en H va ésser introduida per H.Kunita ([10]).
En el cas d'espais de dimensió finita es podria definir simplement en coordenadas per $Y_i = \sum_j X_{i,j}\, dM_j$.

En el cas que el procés X i la martingala M prenguin valors en espais de Hilbert H_1, H_2, es poden construir integrals estocàstiques $\int X\, d M$ a valors en un producte tensorial $H_1 \otimes H_2$ definit de forma convenient.

Aquestes teories han servit de base per l'estudi de les equacions diferencials amb derivades parcials estocàstiques, i han estat desenvolupades en ([10],[14],[15]).

7. Integració estocàstica de processos amb dos parametres.-

Una manera diferent de formalitzar l'equació d'evolució considerada en l'apartat anterior consisteix en considerar X(t,x) com una funció aleatòria que depen de més d'un paràmetre. Això ha portat a desenvolupar l'estudi del soroll blanc i de les integrals estocàstiques en el cas de funcions aleatòries amb més d'un paràmetre.

Un cas particular d'aquesta teoria és el de les integrals estocàstiques en el pla, o sigui quan el conjunt de paràmetres és el quadrant positiu R^2_+, que s'ha desenvolupat recentment en els treballs de E. Wong i M. Zakai ([21]) i R.Cairoli i J.B.Walsh ([22]).

La situació inicial consisteix en prendre la mesura Gaussiana independent W en el quadrant R^2_+, de manera que per tot borelià B, la variable W(B) té llei normal amb mitja zero i variança la mesura de Lebesgue de B. LLavors es defineix la funció aleatòria browniana amb dos paràmetres $W=(W_z)_{z\in R^2_+}$ per $W_z=W(R_z)$, on R_z es l'interval

$[o,z]$. S'introdueix la familia creixent de tribus $(\mathcal{F}_z)_{z \in R^2_+}$ generada per W, o sigui, $\mathcal{F}_z$ és la tribu engendrada per les variables $X_\zeta, \zeta < z$, on la relació d'ordre que es considera és l'ordre parcial natural de R^2_+. Amb aquests elements es pot definir immediatament la integral estocàstica $\int_{R_z} X_\zeta \, dW_\zeta$ dels processos adaptats de l'espai $L^2(R^2_+ \times \Omega, \mathcal{B}(R^2_+) \otimes \mathcal{F}, \lambda \times P)$ on λ és la mesura de Lebesgue en R^2_+.

Indicarem finalment els diferents problemes que s'han tractat en el marc d'aquesta teoria:

1. Definició d'integrals de línia sobre corbes suficientment regulars de R^2_+ i estudi dels processos holomorfs que s'introdueixen per la condició de donar integral zero sobre tota corba tancada. Aquests processos tenen una estructura que en certs aspectes recorda la de les funcions holomorfes de variable complexa. Per exemple, tenen derivada holomorfa i es poden desenvolupar en sèrie.

2. Elaboració d'un calcul diferencial estocàstic, que ha necessitat la introducció d'integrals estocàstiques dobles en el sentit de les integrals múltiples d'Itô ([23]), com es pot comprovar amb un exemple senzill:

$$W_z^2 = 2 \int_{R_z} W_\zeta \, dW_\zeta + \iint_{R_z \times R_z} dW_\zeta \, dW_{\zeta'} + x \cdot y, \text{ per tot } z=(x,y) \in R^2_+ .$$

Contribucions a aquest tema es troben en ([24], [25]).

3. Estudi de les martingales amb dos paràmetres, o sigui de processos $M=(M_z)_{z \in R^2_+}$ tals que $E(M_z | \mathcal{F}_{z'}) = M_{z'}$, per tot $z' < z$. Si la familia de tribus esta generada pel brownià, E.Wong i M.Zakai ([21]) van demostrar que tota martingala de L^2 es pot escriure com a suma de dos integrals estocàstiques:

$$M_z = \int_{R_z} X_\zeta \, d W_\zeta + \iint_{R_z \times R_z} Y_{(\zeta,\zeta')} \, dW_\zeta \, dW_{\zeta'} , \text{ per tot } z \in R^2_+ .$$

En aquest cas les integrals indefinides respecte el brownià,

$(\int_{R_z} X_\zeta \, dW_\zeta)_{z \in R_+^2}$ són un tipus especial de martingales que s'anomenen martingales fortes.

