Pub. Mat. UAB
nº 11, març 1979

# ESPACIOS DE SUCESIONES

por
Manuel Tort

Se llama espacio de sucesiones a todo subespacio vectorial del espacio $\omega$ de todas las sucesiones de números reales o complejos. La teoría de los espacios de sucesiones fue desarrollada principalmente por Köthe y Toeplitz [12] en 1934 y posteriormente por Köthe [9] y [10] , si bien se encuentran precedentes en trabajos anteriores. Su desarrollo está ligado, al principio, al de las teorías de los espacios de Hilbert y de los espacios normados. Más adelante, el desarrollo de la teoría de los espacios localmente convexos supuso nuevos avances en el estudio de los espacios de sucesiones.

Exponemos, a continuación, algunas de las ideas y de los trabajos que llevaron a la consideración de los espacios de sucesiones, a la definición y estudio de los espacios normados y, en general, de los espacios vectoriales topológicos.

En el estudio de las ecuaciones integrales lineales del tipo

$$u(x) + \int_a^b K(x,y)\, u(y)\, dy = f(x)$$

para la función incógnita u, en 1903, I. Fredholm consideró la analogía entre éstas y los sistemas lineales

$$\sum_{q=1}^{n} \left(\delta_{p,q} + \frac{1}{n}\, a_{p,q}\right) x_q = b_p \qquad (1 \le p \le n)$$

para obtener la solución de la ecuación integral como cociente de dos expresiones, siguiendo el método de Cramer. Esta idea se basa en el método de los coeficientes indeterminados, consistente en hallar una función incógnita, que se supone desarrollable en serie

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ (donde las $\varphi_n$ son funciones conocidas), calculando los coeficientes $c_n$. Este método había llevado a la consideración de sistemas lineales con infinitas incógnitas

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots$$

En 1906, Hilbert, utilizando el método de los coeficientes indeterminados, muestra que la solución de la ecuación integral

$$u(x) + \int_a^b K(x,y)\, u(y)\, dy = f(x)$$

es equivalente a la del sistema de infinitas ecuaciones lineales

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} k_{p,q}\, x_q = b_p \quad , \quad p = 1, 2, \dots ,$$

donde las incógnitas son los coeficientes de Fourier

$$x_p = \int_a^b u(t)\, \omega_p(t)\, dt$$

de la función incógnita $u$ respecto a un sistema ortonormal completo $(\omega_n)$
(con $b_p = \int_a^b f(t)\, \omega_p(t)\, dt$ y $k_{p,q} = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, \omega_p(s)\, \omega_q(t)\, ds\, dt$ ).
Las soluciones que considera son aquellas para las cuales $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$.
Es en estos trabajos donde aparece la idea del espacio de las sucesiones de cuadrado sumable, si bien no se ha introducido explícitamente. Este espacio se presenta como un paso al límite a partir de los espacios euclídeos de dimensión finita. Hilbert introduce en este espacio dos tipos de convergencia que son los que se han llamado posteriormente convergencia débil y convergencia fuerte.

En 1908, F. Riesz introduce los espacios $L^p(I)$ de las funciones de potencia p-ésima integrable $(1 < p < +\infty)$, estudio al que le sigue, tres años más tarde, un trabajo análogo donde se introducen los espacios $L^p(N)$ de las sucesiones de potencia p-ésima sumable y se estudia la dualidad entre estos espacios. Sobre esta cuestión cabe citar un resultado previo demostrado por Landau en 1907 que establece que la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n$, para toda sucesión $(x_n) \in L^p(N)$, implica que la sucesión $(u_n)$ pertenece a $L^q(N)$ (con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

La definición general de los espacios normados fue dada por S. Banach, H. Hahn y E. Helly, aunque éste último considera sólamente espacios de sucesiones de números reales o complejos.

