Pub. Mat. UAB
Nº 12 Juny 1979

ALGUNS ASPECTES ACTUALS DE LÒGICA ALGEBRAICA

Josep Pla
Facultat de Matemàtiques.
Universitat de Barcelona.

L'any 1955 Paul R. HALMOS treu a "Compositio Mathematicae, vol.12" l'article "Algebraic Logic" en el que dóna una formalització algebraica del concepte de <u>deducció</u>. A l'entorn dels anys seixanta l'escola d'Antonio MONTEIRO dóna una mateixa presentació algebraica de la lògica però, en lloc de centrar la seva atenció en la lògica booleana, debilita la qüestió al substrat positiu de la lògica.

La idea que hi ha al dessota d'aquesta presentació és la següent :

si pensem en el càlcul de proposicions construit sobre un conjunt no buit X de lletres com en l'àlgebra lliure $P(X)$ sobre X d'operacions $\neg$ i $\rightarrow$ (monària, la primera; binària, la segona) tenim que, si $x \in X$, aleshores x i $\neg\neg x$ són dues expressions diferents en $P(X)$. Aleshores cal introduir - i s'introdueix - una relació d'equivalència en $P(X)$ que identifiqui, d'acord amb el que nosaltres esperem del càlcul de proposicions, certes fórmules.

El camí sintàctic consisteix en donar el concepte de <u>demostració</u> : s'agafen certes expressions distingides en $P(X)$:

$$\mathcal{A}_1 = \{ p \rightarrow (q \rightarrow p), \text{ on } p,\ q \in P(X)\} ;$$
$$\mathcal{A}_2 = \{(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)), \text{ on } p,q,r \in P(X)\};$$
$$\mathcal{A}_3 = \{ \neg\neg p \rightarrow p, \text{ on } p \in P(X)\} ;$$

i una regla de deducció, anomenada "<u>modus ponens</u>" : M.P. :

$$R = \{ (p, p \rightarrow q, q) : p,q \in P(X)\} \cup \{ (p \rightarrow q, p, q) : p,q \in P(X)\}.$$

S'anomena <u>teorema</u> tota expressió $p \in P(X)$ tal que :

existeix una successió <u>finita</u> d'expressions $p_1, \ldots, p_n$, $p_i \in P(X)$ $(i = 1, \ldots, n)$ amb $p_n = p$ tal que

1. $p_i \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$, o bé

2. existeixen p_j, p_k $(j,k < i)$ i $(p_j, p_k, p_i) \in R$.

Diem que una expressió és un teorema usant el símbol : $\vdash p$.
Aquesta idea es pot generalitzar a qualsevol conjunt $A \subseteq P(X)$ i introduir els A-teoremes ($A \vdash p$). Hom considera els axiomes $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup A$.

Diem que $p \equiv q$ si, i només si, $\vdash p \to q$ i $\vdash q \to p$.
És una relació d'equivalència i resulta que $P(X)/\equiv$ és una <u>àlgebra de Boole</u> : l'àlgebra de Tarski-Lidenbaum.

Semblantment, $p \equiv_A q$ si, i només si, $A \vdash p \to q$ i $A \vdash q \to p$; resulta que $P(X)/\equiv_A$ és també una àlgebra de Boole.

És aquest ordre d'idees el que recull l'escola d'A. MONTEIRO (A. MONTEIRO [1960]; [1971]; Antonio DIEGO [1965];[1966]) quan defineix les <u>àlgebres de Hilbert</u> i les <u>preàlgebres de Hilbert</u>.

Hom diu que una terna $(A, ., D)$ és una preàlgebra de Hilbert si, i només si,

PH_1. . és una operació binària en A;

PH_2. $D \subseteq A$;

PH_3. $x.(y.x) \in D$, per cada parell $x, y \in A$;

PH_4. $(x.(y.z)).((x.y).(x.z)) \in D$, per $x, y, z \in A$;

PH_5. M.P. : si $x \in D$ i $x.y \in D$, aleshores $y \in D$.

És important d'observar que la relació en A,

$x \leqslant_D y$ si, i només si, $x.y \in D$

és una relació de preordre - tal com passava en $P(X)$ - i, per tant, tenim una relació d'equivalència $\equiv_D$.