En el cas d'una familia creixent de tribus qualsevol s'ha profunditzat en algunes questions com l'existencia de versions contínues per la dreta o la integració estocàstica respecte M ([22]), pero aquesta teoria es troba encara en un estudi inicial. Una de les principals dificultats és la de tenir que utilitzar el concepte de regió aleatòria en el pla com extensió dels temps d'atur ordinaris.

BIBLIOGRAFIA

(1) BILLINGSLEY,P. "Convergence of probability measures". John Wiley,New York, (1968).

(2) LANGEVIN,P. "Sur la théorie du mouvement Brownien".C.R.Acad.Sci,Paris,146, pp.530-533,(1908).

(3) ITÔ,K. " Stochastic integral". Proc.Imperial Acad.Tokyo,20,pp.519-524,(1944).

(4) ITÔ,K. "On stochastic differential equations". Mem.Am.Math.Soc.,n°4,New York, (1951).

(5) ITÔ,K. " On a stochastic integral equation". Proc.Japan.Acad.,22,pp.32-35, (1946).

(6) WIENER,N. "Differential space".J.Math. and Phys.,2,pp.132-174,(1923).

(7) BRETAGNOLLE,J.L. " Processus a accroissements indépendants". Ecole d'été de Probabilités,Lec.Not.in Math.,307,pp.1-26,(1973)

(8) DOLEANS,C. "Existence du processus croissant naturel associé à un potenciel de classe [D] ". Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitsth. 9,pp.309-314,(1968).

(9) DOLEANS-DADE,C.-MEYER,P.A. "Intégrals stochastiques par rapport aux martingales locales".Seminaire de Prob.IV,Lec.Not.in Math. 124,(77-107),(1970).

(10) KUNITA,H."Stochastic integrals based on martingales taking values in Hilbert spaces".Nagoya Math.J. 38,pp.41-52,(1970).

(11) KUNITA,H.-WATANABE,S." On square integrable martingales".Nagoya Math. J.,30 pp.209-245,(1967).

(12) PARTHASARATHY,K.R." Probability measures on metric spaces". Academic Press, (1967).

(13) MEYER,P.A." Un cours sur les intégrales stochastiques".Seminaire de Prob.X Lec.Not.in Math.,511,pp.245-400,(1976).

(14) METIVIER,M." Reelle und Vectorwertige Quasimartingale und die Theorie der Stochastichen Integration".Lec.Not.in Math.,607,(1977).

(15) M ETIVIER,M." Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach reflexif". Theory of Probability and its applications,19.pp.758-787,(1975).

(16) NUALART,D." Contribución al estudio de la integral estocástica". Stochastica,Vol.1,n°2,pp.21-34,(1976).

(17) BARTLE,R.G." A general bilinear vector integral". Studia Math.,15,pp.337-352,(1956).

(18) PELLAUMAIL,M.J." Un exemple d'intégrale d'une fonction réelle par rapport à une mesure vectorielle: l'intégrale stochastique". C.R.A.S. Paris,274,pp.1369-1372,(1972).

(19) KUSSMAUL,A.U." Stochastic integration and generalized martingales". Research Notes in Math.,Pitman Publ.,(1977).

(20) METIVIER,M." Mesure stochastique engendrée par une martingale à valeurs hilbertiennes". C.R.A.S. Paris,276,pp.939-941.(1973).

(21) WONG,E.-ZAKAI,M." Martingales and Stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter". Z.für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.Gebiete,29,pp.109-122,(1974).

(22) CAIROLI,R.-WALSH,J.B." Stochastic integrals in the plane". Acta Mathematica,134,pp.111-183,(1976).

(23) ITÔ,K." Multiple Wiener integral". J.Math.Soc.Japan,3,pp.157-169,(1951).

(24) SANZ,M." Càlcul diferencial estocàstic per a processos amb paràmetre n-dimensional". Tesi,Univesritat Politècnica de Barcelona, (1977).

(25) NUALART,D.-SANZ,M." Intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres". Ann.Scient. de l'Université de Clermont,Math. 14°fasc. n°61,(1976).

(26) Mc KEAN,H.P." Stochastic integrals". Academic Press,(1969).

(27) ITÔ,K." Lectures on Stochastic Processes". Tata Institute for fundamental research, Bombay, (1961).