Pub. Mat. UAB
nº 11, març 1979

Descripció d'alguns resultats recents sobre el teorema del límit central en espais de Banach separables.[1]

per
Evarist Giné
Universitat Autònoma de Barcelona

Un procés estocàstic és una variable aleatòria que pren valors en un espai de funcions, i alguns espais de funcions típics són espais de Banach. Per tant, una manera de fer teoria de processos estocàstics és fer teoria de probabilitats en espais de Banach.

La meva motivació per a treballar en aquest camp va ser la següent. Sigui $\{X_i\}$ una successió de v.a.'s i. i.d. sobre un compacte mètric S, i $\nu_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i(\omega)}$ la distribució empírica n-èsima. Hom sap que $\nu_n(\omega) \to_{w^*} \mathcal{L}(X_1)$ gairebé per a tot $\omega \in \Omega$. Un test de la hipòtesi $\mathcal{L}(X_1) = \mu$ pot consistir en rebutjar aquesta hipòtesi si $d(\mu, \nu_n(\omega))$ és massa gran, on d és alguna distància definida sobre $\mathcal{P}(S)$, l'espai de les probabilitats sobre S. Per exemple $d(\mu,\nu) = \sup_{f\in\mathcal{F}} \left|\int f \, d(\mu-\nu)\right|$, $\mathcal{F}$ un subconjunt compacte de $C(S)$. Per a poder determinar el test a un nivell de confiança aproximat caldria conèixer la distribució límit de $d(\mu,\nu_n)$ normalitzada com calgui. Degut al t.l.c. en dimensió 1, hi ha possibilitat que $\{\mathcal{L}[\sqrt{n}\, d(\mu,\nu_n(\omega))]\}$ convergeixi feblement a una llei ρ. (Si així fos podríem calcular $P_{\mathcal{L}(X)=\mu}\{d(\mu,\nu_n(\omega)) > a_n\} \simeq \alpha$ com a $\rho\{\|x\| > a_n \sqrt{n}\} = \alpha$).

---

(1) Conferència donada a la Universitat de Barcelona el 17 de novembre del 1977.

Perquè tal convergència tingués lloc, n'hi hauria prou amb que les variables aleatòries amb valor a C(S).

$$Y_i(f) = \int f \, d(\delta_{X_i(\omega)} - \mu)$$

satisfessin el t.l.c., és a dir que

$$\{\mathcal{L}(\Sigma_{i=1}^{n} \; Y_i / n^{1/2})\}$$

convergís feblement. Vegi's Dudley & Strassen (1969) per a aquesta motivació i exemples, i Giné (1975) per exemples addicionals).

Problema: Què i com, de la Teoria Clàssica de Probabilitats sobre $\mathbb{R}$ s'estén a espais de Banach? Quines són les dificultats addicionals si n'hi ha ?.

Els tres principals teoremes de límit són la llei forta dels grans nombres, la llei del logaritme iterat i, sobretot, el teorema del límit central. Hi ha treball d'extensió fet sobre els tres temes sobretot en el cas de variables independents. Jo revisaré treball sobre l'últim tema.

El mètode tradicional a la recta és l'anàlisi de Fourier, i també hi ha mètodes probabilístics més directes. El mètode d'anàlisi de Fourier només s'estèn perfectament per a grups localment compactes i per a espais de Hilbert. Varadhan (1962) va resoldre el problema general del t.l.c. en espais de Hilbert fent servir anàlisi de Fourier. Giné i León (1977) tenen una exposició (amb resultats formalment nous) emprant mètodes probabilístics més directes i senzills. En la seva versió més senzilla, el t.l.c. diria:

(*) $EX = 0$, $E\|X\|^2 < \infty \Rightarrow \{\mathcal{L}(\Sigma_{i=1}^{n} X_i/n^{1/2})\}$ convergeix feblement a una llei gaussiana centrada, on les X_i són

Aleshores és natural preguntar-se que per a quins espais de Banach B és (*) cert. Hoffmann-Jorgensen i G. Pisier (1976) demostraren: (*) és cert $\Leftrightarrow$ B és de tipus 2.