En 1921, Helly introduce una noción de norma en los espacios de sucesiones que generaliza el funcional de Minkowski de un cuerpo convexo en los espacios de dimensión finita. Si $E$ es un espacio de sucesiones dotado de una norma, establece una dualidad entre $E$ y el espacio $E'$ formado por las sucesiones $u = (u_n)$ tales que, para toda $x = (x_n) \in E$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n$ sea convergente. Define una norma en $E'$ por $\|u\| = \sup_{x \neq 0} |\langle u,x\rangle| / \|x\|$. A partir de estos conceptos, la resolución de un sistema en $E$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j = b_i \;, \qquad i = 1, 2, \ldots ,$$

donde los $u_i = (a_{ij}) \in E'$, se reduce a resolver las siguientes cuestiones: 1) Hallar una forma lineal continua $L$ sobre $E'$ tal que, para todo $i \in N$, se verifique $L(u_i) = b_i$. 2) Determinar si existe algún $x \in E$ tal que, para todo $u \in E'$, se cumpla $L(u) = \langle u,x\rangle$. Para este último problema no siempre existe solución, como observa Helly, aun cuando $L$ exista, y se limita a dar condiciones suficientes en casos particulares.

En 1927, el procedimiento de Minkowski-Helly es utilizado por H. Hahn en un espacio normado cualquiera para definir en el dual una estructura de espacio normado completo. Estos resultados son obtenidos dos años más tarde, de un modo independiente, por S. Banach. Estos resultados preparan la definición de los espacios localmente convexos, dada por J. von Neumann en 1935.

Finalmente cabe destacar la teoría de los espacios de sucesiones iniciada por Köthe y Toeplitz en 1934 y desarrollada en años sucesivos por Köthe. Esta ha utilizado para su desarrollo los avangoo en la teoría de los espacios localmente convexos y ha servido como modelo a ésta última proporcionando diversos contraejemplos.

Exponemos, a continuación, las definiciones y principales resultados de esta teoría (Köthe [11] § 30).

Si $M$ es un conjunto de sucesiones, el conjunto formado por todas las $y = (y_n) \in \omega$, con $|y_n| \leq |x_n|$, para alguna $x = (x_n) \in M$, se llama la envoltura normal de $M$. Un conjunto de sucesiones se llama normal o sólido si coincide con su envoltura normal.

Se representa por $\varphi$ el espacio de sucesiones formado por las que tienen únicamente un número finito de términos distintos de cero. Para cada $n \in N$, se representa por $e^n$ la sucesión $(x_k)$, donde $x_k = 1$ si $k = n$ y $x_k = 0$ si $k \neq n$. Las sucesiones $e^n$ forman base del espacio $\varphi$. Sea $x = (x_n)$ un elemento de $\omega$. Para cada $m \in N$ se define $x^m = (x^m_n)$ por $x^m_n = x_n$ si $n \leq m$ y $x^m_n = 0$ si $n > m$. Las sucesiones $x^m$ se llaman las secciones de $x$ y pertenecen al espacio $\varphi$.

A cada espacio de sucesiones $\lambda$ se le asigna otro, $\lambda^\alpha$ su $\alpha$-dual, formado por todas las sucesiones $u = (u_n)$ tales que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n$$

sea absolutamente convergente, para toda $x = (x_n) \in \lambda$.

$\lambda^x$ es un espacio de sucesiones normal que contiene $\varphi$. Un espacio de sucesiones se llama perfecto o de Köthe si $\lambda = \lambda^{xx}$. Si $\lambda$ es un espacio de sucesiones, $\lambda^{xx}$ es el mínimo espacio perfecto que contiene $\lambda$. Un espacio perfecto es normal y contiene $\varphi$.

Los espacios $\varphi$ y $\omega$ son perfectos y $\alpha$-duales el uno del otro. Los espacios $1^1$ (espacio de las sucesiones $(x_n)$ tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente) y $1^\infty$ (espacio de las sucesiones acotadas) son perfectos y $\alpha$-duales el uno del otro. Para todo número real $p > 1$, los espacios $1^p$ (espacio de las sucesiones tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ es convergente) son perfectos y se tiene

$$(l^p)^\times = l^q \quad , \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Si $\lambda$ es un espacio de sucesiones que contiene $\varphi$, $\lambda$ y su $\alpha$-dual $\lambda^\times$ forman sistema dual con la forma bilineal

$$\langle u, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n$$

para $u = (u_n) \in \lambda^\times$ y $x = (x_n) \in \lambda$. Las topologías débil, de Mackey y fuerte en un espacio $\lambda$ que contenga $\varphi$ se considerarán siempre relativas al sistema dual $(\lambda, \lambda^\times)$.

