INTRODUCCIÓ

És ben coneguda l'observació de Pringsheim segons la qual l'analiticitat d'una funció f de classe C^{∞} en un interval tancat $[-r,r]$ es pot expressar en termes del creixement de les derivades: la condició és que existeixin $C=C(f)$ i $\varepsilon=\varepsilon(f)$ de forma que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C\ \varepsilon^{n}\ n! \quad , \text{ per a } |x|\leq r .$$

D'aquesta observació i en relació amb algunes qüestions relatives a equacions en derivades parcials parabòliques, Hadamard proposà l'any 1912 el problema de la quasi-analiticitat d'una classe de funcions, consistent en esbrinar fins a quin punt la propietat

$$\text{" } f=0 \quad \text{si} \quad f^{(n)}(0)=0 \text{ "}$$

depén del creixement de les derivades. Concretament, si $M=(M_n)$ és una successió de nombres positius i hom considera la classe de les funcions de classe C^{∞} tals que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C\ \varepsilon^{n}\ M_n \quad ,$$

per a unes certes constants C,ε que depenen de f, quan hom pot assegurar que $f=0$ si $f^{(n)}(0)=0$?

Aquest fou l'inici de l'anomenada teoria de la quasi-analiticitat, i la resposta al problema anterior és el teorema de Denjoy-

Carleman. La definició d'aquestes classes ha sofert petites modificacions tècniques que permeten de treballar millor amb elles. Així, i designant sempre per E(r), E l'espai de les funcions de classe C^{∞} a l'interval $[-r,r]$ o a $\mathbb{R}$ respectivament, Ehrenpreis considera, en relació amb l'estudi d'equacions de convolució, les classes

$$E_M(r)=\left\{f\in E(r)/\ \forall\varepsilon>0\ \exists C=C(\varepsilon)\ \text{t. q.}\ \left|f^{(n)}(x)\right|\leq C(\varepsilon)\,\varepsilon^n M_n\ ,\forall|x|\leq r\right\}$$

i E_M com la formada per aquelles $f\in E$ tals que la restricció a cada interval $[-r,r]$ pertany a $E_M(r)$. Hom suposa que la successió M compleix les hipòtesis escaients que permeten de definir la transformació de Fourier en el dual d'aquests espais i d'obtenir el teorema tipus Paley-Wiener que caracteritza l'espai de funcions enteres que així s'obté (Capítol 0).

Aquestes classes resulten ésser àlgebres i aquest era el nostre punt de sortida: estudiar $E_M(r)$, E_M com a àlgebres topològiques, estudi del que els únics precedents que teniem eren algunes qüestions tractades a [43].

En aquest sentit, a part de qüestions generals sobre l'estructura d'àlgebra topològica de E_M (Capítol 1), en el treball hi ha una descripció completa dels ideals tancats en tots els cassos: el cas analític, és a dir, el cas que E_M resulti ésser una subàlgebra de l'àlgebra H de les funcions enteres, el cas quasi-analític i finalment el cas no quasi-analític o regular (Capítols 2, 3, 4 respectivament). Val a dir que el resultat potser més valuós de la memòria és inclòs en aquest darrer cas, on demostrem que a E_M val la síntesi espectral, en el sentit que tot ideal tancat és determinat pels seus ideals puntuals (és a dir, l'anàleg del teorema de Whitney). També s'inclou, aprofitant les mateixes tècniques que per al cas analític, un estudi dels ideals de convolució del dual que resulta ésser equivalent a l'estudi dels subespais tancats de E_M invariants per traslacions (Capítol 5).

Tot estudiant aquestes qüestions se n'han plantejat d'altres que no depenen pas de l'estructura d'àlgebra de E_M però que hi són relacionades. Aquestes són la qüestió de la imatge puntual de E_M, és a dir, de quines successions són la successió de derivades a 0 d'una $f \in E_M$ (l'anàleg del teorema de Borel) i la qüestió de com hom pot recuperar f de $(f^{(n)}(0))$ en el cas que la classe sigui quasi-analítica (Capítols 6 i 2 , respectivament).

Això és en línies generals el contingut d'aquest treball. A l'inici de cada capítol s'exposa més detingudament el seu contingut.

No vull acabar aquesta introducció sense abans agrair a tots els que d'alguna forma m'han ajudat en el meu treball. De manera molt especial vull fer palès el meu reconeixement als Drs. Joan Cerdà i Julià Cufí per llurs consells i comentaris, per l'estímul i la confiança que m'han donat , però, sobretot , per la seva amistat. A ells, i en general a tota la gent de l'Autònoma, els dec d'haver sabut crear un ambient de treball que, a part de fer-me molt agradable la tasca, ha estat decisiu en l'elaboració d'aquest treball, i que jo voldria per a qualsevol estudiant de doctorat. També vull recordar Sebastià Xambó

i Carles Simó que de tant en tant m'encomanen una mica de la seva gran vocació i entusiasme. Agraeixo també a Josep Lamarca i Emma Royo el seu ajut en la redacció d'aquesta memòria.

Bellaterra, Octubre de 1978.

CAPÍTOL O

LES CLASSES $E_M(r)$, E_M I EL TEOREMA DE DENJOY-CARLEMAN

El propòsit d'aquest capítol és introduir la versió de les classes de Denjoy-Carleman que són l'objecte d'estudi d'aquest treball i establir-ne les propietats bàsiques. Es tracten també el problema de l'equivalència de classes i la transformació de Fourier en el dual d'aquests espais. Finalment , és enunciat i demostrat el teorema de Denjoy-Carleman, que és una caracterització de la quasi-analiticitat de la classe.

O.1.- Les classes $E_M(r)$, E_M.

M designarà sempre una successió (M_n) de nombres positius amb $M_o = 1$ i amb les dues condicions següents:

(a) M és logarítmicament convexa, és a dir,

(1) $$M_n^2 \leq M_{n+1} \; M_{n-1} \quad \text{per a } n \geq 1 .$$

(b) existèixen constants A, H > O tals que

(2) $$M_{n+1} \leq A \; H^n \; M_n \quad \text{per a } n \geq O .$$

Donada una successió M, per a tot interval tancat K, la classe

$E_M(K)$ es defineix com el conjunt de les $f \in E(K)$ que satisfan la condició

(3) "$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C = C(\varepsilon)$ t. q. $\left| f^{(n)}(x) \right| \leq C(\varepsilon)\, \varepsilon^n M_n$, $n \geq 0$, $x \in K$. "

Sense pèrdua de generalitat, només seran considerats intervals $K_r = [-r, r]$ i escrivim $E_M(r)$ en lloc de $E_M(K_r)$.

La classe E_M es defineix com el límit projectiu d'aquestes; és a dir, consta de les $f \in E$ tals que $f_{|K} \in E_M(K)$ per a tot interval tancat K. Observem que cap d'aquestes classes és buida ja que totes contenen els polinomis.