L'àlgebra quocient, ja que $\equiv_D$ és compatible amb ., dóna

$$(A/\equiv_D, ., D) \quad ,$$

on . és una operació en $A/\equiv_D$, $D \in A/\equiv_D$ i D és <u>màxim</u> en $(A/\equiv_D, ., \leq_D)$.

Aquest tipus d'estructures s'anomenen àlgebres de Hilbert - i són la rèplica de les àlgebres de Boole quocient - i es caracteritzen :

Una terna $(A, ., u)$, on . és una operació binària en A i $u \in A$, és una àlgebra de Hilbert si, i només si,

AH_1. La relació $x \leq y$ si, i només si, $x.y = u$ és una relació d'ordre;

AH_2. $x.u = u$; $u.x = x$;

AH_3. $x.(y.z) = (x.y).(x.z)$.

Aquesta definició es troba en Francesc d'Assís SALES [1971].

D'aquesta manera hem introduit de forma natural el concepte d'àlgebra de Hilbert, que podem pensar com l'ent algebraic més idoni per a descriure la lògica proposicional positiva.

En una àlgebra de Hilbert $(A, ., u)$ els <u>sistemes deductius</u> D són els subconjunts $D \subseteq A$ tals que

SD_1. $u \in D$;

SD_2. $x.y \in D$ i $x \in D$, aleshores $y \in D$.

Hom pot veure que $\mathcal{D} = \{ D : D$ és un s.d. de $(A, ., u)\}$ és un <u>sistema clausura</u> - una col.lecció de parts de A tancada per interseccions arbitràries - que verifica : és <u>finitari</u>; el <u>teorema de la deducció de Tarski</u>.

<u>Finitari</u> : $x \in D$ si, i només si, existeix una col.lecció <u>finita</u> $x_1, \ldots, x_n$ d'elements de D i $x \in D(x_1, \ldots, x_n)$ - s.d. engendrat per $x_1, \ldots, x_n$.

Teorema de la deducció : $x \in D(D,y)$ si, i només si, $y.x \in D$, on D és un s.d., $x, y \in A$ arbitraris i $D(D,y)$ és el s.d. engendrat per D i per y.

En aquest ordre d'idees s'insereixen els treballs de Helena RASIOWA i Roman SIKORSKI. Veure H. Rasiowa [1970], [1974]. Els sistemes deductius irreductibles serveixen per a donar una representació de Stone de les àlgebres de Hilbert. Convé indicar - tan sols de passada - que les topologies que hom troba amb aquest tipus de representacions són topologies poc desitjables des d'un punt de vista topològic i de l'anàlisi.

Un altre ordre d'idees (cf. Rasiowa, op.cit.) que hom pot plantejar-se un cop summergit en aquest àmbit és el que ens planteja la següent qüestió :
a partir d'una operació . de Hilbert, és possible d'alguna manera introduir operacions reticulars en el conjunt ordenat $(A,.,u)$? (Pensem que en les àlgebres de Boole, gràcies a la complementació, podem, a partir de la implicació, definir les operacions reticulars; ara però no disposem pas de negació.)

Les àlgebres de Abbott-Sales (Abbott [1970]; F.A. Sales [1974]; J.Pla [1977]) permeten definir, a partir de ., un suprem per a cada dos elements. Cal indicar que aquestes àlgebres tenen una particularitat curiosa i és : si tenen element mínim són àlgebres de Boole; i els seus sistemes deductius irreductibles, maximals i primers coincideixen.
Diem què és una àlgebra de Abbott-Sales : és una àlgebra de Hilbert $(A,.,u)$ tal que

$$(x.y).y = (y.x).x \quad \text{(caracterització de Sales [1974])}.$$

Aleshores

$$x \vee y = (x.y).y \quad \text{és un suprem en } (A, \leqslant).$$

Si agafem d'entrada un reticle $(A, \wedge, \vee, u)$ i una operació binària . en A tal que $(A, ., u)$ sigui una àlgebra de Hilbert, obtenim els anomenats <u>reticles de Hilbert</u> (cf. Sales [1974]; J.Pla [1977];[1978]) si l'ordre del reticle i l'ordre induït per . coincideixen. (Si en lloc d'un reticle prenem un suprareticle obtenim els <u>suprareticles de Hilbert</u>.)