B és de tipus 2 si la seva norma satisfà una desigualtat de paralel.logram, concretament: $\forall \{x_i\}_{i=1}^n$, $x_i \in B$, $\forall n \in N$, i per a un $C > 0$ fixe,

$$(**) \qquad \Sigma_{(\tau_i) \subset \{-1, 1\}^n} \| \Sigma_{i=1}^n \tau_i x_i \|^2 \leq 2^n C \Sigma_{i=1}^n \| x_i \|^2,$$

que és una propietat purament geomètrica. I a més a més, (*) inversa es verifica si i només si l'espai és de cotipus 2 (i.e., la desigualtat contrària de (**) es verifica) (Jain(1976)). Araujo i Giné (1976)tenen altres caracteritzacions probabilístiques de tipus i cotipus 2 relacionades amb les propietats de les mesures que es poden exponenciar (per convolució), qüestió molt relacionada amb el t.l.c.

Per altra banda hi havia treball fet sobre el t.l.c. per a processos, bàsicament un teorema degut a Strassen i Dudley (1969), Giné (1974) i Jain i Marcus(1975) que diu el següent: si $X: \Omega \to C(S)$, S compacte mètric, satisfà $EX = 0$, $EX^2(s) < \infty$ per a algun $s \in S$, i

$$|X(s)-X(t)| \leq M(\omega)\ e(s,t) \qquad \omega \text{ c.s. }, \forall\, s,\ t \in S,$$

on $EM^2 < \infty$ i e és una pseudo-distància contínua tal que $\int_0 H^{1/2}(S,e,x)\, dx < \infty$, $H(S,e,x) = \log N(S,e,x)$, $N(S,e,x) = \inf\{ n : \exists V_i,\ i=1,\dots,n, \cup_{i=1}^n V_i = S,\ \mathrm{diam}_e V_i \leq x \}$, aleshores X satisfà el t.l.c.(i.e.$\forall X_i$ i.i.d. amb $\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{L}(X)$, $\{\mathcal{L}(\Sigma_{i=1}^n X_i/n^{1/2})\}$ convergeix feblement). Teorema molt natural si es té present el criteri de Prokhorof sobre compacitat feble de conjunts de probabilitats. Zinn (1977) demostrà que aquest teorema es pot deduïr del de Hoffmann-Jorgensen i Pisier (si aquest s'enuncia per a aplicacions de tipus dos) i de resultats sobre continuïtat de processos Gaus sians (Dudley(1973), Fernique (1974)). Aquest fet convenç de la valor dels mètodes més abstractes. Vegi's també Heinkel (1977).

Abans de continuar donaré la demostració més senzilla de la part directa del t. de Hoffman-Jorgensen i Pisier. Es un fet conegut (Prokhorof (1956)) que $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(B)$ es w^*-relativament compacte si i només si és ajustada, i.e. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K$ compacte tal que $\mu_n(K^c) < \varepsilon$ — bàsicament, en una direcció, Banach-Alaoglu + no deixar que s'escapi la massa. Degut a que K és compacte si i només si és totalment fitat i tancat, una condició de w^*-compacitat relativa és:

$\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(B)$ és w^*- r.c. si i només si $\{\mu_n \circ f^{-1}\}$ ho és per a un conjunt w^*- total de f's de B' i $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, F \subset B$ subespai de dimensió finita tal que $\mu_n\{d(x,F) > \varepsilon\} \leq \varepsilon$ (de Acosta (1971)).