La topologia natural de $E_M(r)$ és la definida per les normes (posant $\|g\|_r = \sup \{ |g(x)|, |x| \leq r \}$)

$$p_{r,\varepsilon}(f) = \sup_n \frac{\|f^{(n)}\|_r}{\varepsilon^n M_n} , \quad f \in E_M(r),\ \varepsilon > 0,$$

i a E_M la topologia projectiva, és a dir, la definida per les $p_{r,\varepsilon}$ variant r i ε . És clar que ens podem limitar a les $p_{r,\varepsilon}$ amb $r \in N$ i $\varepsilon = 1/n$, de manera que aquestes topologies són metritzables. Les normes

$$q_{r,\varepsilon}(f) = \sum_n \frac{\|f^{(n)}\|_r}{\varepsilon^n M_n} ,$$

defineixen la mateixa topologia, car $p_{r,\varepsilon}(f) \leq q_{r,\varepsilon}(f)$ i per altre costat

$$q_{r,2\varepsilon}(f') = \sum_n \frac{\|f^{(n)}\|_r}{2^n \varepsilon^n M_n} \leq 2\, p_{r,\varepsilon}(f) \quad .$$

La hipòtési (2) significa que $E_M(r)$, E_M són estables per derivació . De fet , (2) implica

$$p_{r,\varepsilon}(f') \leq A\, p_{r,H^{-1}\varepsilon}(f) \;, \qquad f \in E_M(r) \quad ,$$

és a dir , la derivació és una operació contínua en aquests espais. (Cal dir , però , que la hipòtesi (2) no és imprescindible i molts resultats serien vàlids sense ella).

Suposem que $n<m$ i escrivim (1) per a $n, n+1, \dots, m$. Multiplicant les desigualtats obtenim :

$$M_n \; M_m \leq M_{n-1} \, M_{m+1} \quad ,$$

i , per recurrència ,

$$M_n \, M_m \leq M_o \, M_{n+m} = M_{n+m} \quad ,$$

per a $n<m$ i per tant, també si $m<n$. Si $m = n$, (1) i l'anterior porten a $M_n^2 \leq M_{2n}$. Per tant, en tots els casos,

(4) $$M_n \; M_m \leq M_{n+m} \quad .$$

Això té una conseqüència interessant : si $f, g \in E_M(r)$, amb la fórmula de Leibnitz obtenim, per a $|x| \leq r$,

$$\left| (fg)^{(n)}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| f^{(k)}(x) \right| \; \left| g^{(n-k)}(x) \right|$$

$$\leq p_{r,\varepsilon}(f)\, p_{r,\varepsilon}(g) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k M_k\, \varepsilon^{n-k} M_{n-k} \leq p_{r,\varepsilon}(f)\, p_{r,\varepsilon}(g)\, \varepsilon^n M_n\, 2^n ,$$

que demostren que

$$p_{r,2\varepsilon}(fg) \leq p_{r,\varepsilon}(f)\, p_{r,\varepsilon}(g) \quad ,$$

i per tant que $E_M(r)$, E_M són <u>àlgebres topològiques</u> amb el producte ordinari de funcions .

<u>Exemple</u>.- En el cas $M_n = n!$, tenim :

$$\left(\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \right)^{1/n} \xrightarrow[n]{} 0 \quad ,$$

$\forall f \in E_M(r)$ de manera que tot $E_M(r)$ consta de funcions enteres . Recíprocament, si f és una funció entera, les desigualtats de Cauchy donen

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!\, C_R}{R^n} \quad , \quad |x| \leq r \quad ,$$

(on $C_R = \sup \left\{ |f(z)| \, ; \, d(z, K_r) \leq R \right\}$) , que és (3) amb $\varepsilon = 1/R$. Això també demostra

$$P_{r,\, R^{-1}}(f) \leq C_R \quad .$$

Per altra banda, si $|z| \leq s$

$$|f(z)| \leq \sum_n \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} s^n \leq q_{r,\, s^{-1}}(f) .$$

Veiem, doncs, que en el cas $M_n = n!$, $E_M(r)$ i , naturalment E_M no és altra cosa sinó l'espai de les funcions enteres i la topologia, la de la convergència uniforme sobre els compactes de $\mathbb{C}$ (això també es pot veure observant que les dues són topologies d'espai de Fréchet més fines que la topologia de la convergència puntual). Això il·lustra , i alhora justifica, les definicions.

És clar que la topologia de $E_M(r)$ és més fina que la topologia de $E(r)$, la de la convergència uniforme de la funció i de les seves derivades, i que el mateix podem dir de E_M. La següent proposició compara aquestes topologies i és també un criteri de convergència a $E_M(r)$.

<u>(0. 1. 1.) Proposició</u> .- Una successió (f_m) d'elements de $E_M(r)$ (resp. E_M) és convergent cap a una $f \in E_M(r)$ (resp. E_M) si i només si és un conjunt acotat a $E_M(r)$ (resp. E_M) i $f_m \longrightarrow f$ a $E(r)$ (resp. E) .

<u>Demostració</u> .- Suposem que (f_m) és acotat : $\forall r, \varepsilon$ $\exists C(r,\varepsilon)$ t. q.

$$p_{r,\varepsilon}(f_m) \leq C(r,\varepsilon) \qquad \forall m,$$

és a dir,

$$\|f_m^{(n)}\|_r \leq C(r,\varepsilon)\, \varepsilon^n M_n \quad \forall m, \ \forall n .$$

Si $f_m \longrightarrow f$ a $E(r)$, fixant n i fent $m \longrightarrow \infty$, trobem

$$\|f^{(n)}\|_r \leq C(r,\varepsilon)\, \varepsilon^n M_n \qquad \forall n \ ,$$

que demostra que $f \in E_M(r)$. Fixem $\varepsilon > 0$ i volem veure que $p_{r,\varepsilon}(f - f_m) \longrightarrow 0$. Sigui $\delta > 0$. Com que $(f - f_m)$ és un conjunt acotat , és $\sup_m \; p_{r,\,\varepsilon/2}(f-f_m) < \infty$, és a dir,

$$\left\|(f-f_m)^{(n)}\right\|_r \leq D(r,\varepsilon) \quad (\varepsilon/2)^n M_n \qquad \forall\, m,n \quad ,$$

i

$$\frac{\left\|(f-f_m)^{(n)}\right\|_r}{\varepsilon^n \; M_n} \leq \frac{D(r,\varepsilon)}{2^n} \qquad \forall m,n \quad .$$

En particular , hi ha n_o t.q.

$$\frac{\left\|(f-f_m)^{(n)}\right\|_r}{\varepsilon^n M_n} \leq \delta \qquad \forall m, \; \forall n \geq n_o \quad .$$

Com que $f_m \longrightarrow f$ a $E(r)$, $\exists\, m_o$ t.q. si $m \geq m_o$

$$\frac{\left\|(f-f_m)^{(k)}\right\|_r}{\varepsilon^k \; M_k} \leq \delta \qquad k = 0, \ldots\ldots, n_o \quad .$$

Aleshores, les dues relacions anteriors donen que per a $m \geq m_o$

$$p_{r,\varepsilon}(f-f_m) \leq \delta \quad ,$$

i això acaba la demostració. //

Emprant (0.1.1.), és fàcil de veure que $E_M(r)$, E_M són complets i, per tant, espais de Fréchet . Puix que si (f_n) és una successió de Cauchy a $E_M(r)$, ho és a $E(r)$ i $f_n \longrightarrow f$ a $E(r)$ per a una $f \in E(r)$; com que (f_n) és acotat a $E_M(r)$, segons (0.1.1.) també $f_n \longrightarrow f$ a $E_M(r)$. De la mateixa forma es pot veure que $E_M(r)$, E_M tenen la propietat de Montel, de manera que són espais de Fréchet- Montel (veure també [7]).