En aquest context hem pogut donar un tractament unitari de les àlgebres de Abbott-Sales, de Heyting, de Boole. Totes elles són generalitzacions reticulars del substrat eminentment lògic de les àlgebres de Hilbert.

Hom demostra que els filtres de reticle de $(A, \wedge, \vee, u)$ són sistemes deductius, que els sistemes deductius primers coincideixen amb els sistemes deductius irreductibles i s'obté, amb certes limitacions, una representació de Stone d'aquestes noves estructures lògic-algebraiques.

Una qüestió que hom pot plantejar encara en una àlgebra de Hilbert (resp. en un reticle o en un suprareticle de Hilbert) és la qüestió de les <u>negacions</u>. Això porta a introduir el concepte algebraic de negació en un conjunt ordenat (resp. en un reticle, en un suprareticle).

Si $(A, \leq)$ és un conjunt ordenat (cf. G.BODIOU [1964]), tota aplicació

$$\tau : A \longrightarrow A$$

tal que N_1. $x \leq y$ implica $\tau y \leq \tau x$; N_2. $x \leq \tau^2 x$ s'anomena <u>negació</u>.

Una negació forta és tota negació que verifica $\tau^2 x = x$, per tot $x \in A$. Si A és un reticle, τ és una <u>negació reticular</u> o <u>de Morgan</u> si és negació i, a més : N_3. $\tau(x \wedge y) = \tau x \vee \tau y$; $\tau(x \vee y) = \tau x \wedge \tau y$.

(No cal pas que sigui forta, si bé tota negació forta és reticular, si està definida en un reticle). (Sobre qüestions generals de les negacions en reticles complets, cf. F. ESTEVA [1974]).

Si portem aquestes idees a les àlgebres de Hilbert veiem que, per a tot $a \in A$, l'aplicació

$$\begin{aligned} \tau_a : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto \tau_a(x) = x.a \end{aligned}$$

és una negació. Si τ_a és forta, A té mínim i $a = \min(A)$.

De forma semblant hom pot analitzar en els reticles de Hilbert cóm són les negacions reticulars. Si bé Haskell CURRY [1952] realitza un anàlisi en aquest sentit no coneixem fins avui cap treball exhaustiu en aquesta línia i, per tant, constitueix una qüestió àmplia oberta.
Continuant en la semàntica que s'inspira en la lògica clàssica, podem lligar les negacions amb els sistemes deductius via el concepte de <u>consistència</u>.
Fóra interessant efectuar, també en aquest sentit, un estudi exhaustiu que, avui per avui, no s'ha pas fet.

Una altra idea desenvolupada per P.R. Halmos (op.cit.) i independentment per L.HENKIN-J.D.MONK-A.TARSKI [1971] i L.Henkin-A.Tarski [1960], [1961]), consisteix en introduir en les àlgebres de Boole operadors que, d'alguna manera, recullin la idea dels quantificadors. Així Halmos construeix les <u>àlgebres monàdiques</u> i H-M-T construeixen les <u>àlgebres cilíndriques</u>. A.Monteiro recull aquestes idees en A.Monteiro ([1957]; [1960]; [1967]; [1974]) i les aplica a estructures més febles com són les àlgebres de Heyting. No coneixem, però, cap treball de reticles de Hilbert monàdics, ni tampoc d'àlgebres de Hilbert monàdiques. La dificultat rau en el fet que per introduir els citats operadors hom utilitza les propietats reticulars i no coneixem cap treball en que s'introdueixin via l'operació de Hilbert (que és l'operació de la lògica).

Creiem que, en les àlgebres de Abbott-Sales, podríem perfectament introduir operadors <u>existencials</u> o <u>universals</u> i obtindre àlgebres de Abbott-Sales monàdiques. Hi estem treballant.

Donem la idea de Halmos d'àlgebra monàdica. Sigui $(A, \wedge, \vee, \neg; 0, u)$ una àlgebra de Boole i sigui

$$\exists : A \longrightarrow A$$

tal que

$E_1.\ \ \exists 0 = 0$; $E_2.\ \ x \leq \exists x$; $E_3.\ \ \exists(x \vee \exists y) = \exists x \vee \exists y$.