Aleshores:

(i) B de tipus 2 $\Leftrightarrow\ \exists\, c > 0$ tal que $E\|\Sigma\, \varepsilon_i\, x_i\|^2 \leq \leq c\, \Sigma\, \|x_i\|^2$ $\forall$ col.lecció finita de $x_i \in B$, i on $\{\varepsilon_i\}$ és una successió de v.a's independents, tals que $P\{\varepsilon_i = 1\} = P\{\varepsilon_i = -1\} = \frac{1}{2}$, $\Leftrightarrow\ \exists\, c > 0$ tal que sempre que $E\|X_i\|^2 < \infty$, $EX_i = 0$, es té $E\|\Sigma\, X_i\|^2 \leq c\, \Sigma\, E\|X_i\|^2$;

(ii) Si B és de tipus 2 amb constant c i F és tancat, B/F és de tipus 2 amb la mateixa constant (trivial);

(iii) pel t.l.c. en dimensió 1, $\forall\, f \in B'$.

$$\{\mathcal{L}(\Sigma_{i=1}^n f(X_i)/n^{1/2})\}$$

convergeix a una llei de Gauss $N(0,\sigma^2(f))$ sobre $\mathbb{R}$; i si $F_m \uparrow$, $\overline{\cup F_m} = B$, $\dim F_m < \infty$, aleshores $P\{d(\Sigma_{i=1}^n X_i/n^{1/2}, F_m) > \varepsilon\} \leq \dfrac{Ed^2(\Sigma_{i=1}^n X_i/n^{1/2}, F_m)}{\varepsilon^2}$

$$\leq \frac{E\, d^2(X_1, F_m)}{\varepsilon^2} \to 0$$

on la primera desigualtat és la de Txebixef, la segona és de tipus 2 i el límit és possible per convergència dominada ($d^2(X_1, F_m) \leq \|X_1\|^2$; $E\|X_1\|^2 < \infty$). Aleshores $\{\mathcal{L}(\Sigma_{i=1}^n X_i/n^{1/2})\}$ és w^*-r.c.; com que les distribucions unidimensionals convergeixen pel t.l.c. en $\mathbb{R}$ i la transformada de Fourier determina les probabilitats, resulta que $\{\mathcal{L}(\Sigma_{i=1}^n X_i/n^{1/2})\}$ w^*-convergeix a una llei gaussiana.q.e.d.

Els resultats anteriors són els bàsics per al cas de convergència de $S_n/n^{1/2}$, és a dir cas de v.a.'s i.i.d. i de límits gaussians.

Però aquest només és un cas particular del t.l.c. i caldria veure el cas general de convergència a lleis infinitament divisibles i a lleis estables. Aquesta línia fou iniciada amb el treball fonamental de L. LeCam (1970) i molt avançada amb els treballs de de Acosta, Araujo i Giné (1977) i Araujo i Giné (1976,1977); Marcus i Woyczynski (1977) i Woyczynski (1977) tenen també bon treball sobre dominis d'atracció a lleis estables.

Mètodes bàsics: diferents condicions de w^*-r.c. de factors de convolució (Parthasarathy (1967)), resultats sobre sèries de v.a.'s independents en espais de Banach (Ito-Nisio (1968) i Hoffmann-Jorgensen (1974)), desigualtats de P. Lévy i de Kolmogorof inversa en espais de Banach (Kahane (1968), de Acosta-Samur (1977)), entre d'altres.

Entre els resultats obtinguts, són d'interés:

1) la formulació d'un t.l.c. general que inclou resultats en espais de tipus i cotipus 2 com a corol.laris;

2) clarificació de la definició de distribució de Pois

son i resultats bàsics sobre compacitat de famílies de distribucions de Poisson;

3) millora definitiva d'un resultat de LeCam(1970) sobre la relació entre compacitat de $\{\text{Pois}\ \Sigma\mathcal{L}(X_{nj})\}$ i $\{\mathcal{L}(S_n)\}$;

4) resultats sobre el t.l.c. en C(S) que van més enllà dels teoremes usuals esmentats;

5) resultats definitius sobre el capteniment asimptòtic de les distribucions estables i les distribucions sota llur domini d'atracció;

6) resultats sobre dominis d'atracció de lleis estables, segurament definitius;

7) caracterització dels espais de tipus p per condicions sobre dominis d'atracció de lleis estables;

8) caracterització de tipus 2 i cotipus 2 per condicions d'integrabilitat de mesures de Lévy.