Una sucesión $(x_n)$ se llama positiva si $x_n \geq 0$, para todo $n \in N$. Si $u = (u_n) \in \omega$, se representa por $\lambda_u$ el $\alpha$-dual de la envoltura lineal de u. Si $\lambda$ es un espacio perfecto, $\lambda$ admite la representación

$$\lambda = \bigcap_{\substack{u \in \lambda^\times \\ u \geq 0}} \lambda_u \quad ,$$

para los elementos $u = (u_n)$ positivos de $\lambda^\times$.

En el conjunto de las sucesiones positivas se define la relación de orden: $a \leq b$ si $b - a$ es positiva. Si $a \leq b$, se tiene $\lambda_a \supset \lambda_b$. El espacio $\lambda$ es isomorfo al límite proyectivo de los espacios $\lambda_u$, para los elementos positivos de $\lambda^\times$, con las aplicaciones inclusión entre estos espacios.

Sea $\lambda$ un espacio de sucesiones que contiene $\varphi$. La topología definida por el sistema de seminormas

$$p_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n|$$

para $u = (u_n) \in \lambda^\times$, se llama la topología normal en $\lambda$. La topología normal es la de la convergencia uniforme sobre las envolturas normales de los elementos de $\lambda^\times$. Puesto que estos conjuntos son absolutamente convexos y débilmente compactos, la topología normal es compatible con el sistema dual $(\lambda, \lambda^\times)$.

En el espacio $l^1$ coincide la topología normal con la definida por la norma $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Los espacios $\lambda_u$ son de Fréchet con la topología normal.

Sea $\lambda$ un espacio perfecto. $\lambda$ con la topología normal es topológicamente isomorfo al límite proyectivo de los espacios $\lambda_u$, dotados de la topología normal, para los elementos positivos de $\lambda^x$, con las aplicaciones inclusión entre estos espacios. Por lo tanto es topológicamente isomorfo a un límite proyectivo de espacios de Fréchet. De esta representación de los espacios perfectos se deduce una caracterización topológica de estos espacios: un espacio de sucesiones que contiene $\varphi$ es perfecto si y sólo si es débilmente completo por sucesiones y si y sólo si es completo con la topología normal.

En un espacio que contenga $\varphi$ las secciones de una sucesión convergen hacia ella por la topología débil y por la normal. Si además el espacio es normal, las secciones convergen por la topología de Mackey. Un espacio perfecto es tonelado con la topología de Mackey si y sólo si las secciones de una sucesión convergen por la topología fuerte.

Un resultado interesante relativo a los subconjuntos compactos de los espacios perfectos establece que en un espacio perfecto con una topología más fina que la débil coinciden los conjuntos compactos, los numerablemente compactos y los compactos por sucesiones. En un espacio perfecto coinciden los conjuntos débilmente compactos con los compactos para la topología normal y las sucesiones débilmente convergentes con las convergentes para la topología normal.

Si $\lambda$ es un espacio perfecto, la topología de Mackey en $\lambda^x$ es la polar de la normal en $\lambda$ (topología de la convergencia precompacta) y la polar de la de Mackey en $\lambda^x$ es la topología en $\lambda$ localmente convexa más fina que tiene los mismos conjuntos compactos y las mismas sucesiones convergentes que la débil. Es compatible con el sistema dual $(\lambda, \lambda^x)$.

Consideraremos, a continuación, una cierta clase de espacios perfectos: los espacios escalonados y co-escalonados. Estos espacios fueron introducidos por Köthe [9] en 1948. Se establece un método constructivo de espacios perfectos a partir de una sucesión de sucesiones. Los espacios escalonados son espacios de Fréchet con la topología normal.

Dada una sucesión de sucesiones positivas $a^k$, tal que $a^1 \leq a^2 \leq \ldots \leq a^k \leq \ldots$, se dice que $a^k$ es un sistema creciente de escalones, el cual se llama completo si para cada $n \in N$ existe un $k \in N$ tal que $a^k_n \neq 0$.

Dado un sistema creciente y completo de escalones $a^k$, los espacios

$$\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} \lambda_{a^k} \qquad \text{y} \qquad \mu = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_{a^k})^{\times}$$

se llaman los espacios escalonado y co-escalonado, respectivamente, correspondientes al sistema de escalones $a^k$. Estos espacios son perfectos y $\alpha$-duales el uno del otro.

Más adelante, este concepto es generalizado por Dieudonné y Gomes [5], definiendo los espacios escalonados y co-escalonados de orden $p$ (donde $p$ es un número real mayor o igual que uno) de modo que para $p = 1$ se tienen los espacios definidos por Köthe.

