

Aplicacions contínues de \mathbb{R} en \mathbb{R} (*)

Carles Simó

Facultat de Matemàtiques

Universitat de Barcelona

Ens proposem de mirar les aplicacions contínues de \mathbb{R} en \mathbb{R} d'una manera dinàmica. És a dir, donada una aplicació f i un punt inicial x , volem calcular les successives imatges $f(x)$, $f^2(x)$, ..., $f^k(x)$, ... i dir algunes propietats de les successions obtingudes.

Per a començar vegem un exemple senzill i el paper que juga la bisectriu del primer quadrant en la construcció d'iterats. Prenem $f(x) = z^x$, z constant [15]. La fig. 1 mostra $f(x)$, la recta $y = x$ i com hom construeix els iterats d'un punt. Com que $f(x)$ talla a $y = x$ en dos punts, aquests són fixos. Si augmentem z els dos punts es confondran (fig. 2) si

$$x = z^x, \quad 1 = z^x \ln z \quad \Rightarrow \quad x = e, \quad z = e^{1/e}.$$

Per a valors més grans de z , $f(x)$ i $y = x$ no es tallen (fig.3).

(*) Lliçó inaugural del curs 1978-79, donada a la Secció de Matemàtiques de la UAB el 3 d'octubre de 1978.

Veiem que en aquest cas hom produeix divergència de la successió $(x_k) = (f^k(x_0))$.

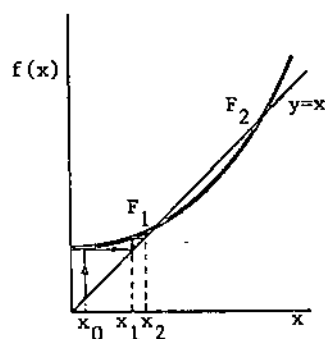


Fig.1

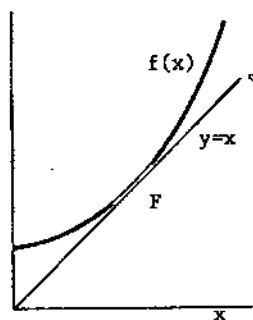


Fig.2

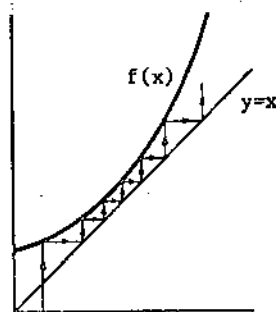


Fig.3

Quant a l'estabilitat del punt fix, F , és a dir, si els iterats que s'inicien prop d'ell s'hi apropen o allunyen, la fig. 4 mostra les possibilitats. Es fàcil demostrar (lema de contracció) que si $|f'(F)| < 1$ hi ha estabilitat.

Tornem a $f(x) = z^x$. Si $z < 1$ és palès que hi ha un únic punt fix. Aquest perd l'estabilitat si

$$x = z^x, \quad -1 = z^x \ln x \Rightarrow x = 1/e, \quad z = e^{-e}.$$

Per a aprofundir una mica més vegem si hi ha punts periòdics. p es diu k -periòdic si $f^k(p) = p$. Es clar que si $s|k$ i $f^s(p) = p$ hom té $f^k(p) = p$.

Si $z > 1$ no hi ha més punts periòdics que els fixos, ja que F és creixent. Si $z < 1$, com que f^2 és creixent, no hi ha punts de període senar (fora del fix). Llavors ens cal cercar només els punts 2-periòdics, o sigui, els fixos de f^2 . Però hom demostra fàcilment que $f^2(x)$ té derivada menor que 1 si $z > e^{-e}$. Per tant no hi ha altre punt z -periòdic que el fix.

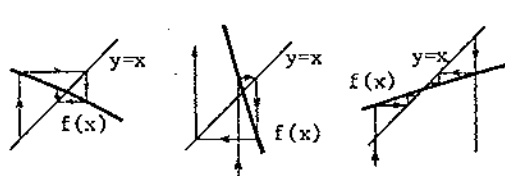


Fig.4

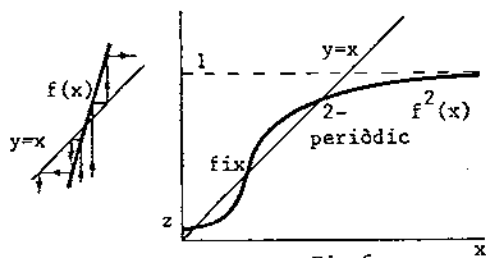


Fig.5

Si $z < e^{-e}$, en el punt fix hom té $(f^2)'(F) > 1$ i per tant hi ha 2 punts 2-periòdics ja que f^2 només té un punt d'inflexió [15] (vegeu la fig. 5). Es clar que $(f^2)'(F) = (f'(F))^2$. La "forcació" que dóna lloc als punts 2-periòdics s'inicia quan F perd l'estabilitat i $f'(F) = -1$.