Referències: 1-4: de Acosta, Araujo i Giné(1977): 5-6: Araujo i Giné(1977); 8: Araujo i Giné (1976); 7: Marcus i Woyczynski(1977) i Woyczynski (1977): aquests dos treballs també contenen resultats sobre 6. A continuació enunciem alguns dels resultats esmentats. Una forma simplificada del teorema a què (1) fa referència és:

<u>Teorema</u> 1. Sigui $\{ X_{nj}: j=1,\dots,k_n,\ n=1,\dots\}$ un sistema infinitessimal de v.a.'s amb valors en un espai de Banach B i $S_n = \Sigma_{j=1}^{n} X_{nj}$. Aleshores existeixen $x_n \in B$ tals que $\{\mathcal{L}(S_n - x_n)\}$ convergeix feblement si i només si

$$\text{(i)}\qquad \lim_{\delta\downarrow 0}\left\{\begin{matrix}\limsup\\ \liminf\end{matrix}\right\}_{n\to\infty} E[f(X_{nj}\chi_{(\|X_{nj}\|\le\delta)} - Ef(X_{nj}\chi_{(\|X_{nj}\|\le\delta)})]^2 = \phi(f,f) < \infty$$

per a tot $f \in B'$,

(ii) existeix una mesura σ-finita μ tal que per a tot $\delta>0$ satisfent $\mu\{\|x\|=\delta\}=0$,

$$\Sigma_{j=1}^{kn} \mathcal{L}(X_{nj}) | \{\|x\|>\delta\} \to_{w^*} \mu | \{\|x\|>\delta\}.$$

(iii) existeix una successió creixent F_m de subespais de dimensió finita de B i $\delta>0$ tals que

$$\lim_{m\to\infty} \sup_n E\, d^2[\Sigma_j (X_{nj}\chi_{\{\|X_{nj}\|\le\delta\}} - EX_{nj}\chi_{\{\|X_{nj}\|\le\delta\}}, F_m] = 0.$$

Aleshores la covariança ϕ determina una mesura Gaussiana $N(0,\phi)$, la mesura μ és de Lévy i si $a_{n\delta} = \Sigma_{j=1}^{n} EX_{nj}\chi_{\{\|X_{nj}\|\le\delta\}}$ on $\delta>0$ és tal que $\mu\{\|x\|=\delta\}=0$, es té que

$$\mathcal{L}(S_n - a_{n\delta}) \to_{w^*} N(0,\phi) * c_\delta \operatorname{Pois}\mu$$

on $c_\delta \operatorname{Pois}\mu$ és una mesura generalitzada de Poisson,

$$(**) \qquad (c_g \operatorname{Pois}\mu)\hat{}\,(f) = \exp\{\int (e^{if(x)} - 1 - i\chi_{\{\|x\|\le\delta\}}(x) f(x))\, d\mu(x)\}.$$

La potència 2 a la condició (iii) es pot substituir per qualsevol número positiu. El teorema 1 conté com a corol.lari la fórmula de Lévy-Khinxin per a lleis infinitament divisibles en espais de Banach. I també el t.l.c. directe més general en tipus 2 i l'invers més general en cotipus 2.