Si $p$ es un número real mayor o igual que uno, se define el espacio $\lambda^p_u$ como el formado por las sucesiones $(x_n)$ tales que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n||x_n|^p$$

es convergente. El espacio $\lambda^p_u$ coincide con $\lambda_u$ en el caso $p = 1$.

A partir de los espacios $\lambda^p_u$, se definen los espacios escalonados y co-escalonados de orden $p$ de un modo análogo a la definición de los enteriores espacios.

Dado un sistema creciente y completo de escalones $a^k$ y un número real $p$ mayor o igual que uno, los espacios

$$\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} \lambda^p_{a^k} \qquad \text{y} \qquad \mu = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda^p_{a^k})^{\times}$$

se llaman los espacios escalonado y co-escalonado de orden $p$, respectivamente, correspondientes al sistema de escalones $a^k$. Estos espacios son perfectos y $\alpha$-duales el uno del otro. Para $p > 1$, el espacio escalonado de orden $p$ es un espacio de Fréchet reflexivo con la topología de Mackey.

Una nueva generalización fue establecida por Dubinsky [6] en 1967, caracterizando los espacios perfectos que son de Fréchet con la topología fuerte.

Se llama escalón a todo espacio perfecto $\lambda$ tal que $l^1 \subset \lambda \subset l^\infty$ y sea de Banach con la topología fuerte. Sea $(\lambda_k)$ una sucesión de escalones y $(a^k)$ una sucesión de sucesiones tales que

1) $0 < a_i^k < a_i^{k+1}$, para todo $i,k \in N$,

2) $1/a^{k+1}\, \lambda_{k+1} \subset 1/a^k\, \lambda_k$, para todo $k \in N$. Los espacios

$$\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \lambda_k \qquad \text{y} \qquad \mu = \bigcup_{k=1}^{\infty} a^k \lambda_k^{\times}$$

se llaman los espacios escalonado y co-escalonado, respectivamente, sobre el sistema de escalones $(a^k, \lambda_k)$. Estos espacios son perfectos y $\alpha$-duales el uno del otro. El espacio escalonado es de Fréchet con la topología fuerte. A partir de éstos se caracterizan todos los espacios perfectos que son de Fréchet con la topología fuerte, si bien estos últimos no coinciden con los espacios escalonados. No obstante, como señala Dubinsky en su trabajo, Y. Komura ha observado que si se debilita la hipótesis sobre el sistema de escalones, suponiendo $0 \leq a_i^k \leq a_i^{k+1}$, la construcción sigue siendo válida y los espacios escalonados obtenidos de este modo coinciden con los espacios perfectos que son de Fréchet con la topología fuerte.

La teoría de los espacios de sucesiones ha servido como modelo a la teoría de los espacios vectoriales topológicos y se ha utilizado para dar contraejemplos en esta teoría. Citaremos, a continuación, algunos de ellos.

Mediante un espacio escalonado se da un ejemplo de un espacio que es de Fréchet y de Montel en el que existe un cociente que no es espacio de Montel. Al mismo tiempo, este ejemplo demuestra que un cociente de un espacio de Fréchet reflexivo no es necesariamente reflexivo. El $\alpha$-dual de este espacio, con la topología fuerte, proporciona un ejemplo de un espacio DF en el que existe un subespacio cerrado que no es DF. También, mediante un espacio escalonado, se da un ejemplo de un espacio de Fréchet no distinguido (Köthe [9] y Grothendieck [7]). Este último ejemplo fue utilizado más tarde por Anemiya [1] para dar un ejemplo de un espacio DF bornológico cuyo bidual fuerte no es bornológico.

En 1963, T. e Y. Komura [8], utilizando la hipótesis del continuo, contestan negativamente a dos cuestiones propuestas por Köthe y por Dieudonné. Köthe se preguntaba si todo espacio perfecto tonelado era bornológico y Dieudonné si el completado de un espacio bornológico era bornológico. A partir de un espacio de Köthe $\lambda$, definen el espacio $\lambda_o$ como la adherencia de $\varphi$ con la topología bornológica asociada a la fuerte. $\lambda_o$ es un espacio de sucesiones bornológico con la topología inducida por la fuerte en $\lambda$. Dan un ejemplo de un espacio perfecto $\lambda$ que con la topología fuerte es tonelado y no bornológico. Este espacio es el completado del espacio bornológico $\lambda_o$, con lo que quedan cerradas las dos cuestiones.