Un teorema bastant general ens diu com hom produeix forcacions (locals) [4]:

Sigui $I = [0,1]$ (s'estén a d'altres intervals o a la recta) i $f: I \times I \rightarrow I$ una família
 $(\mu, x) \mapsto f_\mu(x)$

d'aplicacions. Les hipòtesis habituals fetes per Guckenheimer són: f és C^3 (en μ i x); $f_\mu(0) = f_\mu(1) = 0$; $\exists ! C_\mu \mid f'(C_\mu) = 0$; $f_0 = 0$; $f_1(C_1) = 1$. Suposem que existeixen p , n , v tals que (hipòtesis locals):

$$1) f_v^n(p) = p; \frac{d}{dx} (f_v^n)(p) = 1; \left(\frac{d^2}{dx^2} (f_v^n)(p) \right) \times \left(\frac{d}{du} (f_v^n)(p) \right) > 0$$

Llavors apareix la forçació de la fig. 6 a.

Si $\frac{d^2}{dx^2}$ i $\frac{d}{du}$ tenen signes diferents apareix la situació de la fig. 6 b.

$$2) f_v^n(p) = p; \frac{d}{dx} (f_v^n)(p) = -1; \frac{d^2}{dx du} (f_v^n)(p) > 0.$$

$$\frac{d^3}{dx^3} (f_v^{2n})(p) < 0.$$

Llavors apareix la forçació de la fig. 6 c.

La demostració usa de forma curiosa el teorema de la funció implícita.

Des d'ara I serà l'interval $[0,1]$ i J un altre interval qualsevol.

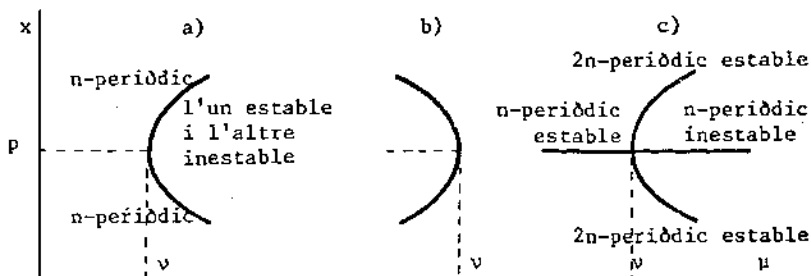


Fig.6

Els 2 punts $2n$ -periòdics estables de 6c) formen un cicle 2 -periòdic per f^n .

En ecologia han estat proposats nombrosos exemples de funcions f (vegeu [11]) enteses de la manera següent: Sigui N_k la població d'una certa espècie en una època donada. Llavors admeten que al cap d'un cert període de temps la població és $N_{k+1} = f(N_k)$. Encara que aquest model és perfectament determinista, per a certes funcions f dona, aparentment, conducta caòtica. Apareixen forçacions. A la taula 1 tenim exemples de funcions f usades pels biòlegs. Totes elles són

$$f(N) = N \cdot \exp(r(1-N/K)) \quad (1)$$

$$N(1 + r(1-N/K)) \quad (2)$$

$$\frac{\lambda N}{1 + \exp(-A(1-N/B))} \quad (3)$$

$$\lambda N(1 + aN)^{-b} \quad (4)$$

homogènies de grau 1 i

tenen un únic màxim.

En principi la població nova és proporcional a la vella però el factor de

$$\frac{\lambda N}{\lambda + (N/B)^b} \quad (5)$$

$$\lambda N \text{ si } N < C; \lambda N^{1-b} \text{ si } N > C \quad (6)$$

$$\lambda_+ N \text{ si } N < C; \lambda_- N \text{ si } N > C \quad (7)$$

$$(\lambda_+ > 1; \lambda_- < -1)$$

$$N \left[1/(a + bN) - v \right] \quad (8)$$

Taula 1

proporcionalitat pot ésser

molt petit i hi ha excés

de població (i, per a tant,

manca de menjar). Models

similars s'usen en problemes

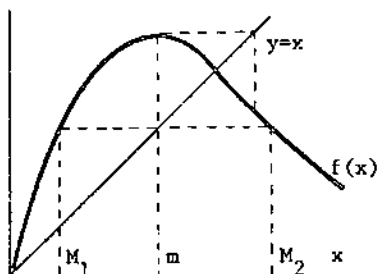
de les ciències físiques,

químiques, econòmiques, etc.

Una funció del tipus

$N_{n+1} = (1-\sigma) N_n + (CN_n)^S e^{-N_n}$, on σ, C, S , són paràmetres
convenients, modela el funcionament de la mèdula espinal
[6]. Per exemple, N_n pot ésser la quantitat de glòbuls
vermells. Llavors els tipus d'òrbites periòdiques que
apareixen es pot relacionar amb certes malalties.

Preguem l'exemple (1) de la taula 1. Normalitzem
així: $f(x) = x \exp(r(1-x))$. Es clar que $x = 1$ és fix
per a tot $r \in (0,2)$. Si fem $r = 2$ poden estudiar el que
passa analitzant f^2 .