Els resultats sobre el punt (2) no els podem resumir tan fàcilment. Entre d'altres, són interessants els següents:

<u>Teorema 2</u>. Les següents condicions per a una mesura σ-finita

μ sobre B són equivalents:

(i) per a tota successió de mesures finites $\mu_n \uparrow \mu$ la successió de probabilitats $\{c_\delta \mathrm{Pois}\, \mu_n\}$ convergeix feblement per a tot $\delta>0$, on $c_\delta \mathrm{Pois}\, \mu_n =$

$$= e^{\mu_n - |\mu_n| \delta_0} * \delta_{-\int_{\|x\| \leq \delta} x d\mu_n(x)}$$

i l'exponencial es refereix a l'operació de convolució;

(ii) existeix una successió de mesures finites $\mu_n \uparrow \mu$ i alguna successió de centraments x_n tals que $\{\delta_{x_n} * \mathrm{Pois}\, \mu_n = \delta_{x_n} * e^{\mu_n - |\mu_n| \delta_0}\}$ és w^*-relativament compacte;

(iii) l'expressió (**) és la transformada de Fourier d'una probabilitat de Borel sobre B.

Si μ verifica una de les tres condicions equivalents del t.2, es diu que μ és de Lévy. A la recta, $\mathbb{R}^n$ i als espais de Hilbert, μ és de Lévy si i només si $\int \min(1, \|x\|^2) d\mu(x) < \infty$. El resultat esmentat al punt (8) diu exactament:

__Teorema 3__. B és de tipus 2 si i només si tota mesura que integra $\min(1, \|x\|^2)$ és de Lévy. B és de cotipus 2 si i només si tota mesura de Lévy integra $\min(1, \|x\|^2)$. B es hilbertitzable si i només si les mesures de Lévy són exactament les que integren $\min(1, \|x\|^2)$.

Sobre (3):

__Teorema 4__. Si $\{X_{nj} : j=1,\ldots,k_n,\ n=1,\ldots\}$ són independents per files i $\{\delta_{x_n} * \mathrm{Pois}\, \Sigma_j \mathcal{L}(X_{nj})\}$ és w^*-r.c. per a alguna família de centraments $\{x_n\}$, aleshores $\{\mathcal{L}(S_n - a_{n\,\delta})\}$ és w^*-r.c. per a tot $\delta>0$.

Sobre (2) i (4) :

Teorema 5. Si B_1, B_2 són espais de Banach i $\{\mu_\alpha\}$ una família de mesures σ-finites sobre B_1 tals que

(i) $\{\mu_\alpha | \|x\| > 1\}$ és una família w^*-r.c. de mesures finites.

(ii) $\sup_\alpha \int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 \, d\mu_\alpha(x) < \infty$,

i existeix un compacte convex simètric $K \subset B_2$ i una aplicació lineal $u: B_1 \to B_K$ de tipus 2 (B_K: el Banach generat per K), i si $i: B_K \to B_2$ és la inclusió natural, aleshores $\mu_\alpha \circ u^{-1} \circ i^{-1}$ és una mesura de Lévy de B_2 i $\{c_\delta \text{ Pois}(\mu_\alpha \circ u^{-1} \circ i^{-1})\}$ és w^*-r.c.

Aquest teorema té corol.laris per a C(S) que cobreixen i milloren el cas descrit a sobre. A les aplicacions, K és l'esfera unitat d'un espai de Lipschitz per a alguna distància e sobre S que sigui contínua. Cal dir també que aquest teorema es pot prendre com una generalització de la part directa del següent resultat que val a la recta: a la recta $\{c_\delta \text{Pois } \mu_\alpha\}$ és w^*-r.c. si i només si $\min(1,x^2) \, d\mu_\alpha(x)$ són finites i $\{\min(1,x^2) \, d\mu_\alpha(x)\}$ és una successió w^*-r.c. La part inversa admet la següent generalització:

Teorema 6. Si les μ_α són de Lévy i $\{c_\delta \text{Pois } \mu_\alpha\}$ és w^*-r.c. aleshores:

(i) $\{\mu_\alpha | \|x\| > 1\}$ és una família w^*-r.c. de mesures finites, i

(ii) les funcions $f \to \int_{\|x\| \leq 1} f^2 \, d\mu_\alpha$ definides sobre l'esfera unitat de B' són w^*-equicontínues.