En aquestes àlgebres els sistemes deductius monàdics són els sistemes deductius tals que, si $\exists x \in D$, aleshores $x \in D$. Observem, de passada, que els axiomes de l'operador $\exists$ es donen a través de les operacions reticulars i d'ordre.
Convé dir, a fi d'ésser rigurosos, que, si bé les àlgebres cilíndriques intenten algebritzar el càlcul de predicats i fan intervenir variables, les àlgebres monàdiques algebritzen les <u>lògiques modals</u>.

Una segona via per a donar el concepte de lògica algebraica fou introduida l'any 1930 per A.Tarski (cf.A.Tarski [1930]) i la idea expressada en aquest treball la podem descriure semànticament de la forma següent :

"Donar una lògica equival a donar el conjunt de conseqüències de cada conjunt".

Formalment una lògica abstracta és una parella (A,C), on $A \neq \emptyset$ i

$$C : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

verifica :

C_1. Per tot $X \subseteq A$, $X \subseteq C(X)$;

C_2. si $X \subseteq Y \subseteq A$, $C(X) \subseteq C(Y)$;

C_3. si $X \subseteq A$, $C(C(X)) = C(X)$.

L'operador C s'anomena <u>operador de conseqüència</u>.

Realment A.Tarski imposava dues restriccions : C_o. $\mathrm{Card}(A) \leq \aleph_o$

i C'_2. $C(X) = \bigcup C(F)$, on $F \subseteq X$ i F és finit (en lloc de (2)). Aquesta definició de A.Tarski, si bé inspirada en el càlcul de proposicions i correcta a l'hora de formalitzar el càlcul de proposicions, esdevé massa restrictiva ja que exclou, d'antuvi, les lògiques infinitàries cada cop més importants. Hem pogut veure (V.VERDÚ [1978]) que la lògica probabilística (en el sentit σ) és una lògica infinitària..

Hem indicat ja, en el cas de les àlgebres de Hilbert (reticles de Hilbert), que la col.lecció dels sistemes deductius és un sistema clausura i un teorema general de M.WARD [1942] ens diu que un sistema clausura $\mathcal{L}$ i un operador de conseqüència C és el mateix; si fem $\mathcal{L} = \{X : C(X) = X\}$ és

$$C(X) = \bigcap \{ Y : Y \in \mathcal{L} \text{ i } Y \supseteq X \}.$$

Teoremes com el de Schmidt - diu : un operador C és finitari si, i només si, el seu sistema clausura és fortament inductiu - i el de Pierce - diu : si C és finitari, els elements del sistema clausura $\mathcal{L}$ irreductibles constitueixen una base mínima de $\mathcal{L}$ - suggereixen la possibilitat de donar propietats de C a travers del seu sistema clausura associat.
Una qüestió important que cal resoldre i en la que hem treballat (cf.J.Pla [1976]; V.Verdú [1978]) consisteix en imposar co 20 ons a C (a $\mathcal{L}$) per tal que es verifiqui el teorema de la deducció de Tarski. Ara bé el teorema de la deducció de Tarski és un teorema íntimament lligat amb l'operació i pot ocórrer que, en A, no es disposi de cap operació . . Quines condicions ha de satisfer, doncs, C (o $\mathcal{L}$) per tal de poder introduir en A una operació . que ens permeti d'enunciar el teorema de la deducció :

$$y \in C(X,x) \quad \text{si, i només si,} \quad x.y \in C(X) \quad ?$$

Les respostes donades per J.Pla i V.Verdú difereixen en el següent sentit :

mentres que el primer dóna una condició que permet definir, en A directament, una operació . que verifica el teorema de la deducció, el segon fa la següent construcció :
Tot operador C permet de definir una relació d'equivalència induïda per la relació de preordre :

$$x \leq_C y \quad \text{si, i només si,} \quad y \in C(\{x\}).$$

Podem doncs passar al quocient $A/\equiv_C$ i considerar l'àlgebra quocient $(A/\equiv_C, \bar{C})$, on $\bar{C}$ és

$$\bar{C} : \mathcal{P}(A/\equiv_C) \longrightarrow \mathcal{P}(A/\equiv_C)$$

i es defineix de forma natural.
Aleshores V.Verdú imposa condicions a (A,C) deforma que, en $(\bar{A},\bar{C})$, es verifiqui el teorema de la deducció.