-Fig.7

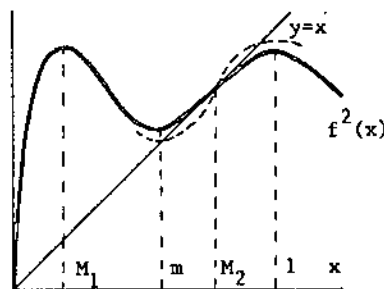


Fig.8

De la fig. 7 es veu que f^2 tindrà 2 màxims (a M_1, M_2) i un mínim (a m). Es clar que $(f^2)'(1) = 1$. La recta $y = x$ talla a $f^2(x)$ en un únic punt, però si $r > 2$ ja tallarà en 3, com s'indica en la línia dibuixada a punts. Tenim una forccació. Ara bé, en aquest cas, a diferència de l'exemple proposat al principi, f^2 no és creixent. De fet f^k té 2^k màxims. Hom pot veure que si r augmenta llavors $(f^2)'$ disminueix. Quan $(f^2)'|_{2\text{-periòdic}} = -1$ apareix una forccació amb punts 4-periòdics, etc. Podem arribar així a una situació de forccacions com la indicada a la fig. 9. Hom dona una tal situació amb una acumulació infinita de forccacions (punts de període 8, 16, 32, ...) en el exemple (1) per a $r_c = 2.6924 \dots$ i en el exemple (2) amb $r_c = 2.5700 \dots$.

Per a $r > r_c$ hi ha trajectòries aperiòdiques no convergents a cap cicle, lo qual, experimentalment, és indistingible d'un fenomen aleatori. S'entra en una regió caòtica: nombre finit d'òrbites periòdiques (O.P.) estables, nombre infinit numerable d'O.P. inestables i nombre infinit no numerable de trajectòries aperiòdiques.

Només un nombre finit de punts fixos és estable. L'idea per a veure això és que f^k té 2^k màxims, és a dir, oscil·la molt, i que en els punts de tall amb $y = x$ la pendent serà de mòdul més gran de 1 si K és prou gran. Hi ha gran sensibilitat a petites variacions de les condicions inicials.

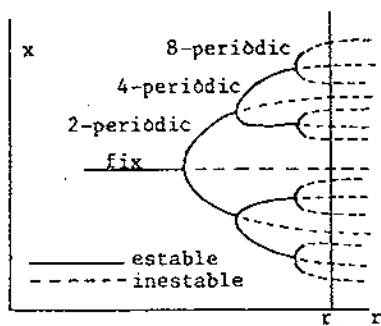


Fig.9

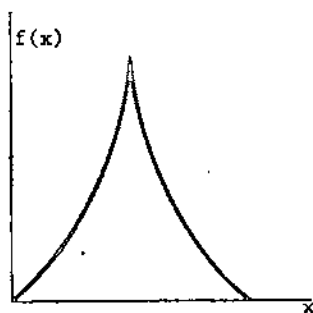


Fig.10

Una similar acumulació de forcacions ha estat obtinguda per Gumowski i Mira, [5], per a l'aplicació elemental $f_r(x) = x^2 + r$. Si $r > 1/4$ no hi ha punts fixos ni periòdics. Si $r = 1/4$ hi ha un punt fix. Per a $r \in (-3/4, 1/4)$ n'hi ha dos, l'un estable i l'altre inestable. Per a $r = -3/4$ el punt fix estable força a 2-periòdics. Després a 4-periòdics, etc. Hom produeix l'acumulació de forcacions per a $r = -1.401155189.....$

Un exemple procedint de la mecànica de fluids és degut a Lorenz [10]. A partir d'una equació en derivades parcials (problema de Bénard), per desenvolupament en sèrie de Fourier i truncat de la dita sèrie, obté un sistema d'equacions diferencials ordinàries a \mathbb{R}^3 . Lorenz l'integrà numèricament i observà la relació entre els successius màxims, M_k , d'una de les variables (concretament, la z). La fig. 10 mostra el resultat de posar un màxim en funció de

l'anterior: $M_{k+1} = f(M_k)$. Destaquem que $|f'| > 1$ sempre que està definida. Això implica que tot punt periòdic és inestable (i molt), ja que $\frac{d}{dx} f^k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} f'(f^j(x))$. Més endavant tornarem a analitzar un exemple semblant.

Li i Yorke [8] han redescobert un teorema molt curiós. Sigui $f: J \rightarrow J$ una aplicació contínua. Suposem que $\exists a \in J$ tal que: $b = f(a)$, $c = f^2(a)$, $d = f^3(a)$ i $d \leq a < b < c$ (o $d \geq a > b > c$). Llavors f té a J punts de període qualsevol. Notem que si a és 3-periòdic es compleixen les hipòtesis.

Donem ara una proposició més general i la seva demostració [17]:

Proposició.— Siguin L, R dos intervals tancats tals que:

$\max L = \lambda \leq \rho = \min R$. Si

$$1) L \cup R \subset f(R) \text{ i } R \subset f(L), \text{ i}$$

$$2) \lambda < \rho \text{ o bé } f^2(\lambda) \notin R,$$

llavors f té punts exactament n -periòdics per a tot $n \geq 1$.

Demostració: Fem $I_k = L$ Si $K = n-1 \pmod{n}$.