Veurem ara una última propietat de $E_M(r)$, E_M que servirà després per a identificar la topologia del dual d'aquests espais. I és que $E_M(r)$, E_M són espais de Schwartz (de fet, són fins i tot nuclears, però aquesta propietat no la necessitem); això és a [8 , pg. 27] i per a veure-ho es fa servir un teorema de Sebastião e Silva ([21, pg. 282]) segons el qual un límit projectiu d'espais normats és Schwartz si és Haussdorf i les aplicacions restricció compactes. En el nostre cas, podem pensar que $E_M(r)$ és el límit projectiu dels espais normats

$$E_M(r,\varepsilon)=\left\{ f\in E(r)\ /\ p_{r,\varepsilon}(f)<\infty\right\} ,$$

i per tant és suficient de veure que si $\varepsilon<\eta$ la inclusió

$$E_M(r,\varepsilon)\hookrightarrow E_M(r,\eta)$$

és compacta. La bola unitat B_ε de $E_M(r,\varepsilon)$ és un acotat a $E(r)$ ja que

$$\left\| f^{(n)}\right\|_r \leq \varepsilon^n M_n \qquad \forall f\in B_\varepsilon ,$$

i d'aquesta desigualtat veiem immediatament que també és un tancat de $E(r)$. Com que $E(r)$ és de Montel, tota successió (f_m) de B_ε en té una de parcial convergent, a $E(r)$, cap a una $f\in B_\varepsilon$. Per no complicar la notació, suposem que és ella mateixa. Veurem ara que $f_m\longrightarrow f$ a $E_M(r,\eta)$, és a dir, que $p_{r,\eta}(f-f_m)\longrightarrow 0$, i acabarem. Tenim: $p_{r,\varepsilon}(f-f_m)\leq 2$, és a dir,

$$\left\|(f-f_m)^{(n)}\right\|_r \leq 2\,\varepsilon^n M_n \qquad \forall m,n \quad ,$$

i

$$\frac{\left\|(f-f_m)^{(n)}\right\|_r}{\eta^n \; M_n} \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^n \quad .$$

Sigui $\delta > 0$. Com que $\varepsilon/\eta < 1$, hi haurà n_o t.q.

$$\frac{\left\|(f-f_m)^{(n)}\right\|_r}{\eta^n M_n} \leq \delta \qquad \forall m, \quad \forall n \geq n_o \quad .$$

Sigui ara m_o t.q. $\forall m \geq m_o$

$$\frac{\left\|(f-f_m)^{(k)}\right\|_r}{\eta^k M_k} \qquad\qquad k=0,\ldots,n_o \quad .$$

Les dues anteriors donen que

$$p_{r,\eta}(f-f_m) \leq \delta \quad ,$$

per a $m \geq m_o$.

Resumint l'apartat :

<u>(0.1.2) Proposició</u>.- $E_M(r)$ i E_M són àlgebres de Fréchet. Com a espais vectorials topològics són espais de Fréchet-Schwartz (i en particular, de Fréchet-Montel). //

<u>0.2. L'equivalència de classes.</u>

Volem veure com han d'estar relacionades dues successions $M=(M_n)$ i $N=(N_n)$ per a que $E_M(r) \subset E_N(r)$, $E_M \subset E_N$. És immediat que si hi ha constants $A,B > 0$ t.q.

$$(5) \qquad M_n \leq A B^n N_n \quad , \quad \forall n$$

aleshores $E_M(r) \subset E_N(r)$, $E_M \subset E_N$. Veurem que (5) és també necessària.

Abans d'això cal una observació. La hipòtesi (1) implica que la successió $M_n^{1/n}$ és creixent ([43]). En efecte: això significa veure que la desigualtat

$$M_n^{n+1} \leq M_{n+1}^n$$

és vàlida $\forall n$, cosa que demostrem per inducció ; per a n=1 és la mateixa (1) i suposat per a n-1, és per a $n \geq 2$

$$M_n^{n+1} = M_n^{n-1} M_n^2 \leq M_n^{n-1} M_{n+1} M_{n-1} \leq M_n^{n-1} M_{n+1} M_n^{n-1/n} ,$$

i elevant ambdós membres a n trobem $M_n^{n+1} \leq M_{n+1}^n$.

En el cas que $M_n^{1/n}$ estigui acotada, és clar que $E_M(r)$, E_M coincideixen amb les classes corresponents a $M_n = 1$ $\forall n$ (que està inclosa a totes puix $M_1^n \leq M_n$). Aquesta de moment la deixem de banda (la retrobarem al Capítol 2) i així doncs, a partir d'ara suposarem que $M_n^{1/n} \longrightarrow \infty$ (veure [45]). Amb aquesta hipòtesi, per a cada $z \in \mathbb{C}$ la funció

$$e_z(t) = \exp (itz) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad ,$$

pertany a E_M , ja que $\| (e_z)^{(n)} \|_r = |z|^n \exp r |\mathrm{Im}\, z|$.

Introduïm aquí l'anomenada funció d'Ostrowski ([30 , pg. 17]) que serà molt útil en tot aquest treball i que està definida per a $t > 0$ per

$$(6) \qquad \lambda_M(t) = \sup_{n \geq 0} \frac{t^n}{M_n} \quad , \quad t > 0 \; ,$$

(el fet $M_n^{1/n} \longrightarrow \infty$ garanteix la finitud de $\lambda_M(t)\ \forall t$). La hipòtesi (1) resulta ser equivalent ([8 , pg. 5]) a

$$(7) \qquad M_n = \sup_{t>0} \frac{t^n}{\lambda_M(t)} ,$$

(i sota aquesta forma és com intervindrà). Mitjançant (6) i (7), (5) és equivalent a

$$(8) \qquad \lambda_N(t) \leq A\ \lambda_M(Bt) \quad , \quad t>0 .$$

Suposem ara que $E_M(r) \subset E_N(r)$; com que la topologia en aquests espais és més fina que la de la convergència puntual la inclusió

$$E_M(r) \hookrightarrow E_N(r)$$

té gràfica tancada, i per tant és continua. Aleshores, donada la norma $p_{r,1}$ de $E_N(r)$, existeixen $A>0$ i $B^{-1}>0$ t.q.