L'anterior consideració ens proporciona una lògica (A,C), una lògica $(\bar{A},\bar{C})$ i una aplicació compatible amb C i $\bar{C}$; la projecció canònica π .
Sabem que π és epijectiva, que (A,C) està <u>generat projectivament</u> per $(\bar{A},\bar{C})$ i per π i que, per tot $x, y \in A$, $\pi(x) = \pi(y)$ si, i només si, $C(x) = C(y)$.

Aquesta idea és la que recull el treball de D.J.BROWN-R.SUSZKO [1973] de forma general quan introdueix el concepte de <u>morfisme bilògic</u>. Si (A_1,C_1) i (A_2,C_2) són dues àlgebres abstractes i $h : A_1 \longrightarrow A_2$ és una aplicació que verifica :

MB_1. h és morfisme (i.e. $h^{-1}(Y) \in \mathcal{C}_1$, per cada $Y \in \mathcal{C}_2$);
MB_2. h genera projectivament (A_1,C_1) a partir de (A_2,C_2) i h (i.e. $\mathcal{C}_1 = h^{-1}(Y) : Y \in \mathcal{C}_2$);
MB_3. h és epijectiva,

direm que h és un morfisme bilògic entre (A_1,C_1) i (A_2,C_2).

La importància real d'aquesta definició - que justifica el seu nom - és la següent :

h és un morfisme bilògic entre (A_1,C_1) i (A_2,C_2) si, i només si,

(1) h és un epimorfisme;

(2) $\equiv_h \subseteq \equiv_{C_1}$;

(3) h és una bijecció sobre els tancats;

és a dir : $h^{-1}(h(X)) = X, \quad X \in \mathcal{C}_1$;

$h(h^{-1}(y)) = Y, \quad Y \in \mathcal{C}_2$;

(Aquí convé observar que, si h és un morfisme bilògic, la relació d'equivalència que indueix en A és més petita que la relació d'equivalència natural induida per C_1.)

Es clara la importància dels morfismes bilògics ja que conserven els tancats (és a dir la lògica).

Aquesta situació permet plantejar de manera natural el següent tipus de qüestions : cóm són les lògiques abstractes (A,C) que admeten un morfisme bilògic amb una lògica abstracta (A',C') booleana, de Heyting, reticular de Hilbert, de Hilbert,...? (Quan diem una lògica booleana, etc. volem dir una lògica en la que A és una àlgebra de Boole, etc, i C' és l'operador de conseqüència associat al sistema clausura de tots els sistemes deductius de A'.) En V.Verdú (op.cit.) es troben respostes en aquesta línia i més encara, ja que s'arriba a caracteritzar (A,C) de forma que sigui bilògica amb la lògica σ-probabilística que és infinitària.

D'altres qüestions que es poden plantejar en relació amb els operadors de conseqüència són : (i) la qüestió del nuclis deductius, (2) la qüestió de les negacions.

La qüestió dels nuclis deductius - introduits per A.Tarski [1930] és la següent : donada una àlgebra abstracta (A,C) hom pot preguntar-se pels sistemes d'axiomes independents (i.e. un conjunt $N \subseteq A$ és un nucli deductiu de $X \subseteq A$ si, i només si, $C(N) = C(X)$ i, si $x \in N$, $x \notin C(N - \{x\})$.) Es veu que això equival a trobar un conjunt N minimal en la clàsse dels conjunts Y amb $C(Y) = C(N)$.

Sobre els nuclis deductius podem formular les següents preguntes :

- en quines condicions existeixen nuclis deductius? (Hom pot pensar en els espais vectorials i en els A-mòduls. Com podem introduir formalment una propietat que ens faci el paper de teorema de Steinitz?) Tarski (op.cit. demostra que tot X admet una <u>base</u> <u>ordenada</u> (això és una successió $(x_n)_{n \in N}$ tal que

  $C(X) = C(\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\})$ i $x_{n+1} \notin C(\{x_1, \ldots, x_n\})$)

  però una base ordenada no és pas necessàriament un nucli deductiu;
- en quines condicions un conjunt X admet un nucli <u>contingut</u> en X?
- en quines condicions <u>tots</u> els nuclis tenen el mateix cardinal?

Un primer anàlisi es pot trobar en F.A.Sales-J.Pla [1976].