Com que $I_{k+1} \subset f(I_k)$, existeix

$$I_k = R \text{ Si } K \neq n-1 \pmod{n}$$

una successió d'interval·ls (A_k) tals que: $A_0 = I_0 = R$;
 $A_{k+1} \subset A_k$ i $f^k A_k = I_k$. Com que $f^n A_n = I_n = R \supset A_n$,
 hom té que f^n té un punt fix, a . Tenim $\{a, f(a), \dots,$
 $f^{n-2}(a)\} \subset R$, i $f^{n-1}(a) \in L$. Si $f^{n-1}(a) \in R$ és que
 $f^{n-1}a = \lambda = \rho$ lo qual implica $f^2 \lambda = f a \in R$, absurd. Per
 tant $\{a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)\}$ és exactament n -periòdica.

Pel teorema de Li-Yorke és suficient fer $L = [a, f(a)]$,
 $R = [f(a), f^2(a)]$. Demés Li i Yorke diuen que $\exists S \subset J$, no
 numerable, sense O.P., tal que $\forall p, q \in S$, diferents, \lim
 $|f^n(p) - f^n(q)| > 0$, $\lim |f^n(p) - f^n(q)| = 0$, i que cap $p \in S$
 és asimptòticament periòdic (un punt p es diu asimptòtica-
 ment periòdic si existeix q , periòdic, tal que $f^n(p) - f^n(q) \rightarrow 0$).

Aixó diu que els punts de S tenen un comportament molt
 erràtic. Hom està interessat en el anomenat conjunt límit
 d'un punt x :

$$L(x) = \text{conjunt de punts límit de } \{(f^n(x))\} = \{(f^n(x))\}'.$$

Donat $[a_1, a_2] \subset J$ podem estudiar

$$\gamma(x, [a_1, a_2]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \{n \leq N \mid f^n(x) \in [a_1, a_2]\}}{N}$$

si el tal límit existeix.

Si hom pot representar $\gamma(x, [a_1, a_2])$ com $\int_{a_1}^{a_2} g(t) dt$,
 direm que g és una densitat. (Llavors γ no depèn de x).

Teorema [8]. - Si $f: J \rightarrow J$ és contínua, C^2 excepte en un punt i $|f'| > 1$, excepte en el dit punt, llavors existeix $g: J \rightarrow [0, \infty)$, densitat per a quasi tot x . Per a quasi tot x hom té $L(x) = \{y \mid g(y) > 0\}$ que és un interval.

Lasota i Yorke [7] s'han interessat en mesures invariants conservades per funcions del tipus esmentat. Siqui L_1 l'espai $L_1(I, m)$, on m és mesura de Lebesgue, i $\tau: I \rightarrow I$ una aplicació mesurable no singular (és a dir $m(\tau^{-1}A) = 0$ si $m(A) = 0$).

Definim l'operador de Frobenius-Perron: $P_\tau: L_1 \rightarrow L_1$ així:

$(P f)(x) = \frac{d}{dx} \int_{\tau^{-1}(0,x)} f(s) ds$. És lineal contínua, positiu ($f > 0 \Rightarrow P_\tau f > 0$) conserva integrals ($\int_0^1 P_\tau f dm = \int_0^1 f dm$, $\forall f \in L_1$), $P_{\tau^n} = (P)^n$, i $P_\tau f = f \Leftrightarrow d\mu = f dm$ és una mesura τ -invariant ($\mu(\tau^{-1}A) = \mu(A)$).

Teorema. - Siqui $\tau: I \rightarrow I$ una funció C^2 a trossos i expansiva ($\inf |\tau'| > 1$, hipòtesi essencial). Llavors $\forall f \in L_1$ hom té

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_\tau^k f \xrightarrow{L_1} f^*.$$

El límit verifica : $f \geq 0 \Rightarrow f^* \geq 0$; $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$;
 $P_f f^* = f^*$; $\int_0^1 f^* \leq C \|f\|_1$, amb C independent de f . ($\int_0^1 g$
indica la variació total de g entre 0 i 1). Es clar que la
funció f^* obtinguda és τ -invariant.

Lasota va estar interessat en això degut a intervenir
en el disseny de taladres d'alta velocitat per a pous de pe-
troli. La mesura invariant $f^* dx$ descriu la distribució d'im-
pactes a la superfície del taladre. Millorant la forma d'a-
quest té f^* més homogeni i augmenta la vida del taladre.

El mateix Lasota [6] ha mostrat que si f és una aplicació
de J en ell mateix i $\exists n \geq 1$, $\exists x_0 \in J$ tals que $f^{3n} x_0 = x_0$,
 $f^n x_0 \neq x_0$, llavors existeix μ , mesura contínua (és a dir,
nul·la en els punts) invariant i ergòdica respecta a f ([16]).

Anem a tractar una família molt senzilla d'aplicacions
de I en I , molt estudiada i, malgrat això, no completament
coneguda: $f_a(x) = ax(1-x)$, $a \in [0, 4]$.

Si $a \in [0, 1]$ el zero és l'únic fix, a tractar.

Si $a \in [1, 3]$ hi ha dos punts fixos: el zero, repulsor
i $1-1/a$, atractor.