$$p_{r,1}(f) \leq A\ p_{r,B^{-1}}(f) \quad , \quad f \in E_M(r) .$$

Si escrivim això per a $f=e_t$, com que

$$p_{r,1}(e_t) = \sup_n \frac{\|(e_t)^{(n)}\|_r}{N_n} = \sup_n \frac{t^n}{N_n} = \lambda_N(t) ,$$

$$p_{r,B^{-1}}(e_t) = \sup_n \frac{\|(e_t)^{(n)}\|_r}{B^{-n}\ M_n} = \sup_n \frac{(Bt)^n}{M_n} = \lambda_M(Bt) ,$$

trobem (8) . El mateix raonament serveix si $E_M \subset E_N$. Així hem demostrat (altres demostracions es troben a [30] , [8]) :

<u>(0. 2. 1.) Teorema</u>. – $E_M(r) \subset E_N(r)$ i $E_M \subset E_N$ si i només si les relacions (5), (8) són certes. Per tant, $E_M(r) = E_N(r)$ o $E_M = E_N$ si i només si hi ha constants $a, b > 0$ t. q.

$$
(9) \qquad a < \left(\frac{M_n}{N_n} \right)^{\frac{1}{n}} < b \qquad , \forall n \quad . //
$$

<u>Una notació</u>. – Per no haver de posar nom a totes les constants, una relació com la (5) l'escriurem, d'acord amb el costum general com

$$
M_n^{1/n} = O (N_n^{1/n}) ,
$$

i direm que <u>M i N són equivalents</u> quan també valgui la contrària , és a dir, quan (9). Quan dues funcions f, g d'un paràmetre real o complex compleixin una relació com la (8) ho escriurem sovint sota la forma

$$
f(t) = O(g(Ot)).
$$

Direm que <u>f és del mateix ordre que g</u> quan junt amb l'anterior val també la contrària, és a dir, $g(t) = O(f(Ot))$.

Per exemple, $n!$ i n^n són equivalents, per la fórmula de Stirling. Donades dues successions equivalents, qualsevol d'elles serveix per a tractar la classe corresponent.

0.3. Els duals i la transformació de Fourier

Els elements de E'_M s'anomenen ultradistribucions, que han estat estudiades per diferents autors en relació amb les equacions de convolució ([4], [39], [40]). Molts problemes ens interessarà plantejar-los per dualitat, i per tant necessitem conèixer bé E'_M. La millor manera de fer-ho és, mitjançant una transformació de Fourier, pensar-ho com un espai de funcions enteres. Tot el que segueix és substancialment a [37], [45] .

Per a $z \in \mathbb{C}$ i $T \in E'_M(r)$ es defineix (igual que per a $E'(r)$)

$$\hat{T}(z) = T(e_z) \quad ,$$

on e_z és la funció $e_z(x) = \exp(ixz)$, que és a $E_M(r)$ (sempre amb la hipòtesi $M_n^{1/n} \longrightarrow \infty$), de manera que té sentit la definició de $\hat{T}$. $\hat{T}$ es diu la transformada de Fourier de T . Veurem ara que la convergència de la sèrie

$$\sum_n \frac{(ixz)^n}{n!}$$

cap a $e_z(x)$ ho és per la topologia de $E_M(r)$. Això voldrà dir que

$$\hat{T}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} \; T(x \mapsto x^n) \quad ,$$

i, per tant, que $\hat{T}$ és una funció entera (també podriem veure que quan $w \longrightarrow z$, $(w-z)^{-1}(e_w - e_z)$ tendeix a la funció $x \longmapsto ixe_z(x)$ per la topologia de $E_M(r)$, per concloure que $\hat{T}$ és entera i que $\hat{T}'(z) = T(x \longmapsto ixe_z(x))$). Posem, fix z,

$$a_k(x) = \sum_{n \geq k} \frac{(ixz)^n}{n!} \quad .$$

Volem veure que $a_k \longrightarrow 0$ a $E_M(r)$. Com que $a_k \longrightarrow 0$ a $E(r)$, segons (0.1.1.) és suficient de veure que (a_k) és un conjunt acotat de $E_M(r)$.

$$a_k^{(m)}(x) = \sum_{n \geq k,m} \frac{x^{n-m}(iz)^n}{(n-m)!} = (iz)^m \sum_{n \geq k,m} \frac{(xzi)^{n-m}}{(n-m)!} \quad ,$$

i

$$\|a_k^{(m)}\|_r \leq |z|^m \exp(r|z|),$$

$$p_{r,\varepsilon}(a_k) = \sup_m \frac{\|a_k^{(m)}\|_r}{\varepsilon^m M_m} \leq \exp(r|z|) \quad \lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \quad .$$

Això últim demostra que (a_k) és acotat. És clar que $\hat{T}$ no és una funció entera qualsevol, sinó que el seu creixement és controlat. Perquè com que $T \in E_M'(r)$, és

$$|T(f)| \leq A \; p_{r,\varepsilon}(f) \quad , \qquad \forall f \in E_M(r),$$

per a uns certs $A, \varepsilon > 0$. Per a $f = e_z$, $\|e_z^{(n)}\|_r = |z|^n \exp r|\mathrm{Im}\, z|$ i $p_{r,\varepsilon}(e_z) = \lambda_M(|z|/\varepsilon) \exp r|\mathrm{Im}\, z|$ i trobem

$$(10) \qquad |\hat{T}(z)| \leq A \; \lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp r|\mathrm{Im}\, z| \quad , \quad z \in \mathbb{C} \; .$$

Sigui $H_M(r)$ l'espai de les funcions enteres F que satisfan una acotació com (10), per a uns certs $A, \varepsilon > 0$. L'espai $H_M(r, \varepsilon)$ de les que satisfan (10) amb ε fix, és a dir, les F t.q.

$$|F(z)| = O\left(\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp r|\mathrm{Im}\, z| \right) \quad ,$$

és un espai de Banach amb norma

$$\|F\|_{r,\varepsilon} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|F(z)|}{\lambda_M(|z|/\varepsilon) \exp r|\mathrm{Im}\, z|} .$$

$H_M(r)$ és la unió d'aquests espais de Banach i hi podem considerar per tant la topologia inductiva.

Així hem vist que si $T\in E_M'(r)$, aleshores $\hat{T}\in H_M(r)$. La resta d'aquest apartat està dedicada a demostrar el recíproc. Més concretament, a demostrar el següent teorema tipus Paley-Wiener:

<u>(0.3.1.) Teorema</u>.- La transformada de Fourier $T\longmapsto\hat{T}$ és un isomorfisme topològic entre el dual fort de $E_M(r)$ i l'espai $H_M(r)$.

Si H_M designa la unió dels $H_M(r)$ amb la topologia inductiva, és a dir, l'espai de les funcions enteres F t.q.

$$|F(z)| = O(\lambda_M(O|z|) \exp O|\mathrm{Im}\, z|),$$

tindrem de la mateixa forma:

<u>(0.3.2.) Teorema</u>.- La transformada de Fourier $T\longmapsto\hat{T}$ és un isomorfisme topològic entre el dual fort de E_M i l'espai H_M.