El teorema 6 té un altre invers parcial per a espais de tipus 2, semblant al t. 4, que no donem, però que té com a corol.lari la part directa del següent teorema sobre dominis d'atracció:

<u>Teorema</u> <u>7</u>. Sigui ρ una llei estable d'ordre $\alpha \in (0, 2)$ sobre B. Si B és de tipus 2, perquè X pertanyi al domini d'atracció normal de ρ és suficient:

(i) les distribucions marginals de dimensió finita de X pertanyen al domini d'atracció de les corresponents de ρ.

(ii) per a tot $\delta > 0$, $\sup_n P\{\|X\| > \delta n^{1/\alpha}\} < \infty$ i existeix una successió creixent de subespais F_m tal que

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} nP\{d(X, F_m) > t n^{1/\alpha}\} = 0$$

per algún $t > 0$.

Les condicions (i) i(ii) són necessàries en qualsevol espai de Banach.

Per a altres resultats sobre dominis d'atracció remetem a la referència. La part inversa d'aquest teorema és conseqüència del següent resultat sobre (5):

<u>Teorema</u> <u>8</u>. Si X pertany al domini d'atracció normal d'una llei estable d'ordre α, ρ, i μ és la mesura de Lévy associada a ρ, és a dir $\rho = \delta_x * c_\delta$ Pois μ, aleshores, per a tot $\delta > 0$

$$n\,\mathcal{L}(X/n^{1/\alpha}) \,\big|\, \{\|x\| > \delta\} \to_w \mu \,\big|\, \{\|x\| > \delta\}.$$

Hi ha un resultat anàleg per a dominis generals d'atracció.

Un dels resultats a què 7 es refereix és que si B és tal que quan (i) i (ii) es verifiquen, X és al domini d'atracció normal de ρ, aleshores B és necessàriament de tipus 2

(Marcus-Woyczynski (1977)). Junt amb la part directa del t.7 aquest resultat dóna una altra caracterització dels espais de tipus 2.

Sobre caracteritzacións geomètriques esmentem finalment un resultat de Acosta, Araujo i Giné (1977) caracterizant cotipus 2:

Teorema 9. Un espai B de Banach és de cotipus 2 si i només si el conjunt de covariances $\phi(f,f)$, $f \in B'$ corresponents a mesures de Borel Gaussianes són les contínues per la topologia de Hilbert-Schmidt de B'_c, on B'_c és dual de B amb la topologia de la convergència uniforme sobre compactes, convexos de B.

Problemes oberts: (1) Tot el mateix per a variables amb diferents graus de depèndencia; (2) aplicacions a estadística i teoremes més fins per a situacions particulars; (3) velocitat de convergència per al teorema de Hoffman-Jorgensen i Pisier; (4) LeCam (1970) demostra que si $\{\text{Pois}\,\Sigma\mathcal{L}(X_{nj})\}$ és w^*-r.c., també $\{\mathcal{L}(S_n)\}$ ho és, si les X_{nj} són simètriques; se sap que en el cas infinitesimal, per a espais de Hilbert,

$$d(\text{Pois}\,\Sigma\mathcal{L}(X_{nj}), \mathcal{L}(S_n)) \to 0$$

si una de les dues successions és w^*-r.c., on d metritza la convergència feble (Giné i León (1977)); és cert que en el cas infinitessimal $\{\mathcal{L}(S_n)\}$ w^*-r.c. no implica $\{\text{Pois}\,\Sigma\mathcal{L}(X_{nj})\}$ w^*-r.c. en un Banach general de fet, a c_0; el problema és caracteritzar els espais on

$\{\mathcal{L}(S_n)\}$ w^*-r.c. implica

$\{$Pois $\Sigma\,\mathcal{L}(X_{uj})\}$ w^*-r.c., cassos infinitessimal i no. El problema 4 és particularment interessant ja que està molt relacionat amb l'essència del t.l.c., que per a LeCam (potser inspirat en P. Lévy) i d'altres, és: relació entre $\mu_1 * \cdots * \mu_n$ i $e^{\Sigma(\mu_i - \delta_0)}$ quan les μ_i són petites en la topología w^* (quan són petites en variació total, aquesta és una questió d'àlgebres de Banach). El problema (4) ha estat posat per A. Araujo.