Per $a = 3$ hom té forçació a 2-periòdics i per $a = 1 + \sqrt{6}$ forçació a 4-periòdics, etc..

Ruelle a [13] ha obtingut que per $a = 3.6785735104....$ (l'únic zero de $(a-2)^2(a+2) = 16$), f_a té una mesura invariant absolutament contínua respecte a la de Lebesgue a $[1/a, a/4]$. Conjectura l'existència d'una tal mesura sempre que existeixi k tal que el punt $1/2$ caigui en una certa O.P. inestable per l'acció de f_a^k .

Li i Yorke, [9], mostren que existeix una successió a_n monòtona creixent i tendint a 4, tal que per $a = a_n$ el punt $1/2$ és n -periòdic estable (ja que a $(f_{a_n}^n)'$ hi entra com a factor $f_{a_n}'(1/2) = 0$) i

$$f_{a_n}^2(1/2) < f_{a_n}^3(1/2) < \dots < f_{a_n}^n(1/2) = 1/2 < f_{a_n}^1(1/2).$$

Fan nombrosos càlculs numèrics per a esbrinar l'estructura de $L(x)$ en funció de x i de a , però estan lluny d'una resposta completa.

Potser un dels resultats més sorprenents és el degut a Sarkovskii en 1964, que inclou el de Li-Yorke i que ha estat redemostat varies vegades ([4],[17]).

Considerem a N (naturals) l'ordre: $3+5+7+9+\dots+2.3+2.5+2.7+\dots+4.3+4.5+4.7+\dots+8.3+8.5+8.7+\dots+16+8+4+2+1$.

Teorema.- Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua (sense cap hipòtesi addicional). Si té un punt n -periòdic llavors en té de m -periòdics $\forall m \in \mathbb{N} \mid n \mid m$.

Pel nostre exemple $f_a(x) = ax(1-x)$ això dona una estructura com la indicada a la fig.11 (vegeu més informació després usant resultats de Guckenheimer).

Štefan diu més [17]: Una O.P. ω es diu minimal si $n = \# \omega$ és senar ≥ 3 i no hi ha òrbites m -periòdiques per a tot senar m tal que $3 \leq m \leq n-2$.

Llavors $f|_{\omega}$ és exactament del tipus donat a la fig. 12 o bé es transforma en ell mitjançant un canvi d'orientació.

$\cos(\pi(K + .5 - .5(-1)^K) / (S - (-1)^K))$, $K=0 : S-1$ i tot ells són inestables.

El canvi $t = (\arccos x) / \pi$ converteix T_n en

$$\begin{aligned} L_n : I &\rightarrow I \\ x &\mapsto (nx) \text{ si } [nx] = \dot{2} \\ &\quad 1-(nx) \text{ si } [nx] \neq \dot{2} \end{aligned}$$

on (α) , $[\alpha]$ denoten les parts decimal i "entera de α , respectivament (fig.13).

Introduïm el shift o corriments de Bernoulli: Sigui $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un conjunt que anomenem alfabet; $X = A^{\mathbb{N}}$ que es pot dotar d'estructura d'espai mètric i en el que s'hi pot definir una probabilitat P . Anomenem shift a $\sigma_n: X \rightarrow X$ $p \mapsto \sigma_n(p)$, definit de la següent manera: si $p = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \dots)$, hom té $\sigma_n(p) = (\alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \dots)$. σ_n és n a 1. Si X fos $A^{\mathbb{Z}}$ llavors σ_n seria bijectiva. σ_n és contínua, n-lipschitziana i manté la probabilitat: $P(B) = P(\sigma_n^{-1}(B))$, $\forall B \in \mathcal{P}(X)$.

Si $p = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \dots)$ definim $j_k = i_k - 1$ si i_k és senar, i $j_k = i_k$ si i_k és parell, $h_n(p) = \frac{j_1}{n} \pm (\frac{j_2}{n^2} \pm (\frac{j_3}{n^3} \pm \dots))$ amb (\pm) després de $\frac{j_k}{n^k}$ si i_k és (senar / parell).

Llavors hom té el diagrama commutatiu:

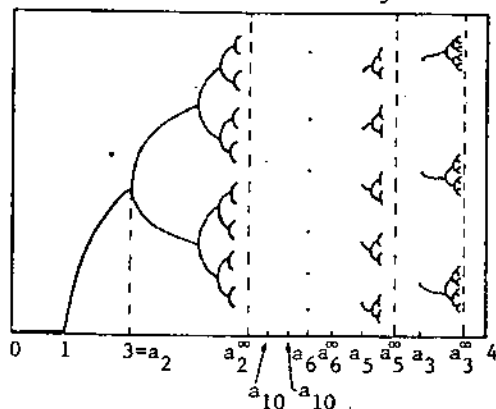


Fig.11

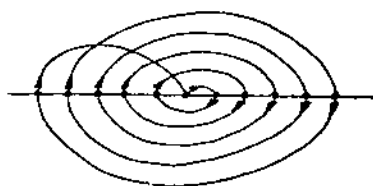
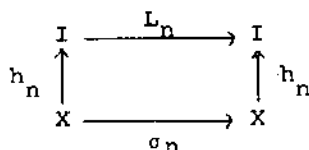


Fig.12

Hom té un cas particularment interessant de la família f_a si $a = 4$. Ja va ésser iniciat el seu estudi per Ulam i von Neuman en 1947.