Fixem-nos que a la definició d'aquests espais podem sustituir λ_M per una funció del mateix ordre. Una d'aquestes seria la funció

$$\mu_M(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{M_n} ,$$

que és la que sortiria al utilitzar les normes $q_{r,\varepsilon}$ en lloc de les $p_{r,\varepsilon}$. Per exemple, quan $M_n = n!$ és $\mu_M(t) = \exp t$ i tots els $H_M(r)$ i H_M mateix resulten ser l'espai de les funcions enteres de tipus exponencial, d'acord amb el teorema de Borel sobre funcionals analítics ([33]).

Una vegada demostrat que $T \longmapsto \hat{T}$ és una bijecció, el fet de la igualtat de les topologies, la forta i la inductiva, es pot deduir de la manera següent: $E_M(r)$, E_M són espais de tipus FS i, segons [33], la topologia forta dels seus duals és una topologia LF. Aleshores el que cal veure és que dues topologies LF coincideixen. Però això és conseqüència d'un fet general fàcilment deduïble d'un teorema general de gràfica tancada ([15, pg. 148]) segons el qual dues topologies LF sobre un espai de funcions més fines que la topologia de la convergència puntual coincideixen (és a dir, les LF-topologies són tan rígides com les F-topologies). En el nostre cas, això últim és immediat.

Així doncs, és suficient de veure que $T \longmapsto \hat{T}$ és una bijecció tant a (0.3.1.) com a (0.3.2.). Però de la injectivitat a (0.3.1.) deduïm que els e_z són densos a $E_M(r)$ i en particular E_M és dens a $E_M(r)$. Aleshores el dual de E_M és la unió dels duals dels $E_M(r)$ (segons Köthe, el límit projectiu $\varprojlim E_M(r)$ és reduït). Per tant, és suficient de veure $T \longmapsto \hat{T}$ és una bijecció a (0.3.1.) i per això que $\hat{T} = 0$ implica $T = 0$ i que si $F \in H_M(r)$ hi ha $T \in E'_M(r)$ t.q. $\hat{T} = F$. Segueixen ara una sèrie de fets generals sobre funcionals lineals continus a $E_M(r)$, per a arribar a conèixer l'expressió general d'una $T \in E'_M(r)$.

Per a $f \in E(r)$ i $m \in N$, posem $\|f\|_{r,m} = \sup_{0 \leq j \leq m} \|f^{(j)}\|_r$. Sigui A l'espai de les successions $\bar{f} = (f_n)$, amb $f_n \in E(r)$ i t. q.

$$Q_{r,m,\varepsilon}(\bar{f}) = \sum_{n \geq 0} \frac{\|f_n\|_{r,m}}{\varepsilon^n M_n} < \infty \qquad ,$$

$\forall m \in N, \forall \varepsilon > 0$. A és un espai de Fréchet i

$$f \longmapsto \bar{f} = (f^{(n)})$$

identifica $E_M(r)$ amb un subespai tancat de A com ho demostren les relacions

$$Q_{r,0,\varepsilon}(\bar{f}) = q_{r,\varepsilon}(f) \quad ,$$

i

$$Q_{r,m,\varepsilon}(\bar{f}) = \sum_{n \geq 0} \frac{\|f^{(n)}\|_{r,m}}{\varepsilon^n M_n} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\|f^{(n)}\|_r + \|(f')^{(n)}\|_r + \ldots + \|(f^{(m)})^{(n)}\|_r}{\varepsilon^n M_n}$$

$$= q_{r,\varepsilon}(f) + q_{r,\varepsilon}(f') + \ldots\ldots + q_{r,\varepsilon}(f^{(m)}) \qquad (\text{ per a } m > 0 \text{ }) \text{ },$$

juntament amb la continuïtat de la derivació a $E_M(r)$.

Suposem que T és un funcional lineal continu sobre A,

$$|T(\bar{f})| \leq A \; Q_{r,m,\varepsilon}(\bar{f}) \text{ , } \quad \forall \, \bar{f} \in A \quad .$$

Si i_n: $E(r) \longmapsto A$ és el que posa $E(r)$ en el lloc n i 0 en els altres $T_n = T \circ i_n$ són elements de $E'(r)$ t. q.

$$(11) \qquad |T_n(f)| \leq A \; \frac{\|f\|_{r,m}}{\varepsilon^n M_n} \quad \forall f \in E(r), \; n=0,1,2,\ldots\ldots,$$

i

(12) $$T(\bar{f})= \sum_{n\geq 0} T_n(f_n) \quad .$$

Recíprocament, si els T_n compleixen (11), (12) defineix un funcional lineal continu sobre A . Aleshores tindrem:

" L'expressió general d'un funcional lineal i continu sobre $E_M(r)$ és

$$T(f)= \sum_{n\geq 0} T_n(f^{(n)}) \qquad , \quad f \in E_M(r) \quad ,$$

on $T_n \in E'(r)$ estan lligades per la condició (11), és a dir, que la successió $(\varepsilon^n M_n T_n)$ sigui equicontinua per a un $\varepsilon>0$, o equivalentment, acotada a $E'(r)$ per a un $\varepsilon>0$."

Ara aplicarem la transformació de Fourier a aquest enunciat, per saber quina és l'expressió general d'una $\hat{T}$ amb $T \in E'_M(r)$. Primer de tot, cal observar que $E'(r)$ s'identifica amb l'espai de distribucions amb suport dins K_r. En efecte, si T és una distribució amb suport dins K_r, és conegut que $T(f)=0$ si $f^{(n)}(0)=0\ \forall n, \forall x\in K_r$; això vol dir que T s'anul·la al nucli de l'aplicació restricció

$$E \longrightarrow E(r)$$

$$f \longmapsto f_{|K_r}$$

i que, per tant, factoritza a la imatge; ara bé, aquesta és E(r), de manera que podem entendre que $T \in E'(r)$. En l'altre sentit és evident. Així, el teorema clàssic de Paley-Wiener caracteritza les transformades de Fourier dels elements de $E'(r)$:

" La transformació de Fourier és un isomorfisme topològic de $E'(r)$ amb l'espai de les funcions enteres F que satisfan

(13) $$\left|F(z)\right| \leq A\,(1+|z|)^{m} \exp r\left|\operatorname{Im} z\right| \quad ,$$

per a uns certs A, m (aquest últim amb la topologia LF evident). "

(La raó per la que en lloc de A no es considera l'espai de successions (f_n) amb f_n funcions continues tals que

$$\sum_{n} \frac{\|f_n\|_r}{\varepsilon^{n} M_n} < \infty$$

és perquè no hi ha un anàleg d'aquest teorema per a mesures).

En aquest últim espai un acotat és aquell pel que serveixen la mateixa A i m de (13) per a tots els elements perquè éssent un LF complet, un acotat és un que ho és en un dels termes ([15], pg. 148).

Per últim, $e_z^{(n)} = (iz)^n\, e_z$. Amb tot això, apliquem la transformació de Fourier a l'enunciat anterior i obtenim:

" L'expressió general d'una $\hat{T}(z)$ amb $T \in E'_M(r)$ és

(14) $$\hat{T}(z) = \sum_{n \geq 0} F_n(z)\ (iz)^n \quad ,$$

on $\hat{T}_n = F_n$ són funcions enteres t.q. existeix $\varepsilon > 0$ de manera que $\varepsilon^n M_n F_n$ satisfà (13) amb A i m independents de n. Breument, F_n són funcions enteres t.q.