Referències

1.- de Acosta, A. (1970). Existence and convergence of probability measures in Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 152, pp. 273-298.

2.- de Acosta, A. Araujo, A. and Giné, E. (1977). On Poisson measures, Gaussian measures and the central limit theorem in Banach spaces. Advances in Probability (en prensa).

3.- de Acosta, A. and Samur, J. (1977). Infinitely divisible probability measures and the converse Kolmogorov inequality in Banach spaces. (Studia Math.) (en prensa) .IVIC, Preprint series in Math. # 2.

4.- Araujo, A. and Giné, E. (1976). Type, cotype and Lévy measures in Banach spaces. (A publicar a Ann. Probability.)

5.- Araujo, . and Giné, E. (1977). On tails and domains of attraction of stable measures in Banach spaces. (A publicar). IVIC, Preprint series in Math. # 6.

6.- Dudley, R.M. (1973). Sample functions of the Gaussian process. Ann. Probability, 1, 66-103

7.- Dudley, R.M. and Strassen, V. (1969). The Central limit theorem and ε-entropy. Lecture Notes in Math. 89, pp. 224-231.

8.- Fernique, X. (1974). Regularité des trajectoires des fonctions aléatoires Gaussiennes. Ecole d'été, St. Flour. 1974.

9.- Giné, E. (1974). On the central limit theorem for sample continuous processes. Ann. Probability, 2 pp. 619-631.

10.- Giné, E. (1975). Invariant tests for unifomity on compact Riemannian manifolds based on Sobolev norms. Ann. Statistics, 3, pp. 1243-1266.

11.- Giné, E. and León, J. (1977). On the central limit theorem in Hilbert space. Proc. of the First Conference on Mathematics at the service on man, Barcelona (a publicar).

12.- Heinkel, B. (1977). Mésures majorantes et théorème limite centrale dans C(S). Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 33, pp. 339-351.

13.- Hoffman-Jorgensen, J. (1974). Sums of independent Banach space valued random variables. Studia Math. LII, pp. 159-185.

14.- Hoffman-Jorgensen, J. and Pisier, G. (1976). The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. Ann. Probability, 4, pp. 587-599.

15.- Ito, K. and Nissio, M. (1968). On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. Osaka J. Math. 5, pp. 35-48.

16.- Jain, N. (1976). Central limit theorem and related questions in Banach spaces. Urbana Probability Symposium, Amer. Math. Soc. (a publicar).

17.- Jain, N. and Marcus, M. (1974). Central limit theorems for C(S)-valued random variables. J. Functional Analysis, 19, pp. 216-231

18.- Kahane, J.P. (1968). Some random series of functions. D.C. Heath, Lexington, Mass.

19.- Le Cam, L. (1970). Remarques sur le théoreme limite centrale dans les espaces localment convexes. Les Probabilités sur les structures algébriques. (CNRS, Paris) pp. 233-249.

20.- Marcus, M. and Woyczynski, W. (1977). Stable measures and central limit theorems in spaces of stable type. Preprint.

21.- Parthasarathy, P.K. (1967). Probability measures on metric spaces. Academic Press, New York.

22.- Prokhorof, Yu.V. (1956). Convergence of random processes and limit theorems in Probability Theory. Theor. Probability. Appl., 1, pp. 157-214.

23.- Varadhan, S.R.S. (1962). Limit theorems for sums of independent rv's with values in a Hilbert space. Sankhya, 24, pp. 213-238.

24.- Woyczynski, W. (1977). Classical condictions in the central limit problem in Banach spaces. Preprint.

25.- Zinn, J. (1977). A note on the central limit theorem. Ann. Probability, 5, pp. 282-287.