En primer lloc diguem que el canvi $x \rightarrow 1-2x$ transforma f_4 en el polinomi de Chebyshev T_2 . A [14] hom dóna informació sobre el comportament dels polinomis de Chebyshev al iterar.

Sigui $T_n(x) = \cos(n \arccos x) : [-1,1] \rightarrow [-1,1]$. Hom té la propietat: $T_n \circ T_m = T_{nm}$. T_n té n^k punts k -periòdics: són els fixos de T_n^k . Els fixos de T_s estan donats per



És a dir: σ_n i L_n són conjugats topològics i mètrics (i per tant ho són σ_n i T_n). En particular T_n és barrejador (mixing), ergòdic i la seva entropia (veure més endavant) val $\ln n$. (En el diagrama cal treure de I els punts que van a parar als extrems per iteració de L_n i de X els de la forma $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j}, \alpha_s, \alpha_s, \dots, \alpha_s \dots)$, $s=1$ o n).

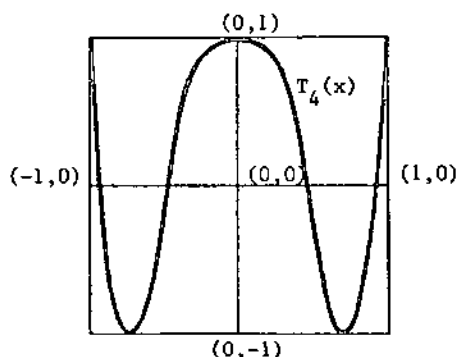


Fig.13 a)

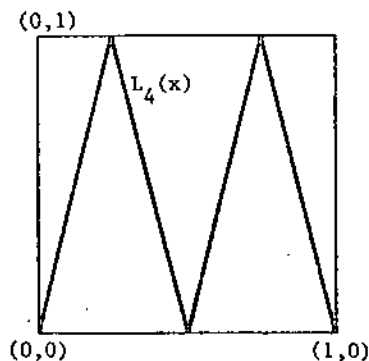


Fig.13 b)

L'idea de conjugació (topològica, diferenciable, analítica, mètrica, etc.) és essencial en sistemes dinàmics. Hom diu que dues aplicacions f i g són \mathcal{F} -conjugades si existeix una aplicació invertible h que pertany a la classe de funcions \mathcal{F} i tal que $fh = hg$. Si hom vol, dir que hi ha una tal aplicació h és lo mateix que dir que f es transforma en g usant un canvi de variables invertible. Llavors f i g es mirarien com a equivalents.

Cosnard [3] ha estudiat amb detall el cas T_2 en la seva forma L_2 . És clar que $L(x) \neq \emptyset$ i que $\# \{L(x)\} < +\infty$ implica que $L(x)$ és un cicle. Degut a l'inestabilitat ($|f'| > 1$) hom té que $L(x)$ és un cicle si i sols si x és antecedent d'un cicle.

Quant $L(x)$ no és finit hom diu que l'òrbita de x és turbulenta.

Cosnard demostrà que $\exists S \subset I$, de mesura 1 tal que $\forall x \in S, \{(f^n(x))\}' = I$. Existeix $T \supset S$ i $\forall x \in T, \{(f^n(x))\}'$ conté un cicle. Notem que $T \neq I$, és a dir, $\exists C \subset I - T$ i $\forall x \in C, \{(f^n(x))\}'$ no conté cap cicle. El conjunt C conté un subconjunt invariant no numerable de mesura zero M i, és clar, $\forall x \in M$ hom té $L(x) = M$.

Parlem ara una mica del concepte d'entropia que ha estat esmentada abans.

En física estadística l'entropia és el coeficient del terme asimptòtic del logaritme del nombre de configuracions que satisfan certes propietats quan el nombre de graus de llibertat tendeix a ∞ . El concepte matemàtic és més dinàmic. Fa referència a nombre de trajectòries i no de configuracions. Hom pot definir mètricament [16] l'entropia d'una aplicació f respecte d'una mesura f -invariant, però preferim la noció d'entropia topològica. Seguim l'exposició de [1].

Escriurem $h(f)$ per a designar l'entropia de f . És més gran o igual que zero i, en cert sentit, ens diu quantes òrbites diferents té f . Com més complicada és la funció més gran és h . Si $h(f) > 0$ hom sol dir que f és quasialeatòria o caòtica i si $h=0$ hom diu que f és suau, no aleatòria. L'entropia és un invariant per conjugació, és a dir, si fem un canvi de variables γ i $\bar{f} = \gamma f \gamma^{-1}$, hom té $h(f) = h(\bar{f})$, però és groller en el sentit de què hi pot haver aplicacions bastant diferents, no equivalents i amb la mateixa entropia. (Però segons un resultat bàsic de Ornstein l'entropia classifica els shifts de Bernoulli).