(15) $$\left|F_n(z)\right| \leq \frac{A}{\varepsilon^{n} M_n}\ (1+|z|)^{m} \exp r\left|\operatorname{Im} z\right| \ , \quad \forall z \in \mathbb{C} ,$$

per a uns certs A, ε, m. "

Demostrem ara que $T \longmapsto \hat{T}$ és injectiva. Suposem, doncs, que $\hat{T}(z) = 0$ i demostrarem que $T(f) = 0 \ \forall f \in E_M(r)$. Si les F_n són les de (14), considerem la funció de dues variables complexes

$$G(z, w) = \sum_{n \geq 0} F_n(z)\,(i\,w)^n .$$

Com que F_n satisfà (15),

$$\left| G(z, w) \right| \leq A\,(1+|z|)^m\,\mu_M\left(\frac{|w|}{\varepsilon}\right) \exp r\,|\mathrm{Im}\,z| ,$$

i com que μ_M i λ_M són del mateix ordre, podem sustituir μ_M per λ_M

(16) $$\left| G(z, w) \right| \leq A\,(1+|z|)^m \quad \lambda_M\left(\frac{|w|}{\varepsilon}\right) \exp r\,|\mathrm{Im}\,z| .$$

La hipòtesi $\hat{T}(z) = 0$ significa $G(z, z) = 0$. Per tant, $G(z, w) = i\,(z - w)\,H(z, w)$ amb H entera. H també satisfà una acotació com (16) perquè per a $|z-w| \geq 1$ és evident i per a $|z-w| \leq 1$ és conseqüència del principi del mòdul màxim.

Desenvolupem $H(z, w)$ en sèrie de potències de $(i\,w)$:

$$H(z, w) = \sum_{n \geq 0} G_n(z)\,(i\,w)^n .$$

Per les desigualtats de Cauchy, per a cada $R > 0$,

$$\left| G_n(z) \right| \leq \frac{\sup_{|w|=R} \left| H(z, w) \right|}{R^n} \leq A\,(1+|z|)^m \exp r\,|\mathrm{Im}\,z| \ \frac{\lambda_M\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)}{R^n},$$

i

$$\left| G_n(z) \right| \leq A\,(1+|z|)^m \exp r\,|\mathrm{Im}\,z| \ \inf_{R>0} \ \frac{\lambda_M\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)}{R^n} =$$

$$= \frac{A}{\varepsilon^n} (1+|z|)^m \exp r|\mathrm{Im}\, z| \inf_{R>0} \frac{\lambda_M(\frac{R}{\varepsilon})}{(\frac{R}{\varepsilon})^n} =$$

$$= \frac{A}{\varepsilon^n} (1+|z|)^m \exp r|\mathrm{Im}\, z| \left(\sup_{t>0} \frac{t^n}{\lambda_M(t)}\right)^{-1},$$

i per (7),

$$|G_n(z)| \leq \frac{A}{\varepsilon^n M_n} (1+|z|)^m \exp r|\mathrm{Im}\, z|, \quad \forall n, \quad \forall z .$$

Per tant, també $G_n = \hat{S}_n$ amb $S_n \in E'(r)$ que satisfan (11) . Ara,

$$G(z, w) = i(z-w) H(z, w) = i(z-w) \sum_{n \geq 0} G_n(z)(iw)^n =$$

$$= iz\, G_o(z) + \sum_{n \geq 1} (iz\, G_n(z) - G_{n-1}(z))(iw)^n ,$$

demostren que $F_o(z) = iz\, G_o(z)$, $F_n(z) = iz\, G_n(z) - G_{n-1}(z)$ per a $n \geq 1$.

Com que $G_n = \hat{S}_n$, $iz\, G_n(z)$ és la transformada de $f \longmapsto S_n(f')$,

de manera que

$$T_n(f) = S_n(f') - S_{n-1}(f), \quad T_o(f) = S_o(f') .$$

Ara,

$$T(f) = \sum_{n \geq o} T_n(f^{(n)}) = S_o(f') + \sum_{n \geq 1} S_n(f^{(n+1)}) - S_{n-1}(f^{(n)}) = 0 ,$$

$\forall f \in E_M(r)$.

Demostrem ara que $T \longmapsto \hat{T}$ és exhaustiva. El que cal veure és que tota $F \in H_M(r)$ es pot escriure com (14) amb les F_n de manera que compleixin (15). Per a fer això, és suficient de demostrar que existeix $G(z, w)$ tal que compleix (16) i de manera que $G(z, z) = F(z)$ perquè, aleshores, desenvolupant $G(z,w)$ en potències de (i w), dóna el que volem, tal com acabem de fer fa un moment. Emprarem el següent lema que és una modificació del teorema 4.4.3.de [18]([37]).

Lema.- Siguin S i S' $\mathbb{C}$-subespais complementaris de $\mathbb{C}^n$ i φ una funció plurisubharmònica t. q.

$$|\varphi(\eta + \eta') - \varphi(\eta)| \leq C \quad \text{si } \eta \in \mathbb{C}^n,\ \eta' \in S' \text{ i } |\eta'| \leq 1 ,$$

per a una certa constant C. Aleshores, si u és una funció analítica a S t. q.

$$\int_S |u|^2 \exp -\varphi \; d\sigma < \infty \quad ,$$

on $d\sigma$ designa la mesura de Lebesque a S, hi ha una funció analítica U a $\mathbb{C}^n$ t.q. U = u a S i

$$\int_{\mathbb{C}^2} |U|^2 e^{-\varphi} (1+|\eta|^2)^{-3k} \, dm(\eta) \leq C' \int_S |u|^2 e^{-\varphi} d\sigma \ ,$$

on dm és la mesura de Lebesque a $\mathbb{C}^n$, k la dimensió de S' i C' només depèn de C //

Suposem, doncs, que $F \in H_M(r)$, és a dir, que F satisfà (10). Utilitzarem el lema amb

$$S = \left\{ (z,z)\ ,\ z \in \mathbb{C} \right\} \quad , \quad S' = \left\{ (z',0)\ ,\ z' \in \mathbb{C} \right\}$$

$$u(z,z) = F(z),$$

$$\varphi(z,w) = 2r\,|\mathrm{Im}\, z| + 2 \log \lambda_M\left(\frac{|w|}{\varepsilon}\right) + 2 \log (1+|w|)^2.$$

És clar que el 1^{er} i 3^{er} termes de la dreta són funcions pluri-subharmòniques emprant els criteris 1.6., 2.6 de [18]. També,

$$\log \lambda_M\left(\frac{|w|}{\varepsilon}\right) = \sup_n \left(n \log |w| - n \log \varepsilon - \log M_n \right)$$

és subharmònica per 1.6.2. de [18]. Per tant, φ és plurisubharmònica. Per a $|z'| \leq 1$,

$$\left| \varphi(z+z',w) - \varphi(z,w) \right| = 2r \left| \left| \mathrm{Im}\, z+z' \right| - \left| \mathrm{Im}\, z \right| \right| \leq 2r.$$