La qüestió de les negacions lligat amb les lògiques abstractes (A,C) es troba en A.Tarski [1930]; D.J.Brown-R.Suszko [1973]; Rasiowa [1975]; J.Pla [1977]; V.Verdú [1978] i es planteja en els termes següents:
cóm associar a cada $x \in A$ un element x' que, en certa manera, sigui una negación de x? Si pensem amb una negació d'ordre cal disposar en A d'un ordre i, en general, en A no n'hi tenim cap, però sí que tenim un ordre en $A/\equiv_C$. Això ens suggereix passar al quocient i veure si el que hem definit en A dóna una negació en el quocient.

Un altre camí, però, és el de la <u>consistència</u>. Diem que $X \subseteq A$ és <u>consistent</u> si, i només si, $C(X) \neq A$. Aleshores podem donar les següents definicions:

* diem que x' és una <u>negació</u> <u>clàssica</u> de x si, i només si, per cada $X \subseteq A$, $x \in C(X)$ si, i només si, $C(X,x') = A$ (Brown-Suszko)
* diem que x' és una <u>negació</u> <u>intuicionista</u> de x si, i només si, per cada $X \subseteq A$, $x' \in C(X)$ si, i només si, $C(X,x) = A$ (Rasiowa)

★ diem que x' és una <u>negació</u> <u>feble</u> de x si, i només si, per cada $X \subseteq A$, $C(x,x') = A$ i $C(x) \cap C(x') = C(\emptyset)$ (Tarski)

Aquestes són totes les negacions que hom pot definir vinculades a l'operador C?

Quines relacions existeixen entre elles? quines passen al quocient com a negacions d'ordre? ...

Tot el que hem dit fins ara és ja clàssic en el sentit que segueix una línia iniciada els anys 1930 al 1950. Però recerques pos posteriors han posat de manifest altres <u>implicacions</u> - en el sentit algebraic de la paraula - que no estan gens vinculades amb la implicació de Hilbert i que, per tant, el seu coneixament és mol més vague.

Si pensem en una àlgebra de Boole com en un reticle amb el màxim 1 i mínim 0, distributiu i complementat, podem preguntar-nos qué i com fóra una estructura algebraica que fós :

(1) àlgebra de Boole a menys de la distributivitat;

(2) àlgebra de Boole a menys de la complementació.

Podríem fer un estudi formal d'aquest tipus d'àlgebres, però això podria semblar una disquisició ben poc interessant. No és pas així.

(1) Les <u>àlgebres</u> o <u>reticles</u> <u>ortomodulars</u>.

L'anàlisi de la Mecànica Quàntica s'enfronta amb l'àlgebra dels <u>subespais</u> <u>tancats</u> d'un espai de Hilbert. Aquesta àlgebra constitueix un reticle complementat via l'ortogonal que <u>no</u> <u>és</u> distributiu - ni tan sols modular. Ara bé, verifica la <u>llei</u> <u>ortomodular</u> :

$x \leq y$ implica $y = x \vee (x^{\perp} \wedge y)$, per tot x,y.

(cf.Bodiou (op.cit.), S.S Holland [1966],J.M.JAUCH [1976]). En les àlgebres ortomodulars podem definir una <u>implicació</u> (en el sentit de Rasiowa,op.cit.) i una <u>operació</u> <u>ordenadora</u> (en el sentit de F.A.Sales [1974]) :

$$x \rightarrow y = x^{\perp} \vee (x \wedge y)$$

que no és de Hilbert. Estem estudiant-les qüestions relatives a les representacions de Stone d'aquest tipus d'àlgebres.

(2) Els conjunts "difusos" (Fuzzy)

Si $E \neq \emptyset$ i $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, anomenem classe dels conjunts "difusos" a

$$I^E = \{x : \ x : E \longrightarrow I\} .$$

Definim $x \vee y = \sup (x,y)$, $x \wedge y = \inf (x,y)$ i $x^c = 1 - x$.

Obtenim un reticle amb 0 i 1, distributiu, que no és complementat.

Aquest reticle - i això constitueix un camp totalment verge - admet moltes operacions implicatives (i.e. donats dos conjunts difusos x, y, definim

$$(x.y)_t = \begin{cases} 1 & \text{si } x_t \quad y_t \ ; \\ a_t & \text{si } x_t \quad y_t, \end{cases} \quad \text{on } a_t \in (0,1).)$$

Entre les operacions implicatives trobem: l'operació implicativa de E.POST (que proporciona a I^E l'estructura d'àlgebra de Heyting és l'única operació implicativa clàssica o de Hilbert possible) i l'operació de J.LUKASIEWICZ (que dota a I^E d'estructura d'àlgebra completa no clàssica en el sentit de J.Pla [1976] i d'àlgebra de Sales, que no és de Abbott i aquí queda justificada la nomenclatura Abbott-Sales.) En aquest context resta obert el problema de classificar totes les operacions implicatives possibles i A. TORRENS hi està treballant.