Obviament f té infinites òrbites, però podem pensar que $f: M \rightarrow M$ representa un procés real i que si x, y són tals que $d(x, y) \leq \varepsilon$ no els podem distingir. Llavors $x, f(x), f^2(x), \dots$ i $y, f(y), f^2(y), \dots$ són òrbites diferents si $\exists k > 0$ tal que $d(f^k x, f^k y) > \varepsilon$. Acotem el temps d'observació fins a n i suposem M varietat compacta. Llavors només cal considerar $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$. Destaquem que el fet de què $x, \dots, f^{n-1}(x)$ i $y, \dots, f^{n-1}(y)$ siguin la mateixa òrbita no és relació d'equivalència. Per compacitat el nombre d'òrbites és finit. Concretament:

Hom diu que $E \subset M$ és (n, ε) -separat per f si $x, y \in E \Rightarrow \Rightarrow \exists k \in [0, n] \mid d(f^k x, f^k y) > \varepsilon$. Llavors el nombre d'òrbites és $S(n, \varepsilon) = \max \{ \text{card } E \mid E \subset M, E \text{ és } (n, \varepsilon)\text{-separat per } f \}$.

Definim la velocitat de creixement de $S(n, \varepsilon)$: $h(f, \varepsilon) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln S(n, \varepsilon)}{n}$. Passem al límit respecte a la precisió de

les observacions i definim així l'entropia:

$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(f, \varepsilon)$. Es a dir, $h(f)$ dona la velocitat de

creixement asimptòtica del nombre d'òrbites de longitud finita quan aquesta creix i quan l'error que no ens permet de distingir un punt d'un altre tendeix a zero.

Misiurewicz i Szlenk [12] mostren que en el cas de l'interval, per a una aplicació monòtona a trossos hom té

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \text{Var } f^n,$$

on $C_n = \# \{x \mid f^n \text{ té un extrem estricta a } x\}$ i Var indica variació total en l'interval.

Si f és monòtona a trossos i contínua hom té

$$h(f) \leq \overline{\lim} \frac{1}{n} \ln \text{Per}_n, \text{ on } \text{Per}_n = \# \{x \mid f^n(x) = x\}.$$

Si $f: I \rightarrow I$ és C^2 i si $\forall x \in I$ hom té $(f'(x))^2 + (f''(x))^2 \neq 0$, llavors, millorant resultats de Bowen, obtenen que $h: C^2(I, I) \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua en el punt f .

Conze, d'altra banda, demostrà a [2] que per a X espai compacte amb mètrica ρ i $f: X \rightarrow X$ contínua i expansiva (és a dir $\exists \delta > 0 \mid \text{si } x \neq y \Rightarrow \exists n \geq 0 \mid \rho(f^n x, f^n y) > \delta$), hom té

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \ln \text{Per}_n \leq h(f) < +\infty.$$

Finalment Štefan, millorant resultats de Bowen i Franks, considera aplicacions $T: I \rightarrow I$ de classe C i amb

$\text{Per}_n > 0$ per a $h = 2^d m$, m senar ≥ 3 . Llavors:

$$1) h(T) > 2^{-d-1} \ln 2.$$

$$2) \exists K_m, \text{ independent de } T \text{ i de } d, \text{ tal que si } r = 2^d K \\ \text{i } K \geq K_m \text{ hom té } \text{Per}_r \geq 2^{r/2d}.$$

Tornant al treball de Guckenheimer [4], hom tracta de veure com estan disposades les O.P. Sigui $f: I \rightarrow I$ tal que $f(0) = f(1) = 0$, $\exists! c$ tal que $f'(c) = 0$, $f(c) = 1$. Llavors f^n té com a mínim 2^{n-1} màxims i 2^n punts fixos i és monòtona a trossos. Sigui p un punt n -periòdic. Associem a p la successió a_1, \dots, a_n si p està en el $(\sum_{i=1}^n a_i 2^{n-i})$ -èsim $a_i = 0, 1$ interval en què f^n és monòtona. Associem també a p la successió b_1, \dots, b_n mitjançant $b_i = \frac{1}{2} (1 - \text{signe } \frac{df}{dx}(f^{i-1}(p)))$. Hom té $a_1 = b_1$, $a_{i+1} + a_i = b_i \pmod{2}$ si $i > 1$. Llavors $f(p)$ s'associa a $b_2, b_3, \dots, b_n, b_1$. Això permet també conèixer la posició relativa dels punts n -i m -periòdics (ambdós són nm -periòdics).

Un resultat fonamental de Guckenheimer (pel que usa la topologia del pla i l'estudi local de les forçacions és el que diu com apareixen per primera vegada òrbites d'un cert període. Suposarem que la família f_μ satisfà les hi-

pòtesi habituals, les condicions locals i que no hi ha for-
cacions per a $\mu = 1$.

Sigui $P_n = \{ (x, \mu) \mid f_{\mu}^n(x) = x \} = \cup \gamma_i^n, \nu_i^n$ corba
connexa, no singular, maximal, diferenciable. Si $(p, 1) \in$
 γ_i^n , sigui $m(p)$ el mínim valor de μ sobre la dita corba.
Sigui $M(p)$ el màxim de x a l'òrbita de p per f_1 . Llavors
podem enunciar el

Teorema.— Si p_1, p_2 són n -periòdics i $\frac{d}{dx}(f_1^n(p_i)) < 0$,
 $i = 1, 2$ i p_1, p_2 estan en òrbites diferents, hom té $M(p_1) <$
 $< M(p_2) \Rightarrow m(p_1) < m(p_2)$.