Finalment, de (10)

$$|u(z,z)|^2\ e^{-\varphi} = O\left((1+|z|)^{-4} \right).$$

Així es compleixen totes les hipòtesis del lema i hi ha per tant $G(z,w)$ entera tal que $G(z,z) = F(z)$ i

$$\int_{\mathbb{C}^2} |G(z,w)|^2\ e^{-\varphi}\ (1+|z|^2+|w|^2)^{-3}\ dm < \infty .$$

Cal convertir ara aquesta estimació en una del tipus (16) . Tenim

$$\left|G(z_o, w_o)\right|^2 = \left|\frac{1}{\tau} \int_{\|(z,w)-(z_o,w_o)\| < 1} G(z,w)\, e^{-\varphi/2}\, e^{\varphi/2} (1+|z|^2+|w|^2)^{-3/2} \cdots (1+|z|^2+|w|^2)^{3/2}\, dm\right|^2$$

$$\leq \frac{1}{\tau} \int \left|G(z,w)\right|^2 e^{-\varphi} (1+|z|^2+|w|^2)^{-3}\, dm$$

$$\sup\left\{ e^{\varphi} (1+|z|^2+|w|^2)^3, \quad \|(z,w)-(z_o,w_o)\| \leq 1 \right\}$$

(on τ és el volum de la bola unitat de $\mathbb{C}^2$). Ara,

$$\left|G(z_o,w_o)\right|^2 \leq \text{const.} \sup_{|z-z_o|<1,\ |w-w_o|<1} (1+|z|^2+|w|^2)^3 \lambda_M^2\left(\frac{|w|}{\varepsilon}\right) (1+|w|)^4 \exp 2r\,|\operatorname{Im} z|$$

$$\leq \text{const}\, (1+|z_o|^2+|w_o|^2)^3 \lambda_M^2\left(\frac{|w_o|+1}{\varepsilon}\right) (2+|w_o|)^4 \exp 2r\,|\operatorname{Im} z_o|,$$

i redefinint $\varepsilon > 0$, trobem que,

$$\left|G(z,w)\right| = O\left((1+|z|)^m (1+|w|)^n \lambda_M\left(\frac{|w|}{\varepsilon}\right) \exp r\,|\operatorname{Im} z|\right).$$

Si ara veiem que $(1+|w|)^n$ es pot "absorbir" a $\lambda_M\left(\frac{|w|}{\varepsilon}\right)$, en el sentit que

$$(1+|w|)^n \lambda_M\left(\frac{|w|}{\varepsilon}\right) = O(\lambda_M(C|w|)),$$

aleshores ja haurem acabat. Per això és suficient de veure que $\lambda_M(t)$ absorbeix $1+t$, és a dir, que absorbeix t. Però de (2),

$$t\,\lambda_M(t)=\sup_n \frac{t^{n+1}}{M_n} \leq \frac{A}{H} \sup_n \frac{t^{n+1} H^{n+1}}{M_{n+1}} \leq \frac{A}{H}\,\lambda_M(Ht).$$

Amb això acaba la demostració dels teoremes (0.3.1.) i (0.3.2.). //

Una conseqüència dels teoremes (0.3.1.),(0.3.2.) és que $E_M(r)$, E_M són espais analíticament uniformes (AU-spaces), segons la terminologia d'Ehrenpreis ([4],[11] i [45]). En el nostre cas això vol dir que existeix una família $\mathbb{K}$ de funcions continues i positives a $\mathbb{C}$ t.q. $|F(z)| / k(z) \longrightarrow 0$ quan $|z| \longrightarrow \infty$, $\forall F \in H_M(r)$ (resp. $\forall F \in H_M$) i $\forall k \in \mathbb{K}$ i la topologia de $H_M(r)$ (resp. H_M) coincideix amb la definida per les normes

$$\|F\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|F(z)|}{k(z)} \quad ,$$

([45]). En el cas que ens ocupa la família $\mathbb{K}$ és, per a $H_M(r)$ la de totes les funcions contínues positives $k(z)$ que dominen $\lambda_M(|z|/\varepsilon)\exp r|\mathrm{Im}\, z|$ $\forall \varepsilon > 0$, és a dir, les k tals que

$$\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp r|\mathrm{Im}\, z| = O\,(\,k(z)\,) \quad , \tag{17}$$

$\forall \varepsilon > 0$, i per a H_M la família de les k que dominen $\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)\exp r|\mathrm{Im}\, z|$ $\forall \varepsilon > 0$, $\forall r > 0$, és a dir, les k tals que (17) és vàlid $\forall \varepsilon > 0$, $\forall r > 0$ ([45],[46]).

D'aquest fet es pot deduir una representació dels elements de $E_M(r)$, E_M com a integrals de Fourier en el sentit funcional. Si $f \in E_M$, f és un funcional lineal continu sobre H_M, i existeixen una constant $C > 0$ i una k que domina totes les $\lambda_M(|z|/\varepsilon)\exp r|\operatorname{Im} z|$ t. q.

$$\left|\langle f, F\rangle\right| \leq C \;\|F\|_k \quad .$$

$\forall F \in H_M$. Podem estendre, per Hahn-Banach, aquest funcional a l'espai L_k de les funcions F contínues a $\mathbb{C}$ t. q. $|F(z)|/k(z) \longrightarrow 0$ quan $|z| \longrightarrow \infty$. Com que tot funcional sobre L_k és de la forma

$$F \longmapsto \int_{\mathbb{C}} \frac{F(z)}{k(z)}\, d\mu(z) \quad ,$$

per a una certa mesura acotada μ a $\mathbb{C}$, arribem a la representació

(18) $$\langle f, F\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{F(z)}{k(z)}\, d\mu(z) \quad .$$

Així, tota $f \in E_M$ determina una k i una μ de manera que (18) val $\forall F \in H_M$. Si $F = \hat{T}$, és a dir, $F(z) = T(e_z)$, (18) és

$$T(f) = \int_{\mathbb{C}} \frac{T(e_z)}{k(z)}\, d\mu(z) \quad ,$$

$\forall$ T, i això significa que

$$f = \int_{\mathbb{C}} \frac{e_z}{k(z)}\, d\mu(z) \quad ,$$

en el sentit funcional. Quan $T = \delta_x$, trobem la representació de f

$$(19) \qquad f(x) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(ixz)}{k(z)} \, d\mu(z) \, .$$

Aquesta és la forma general d'una $f \in E_M$, ja que de (19),

$$f^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{C}} \frac{(iz)^n \exp(ixz)}{k(z)} \, d\mu(z)$$

(el fet que k domini tota $\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp r\,|\operatorname{Im} z|$ i per tant tot $P(|z|) \exp r\,|\operatorname{Im} z|$ amb P polinomi, garanteix la convergència de les integrals i permet de derivar sota el signe integral) . Donats $r, \varepsilon > 0$ és

$$\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp r\,|\operatorname{Im} z| \leq C\, k(z) \, ,$$

i per a $|x| \leq r$,

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \|\mu\| \sup_z \frac{|z|^n \exp r\,|\operatorname{Im} z|}{k(z)} \leq C\, \|\mu\| \sup_z \frac{|z|^n}{\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)} =$$

$$= C\, \|\mu\|\, \varepsilon^n \sup_z \frac{(|z|/\varepsilon)^n}{\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)} = C\|\mu\|\, \varepsilon^n M_n \quad ,$$

on hem tornat a fer servir (7) . Ara, tenim

$$\|f^{(n)}\|_r \leq C(\varepsilon)\, \varepsilon^n M_n \quad ,$$

i $f \in E_M$. Tot el mateix seria vàlid per a una $f \in E_M(r)$, només que en aquest cas k dominaria $\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp r\,|\operatorname{Im} z|$, $\forall \varepsilon > 0$.