La teoría de Köthe sobre los espacios de sucesiones ha sido generalizada en varios sentidos: a espacios vectoriales con un álgebra de Boole de proyecciones por Cooper [3], a espacios de sucesiones con valores en un espacio localmente convexo por Pietsch [14], a espacios de funciones localmente integrables por Dieudonné [4] y, en el caso real, a espacios parcialmente ordenados por Luxemburg y Zaanen [13]. También se han considerado otros tipos de dualidad, como la $\beta$-dualidad. Si $\lambda$ es un espacio de sucesiones se define $\lambda^\beta$, su $\beta$-dual, como el espacio de las sucesiones $(u_n) \in \omega$ tales que, para toda $(x_n) \in \lambda$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n$ sea convergente. El $\beta$-dual de un espacio contiene el $\alpha$-dual y si el espacio es normal ambos duales coinciden. Un espacio de sucesiones $\lambda$, que contiene $\varphi$, y su $\beta$-dual forman sistema dual con la forma bilineal $\langle u,x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n$, para $u = (u_n) \in \lambda^{\beta}$ y $x = (x_n) \in \lambda$.

Describiremos brevemente la generalización de Dieudonné a espacios de funciones localmente integrables. Los espacios de sucesiones se presentan al considerar N con la topología y la medida discretas.

Sea E un espacio topológico localmente compacto numerable al infinito con una medida de Radon positiva. Se representa por $\Omega$ el espacio de las clases de funciones localmente integrables en E. Si $\Gamma$ es una parte de $\Omega$, el conjunto $\Lambda$ formado por las funciones $f \in \Omega$ tales que, para toda $g \in \Gamma$, fg sea integrable es un subespacio vectorial de $\Omega$; se dice que $\Lambda$ es un espacio de Köthe y $\Gamma$ un conjunto de definición de $\Lambda$. Se define $\Lambda^{\times}$ como el espacio de Köthe definido sobre $\Lambda$. $\Lambda$ y $\Lambda^{\times}$ contienen el espacio $\Phi$ (espacio de las clases de funciones medibles y acotadas con soporte compacto) y forman sistema dual con la forma bilineal

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Omega} fg \, d\mu$$

Se estudian topologías relativas a esta dualidad y se generalizan resultados establecidos para espacios de sucesiones.

<u>BIBLIOGRAFIA</u>

[1] ANEMIYA, I. "Some examples of (F)- and (DF)-spaces" Proc. Japan Acad.33, 169-171 (1957).

[2] BOURBAKI, N. "Elementos de historia de las matemáticas" Alianza Editorial (1972).

[3] COOPER, J.L.B. "Coordinated linear spaces", Proc. London Math.

Soc., III. ser. 3, 305-327 (1953).

[4] DIEUDONNE, J. "Sur les espaces de Köthe". J. Analyse Math. 1, 81-115 (1951).

[5] DIEUDONNE, J. y GOMES, A.P. "Sur certains espaces vectoriels topologiques". C.R. Acad. Sci. Paris 230, 1129-1130 (1950).

[6] DUBINSKY, E. "Perfect Fréchet spaces". Math. Ann. 174, 186-194 (1967).

[7] GROTHENDIECK, A. "Sur les espaces (F) et (DF)". Summa Brasil. Math. 3, 57-123 (1954).

[8] KOMURA, T. e Y. "Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations". J. Math. Soc. Japan 15, 319-338 (1963).

[9] KÖTHE, G. "Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume". Math. Z. 51, 317-345 (1948).

[10] KÖTHE, G. "Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume". Math. Nachr. 4, 70-80 (1951).

[11] KÖTHE, G. "Topological vector spaces I". Die Grundlheren der Mathematischen Wissenschaften B.159 Springer-Verlag (1969).

[12] KÖTHE, G. y TOEPLITZ, O. "Lineare Räume mit unendlichen vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen". J. reine angew. Math. 171, 193-226 (1934).

[13] LUXEMBURG, W.A.J. y ZAANEN, A.C. "Notes on Banach function spaces". VIII-XIII. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 26, 104-119, 360-376, 493-543 (1964).

[14] PIETSCH, A. "Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume". Schriftenreihe d. Institute d. Math. Deutsche Akad. Wiss. Helft 12, Akademie-Verlag Berlin (1962).