Aixó i uns petits càlculs ens permeten de construir
 P_n . Per exemple, la fig. 14 (qualitativa!) dona P_6 per
a la família $f_{\mu}(x) = 4_{\mu} x(1-x)$.

Podem deixar aquí l'exposició de resultats i dir que és interessant per a exemples com els esmentats a la taula 1, al obtenir el conjunt de forcacions i, més generalment, els conjunts límit per a diferents valors dels paràmetres. (Les forcacions multiparamètriques presenten més dificultats). Veiem, doncs, que les aplicacions contínues de \mathbb{R} en \mathbb{R} conser-

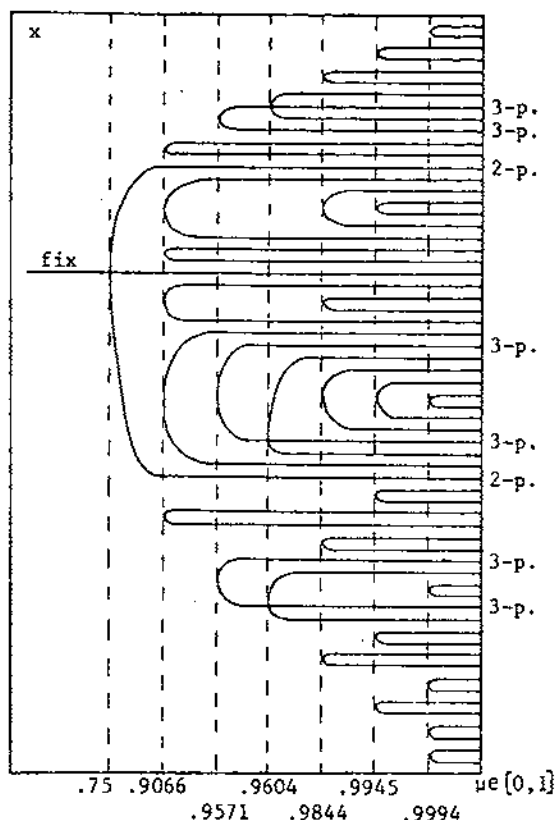


Fig.14

ven el seu interès i són encara font de problemes.

REFERÈNCIES

- [1] Bonen, R.: On Axiom A Diffeomorphisms, Regional Conf. Ser. Math. 35, Amer. Math. Soc., 1978.
- [2] Conze, J.P.: Points périodiques et entropie topologique, C.R. Acad. Sc. Paris, 267 (1968), 149-152.
- [3] Cosnard, M.: Étude du chaos dans l'itération d'une transformation ponctuelle du premier ordre, C.R. Acad.Sc. Paris, 286 (1978), 639-642.

- [4] Guckenheimer, J.: On the Bifurcation of Maps of the Interval, *Inventiones math.* 39 (1977), 165-178.
- [5] Gumowski, I., Mira, Ch.: Accumulations de bifurcations dans une récurrence, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 281 (1975), 45-48.
- [6] Lasota, A.: Ergodic Problems in Biology, *Astérisque* 50 (1977), 239-250.
- [7] Lasota, A., Yorke, J.A.: On the existence of invariant measures for piece wise monotonic transformations, *Trans.Amer. Math. Soc.* 186 (1973), 481-488.
- [8] Li, T.Y., Yorke, J.A.: Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* 82 (1975), 985-992.
- [9] Li, T.Y., Yorke, J.A.: The "simplest" Dynamical System, a Dynamical Systems, editat per L. Cesari, J. K. Hale, J.P. La Salle, Vol. 2, 203-206, Academic Press 1976.
- [10] Lorenz, E.N.: Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmospheric Sci.* 20 (1963), 130-141.
- [11] May, R.M., Oster, G.F.: Bifurcations and Dynamical Complexity in Simple Ecological Models, *The Amer. Naturalist* 110 (1976), 573-599.
- [12] Misiurewicz, M., Szlenk, W.: Entropy of Piecewise Monotone Mappings, *Astérisque* 50 (1977), 299-310.
- [13] Ruelle, D.: Applications conservant une mesure absolument

continue par rapport à dx sur $[0,1]$, Commun. Math. Phys. 55 (1977), 47-51.

- [14] Simó, C.: Una nota acerca del comportamineto de los polinomios de Chebýsher como endomorfismos de un intervalo cerrado, Actas Jornadas Mat. Hispano-Lusitanos, Jaca, 1977, P.
- [15] Simó, C.: A note on the iteration of exponentials, Pub. Mat. UAB 9 (1978).
- [16] Sinai, Y.G.: Introduction to Ergodic Theory, Princeton Univ. Press, 1976.
- [17] Stefen, P.: A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Points of Continuous Endomorphisms of the Real line, Commun. Math. Phys. 54 (1977), 237-248.

16 NOV. 1979