BIBLIOGRAFIA

ABBOTT, J.C.

(1967) "Semi-boolean algebra", Matematicki Vesnik, 4, p.177-198.

(1970) "Trend in lattice theory", Van Nostrand.

BODIOU,G.

(1964) "Théorie dialectique des probabilités",Gauthier-Villars.

BROWN,D.!SUSZKO,R.

(1973) "Abstracts Logics". Dissert.Math.,CII,p.9-40.

CURRY,H.

(1952) "Leçons de logique algebraique". Gauthier-Villars.

DIEGO,A.

(1965) "Sobre las álgebras de Hilbert" Notas de Lógica Matemática, nº12.

(1966) "Sur les algébres de Hilbert". Gauthier-Villars

ESTEVA,F.

(1973) "Negaciones en retículos". Actas 1as jornadas mat. hispano-lusas,p.295-302. Lisboa.

(1976) "Contribución al estudio de la estructura del conjunto de negaciones definidas en un retículo". Stochastica, v.I,nº1.

HALMOS,P.R.

(1955) "Algebraic Logic I (Monadic Boolean algebras)".Comp. Math.,12,p.217-249.

HENKIN,L-MONK,J.D.-TARSKI,A.

(1971) "Cylindric Algebras". North-Holland.

HENKIN,L.-TARSKI,A

(1960) "Cylindrical algebras" Summ.Cornell.Univ. vol.III,p.332-340

(1961) "Cylindric algebras" Am.Math.Soc., p.83-113

HOLLAND,S.S.

(1966) "The current interest in orthomodular lattices".Van Nostrand.

JAUCH,J.M.

(1976) "Logic and probability in Quantum Mechanics". D.Reidel Pub.

MONTEIRO,A.

(1957) "Normalidad en las álgebras de Heyting monàdicas".UMA.

(1960) "Algebras monádicas"- Atas de 2º Colóquio Brasileiro de Matemática,p.33-52.

(1960) "Sur le calcul propositionnel implicatif positif". Curs donat a la U.N.S.

(1967) "Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalents dans les algèbres de Boole monadiques I". Math Japan, v.12, p.1-23.

(1971) "La semi-simplicité des algèbres de Boole topologiques et les sistemes deductifs". UMA, v.25.

(1974) "L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques 1 i 2". UNS, v.29-30.

PIERCE, R.S.

(1968) " Introduction to the theory of abstract algebras". New York.

PLA, J.

(1976) "Algebras de Hilbert I". Curs de doctorat. Barcelona.

(1976) "Sobre S y T negaciones en lógicas abstractas". Actas 3ª jornadas hispano-lusas de matemáticas Málaga.

(1977) "Algebras de Hilbert II"= Curs de doctorat. Barcelona.

(1978) "Negacions en estructures reticulars". En projecte.

RASIOWA, H.

(1974) "An algebraic Approach to Non-classical Logics". North-Holland.

RASIOWA, H-SIKORSKI, R.

(1970) "The Mathematics of Metamathematics". Mon.Mat.Warszawa, 41.

SALES, F de A.

(1971) "Operaciones ordenadoras y álgebras de Hilbert". Reunión anual matemáticos españoles. Murcia.

(1973) "Algebras de Hilbert". Curs de doctorat. Barcelona.

(1974) "Sistemas deductivos". Id. Barcelona.

SALES, F de A-PLA, J.

(1976) "Sobre núcleos deductivos". Actas 3ª jornadas matemáticas hispano-lusas. Málaga.

TARSKI, A.

(1972) "Logiue, sémantique, methamatématique I". Armand Colin.

(1974) "Ídem, II".

VERDÚ, V.

(1978) "Contribució a l'estudi de certs tipus de lògiques abstractes". Tesi doctoral. Barcelona.

WARD,M.

(1942) "The closure operators of a lattices". Annals of Math, 43,nº2,p.191-196.