Una representació semblant a la (19) es pot deduir sense utilitzar que els espais són A.U. Raonant de la mateixa forma, una $f \in E_M$ és un funcional lineal continu sobre H_M. Com que aquest és el límit inductiu dels $H_M(r, \varepsilon)$

$$H_M(r, \varepsilon) \xrightarrow{f} \mathbb{C} ,$$

és continu $\forall r$, $\forall \varepsilon$. De la mateixa forma arribem a veure que $\forall r, \forall \varepsilon$ existeix una mesura $\mu_{r,\varepsilon}$ acotada a $\mathbb{C}$ t.q., per a $|x| \leq r$,

$$\text{(19 bis)} \qquad f(x) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(ixz)}{\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp r\,|\operatorname{Im} z|}\, d\mu_{r,\varepsilon}(z) ,$$

De la mateixa forma faríem per a $E_M(r)$. Les representacions (19) són força útils i les farem servir alguna vegada.

Una altra conseqüència de (0.3.2) és que els polinomis són densos a $E_M(r)$, E_M, perquè els e_z ho són i hem vist que el desenvolupament de Taylor de e_z és convergent per la topologia de $E_M(r)$, E_M (una demostració directa d'aquest fet es troba a [37]).

0.4.- El teorema de Denjoy-Carleman

Ja hem vist abans que quan $M_n = n!$, E_M és l'espai H de les funcions enteres. Per tant, $f \in E_M$ i $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n$ implica $f = 0$. L'any 1912, Hadamard proposà el problema de trobar condicions necessàries i suficients sobre la successió M a fi que $f^{(n)}(0) = 0$ impliqui $f = 0$. Una classe de funcions diferenciables que compleix això es diu quasi-analítica. Diferents autors tractaren el problema (Denjoy, Carleman, Ostrowski, Bang, Mandeljbrojt), si bé el resultat final es coneix com el teorema de Denjoy-Carleman. Aquest teorema caracteritza quan la classe

$$C\{M_n\} = \{ f \in E \,/\, \exists C, \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \|f^{(n)}\|_{\mathbb{R}} \leq C \varepsilon^n M_n \}$$

(que està formada per funcions amb totes les derivades acotades a $\mathbb{R}$) és quasi-analítica però, amb petites modificacions tècniques, la mateixa demostració val per a E_M.

Observem també que per a E_M, la no quasi-analiticitat equival a l'existència d'una funció a E_M amb suport compacte, no idènticament nul·la: si $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n$ i $f(\alpha) \neq 0$ amb $\alpha > 0$, sigui g la funció que és 0 per a $t \leq 0$ i igual a f per a $t \geq 0$. És clar que $g \in E_M$; la funció

$$h(t) = g(t+\alpha)\, g(\alpha - t),$$

està a E_M, ja que E_M és una àlgebra, $h(t) = 0$ si $t \leq -\alpha$ o $\alpha \leq t$ és a dir, spt. $h \subset [-\alpha, \alpha]$ i $h(0) = g^2(\alpha) = f^2(\alpha) > 0$.

Enunciem ara el teorema de Denjoy-Carleman ([2], [30], [39])

<u>(0.4.1.) Teorema de Denjoy-Carleman.-</u> La classe E_M és quasi-analítica si i només si es compleix una de les condicions següents, que són equivalents:

(a) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty$ (b) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} = \infty$

(c) $$\int_0^{\infty} \frac{\log \lambda_M(t)}{1+t^2}\, dt = \infty$$

(d) $$\int_0^{\infty} \frac{\log \mu_M(t)}{1+t^2}\, dt = \infty \qquad . //$$

A partir del teorema de Denjoy-Carleman, les classes E_M queden repartides en tres grups:

I) <u>El grup analític</u>, és a dir, les E_M t.q. $E_M \subset H$, o equivalentment, segons (0.2.1.),

$$\sup_n \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty .$$

II) <u>El grup quasi-analític</u> (escrivim q.a.) <u>no analític</u>, és a dir, les E_M amb M_n tals que compleixen a) i

$$\sup_n \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \infty .$$

III) <u>El grup no quasi-analític</u> (escrit n.q.a.), és a dir, les E_M amb M_n tals que compleixen

$$\sum_n \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty ,$$

o una de les equivalents .

Com exemples més característics de cada un dels tres grups tenim : (totes compleixen les hipòtesis (1) i (2))

I) $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $\alpha \leq 1$ puix (a) dóna $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$.

II) $M_n = (n \log n)^n$ perquè

$$\left(\frac{M_n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \log n$$

no està acotat i (b) dóna $\sum \frac{1}{n \log n}$ que és divergent .

III) $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $\alpha > 1$ puix (a) dóna $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$. Aquestes es diuen les classes de Gevrey.

Quan E_M sigui no quasi-analítica, la notació D_M indicarà el subespai de E_M format per les funcions amb suport compacte. La topologia que E_M indueix a D_M és definida per les normes

$$p_{\varepsilon}(\varphi) = \sup \frac{\|\varphi^{(n)}\|_{\mathbb{R}}}{\varepsilon^n M_n} , \quad \varepsilon > 0 , \quad \varphi \in D_M .$$

Donarem ara una demostració del teorema de Denjoy-Carleman en el context del teorema (0. 3. 2.), que també necessitarem en el capítol 2 :

Que E_M sigui quasi-analítica, és a dir,

$$f \in E_M, \quad f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \Rightarrow f = 0 ,$$

equival a que $\delta^{(n)}$ sigui un conjunt total a E_M', perquè el dual de

E'_M és E_M, al ser reflexiu (tot FS és reflexiu). Com que

$$(\delta^{(n)})^{\wedge}(z)=\delta^{(n)}(x \longrightarrow \exp(ixz)) = (-iz)^n$$

el teorema (0. 3. 2.) ens diu que E_M és quasi-analítica si i només si els $(iz)^n$ formen un conjunt total a H_M, és a dir, si i només si els polinomis són densos a H_M.

Suposem que E_M és q. a. , és a dir, que els polinomis són densos a H_M. En particular,

$$\lim P_i(z) = \exp(-iz)$$

a H_M per a uns certs polinomis P_i. Fixem una $k(z)$ que domini tota $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp r\,|\mathrm{Im}\, z|$; pasant a una part cofinal, podem suposar que

$$\| P_i \|_k \leq C \;,$$

(només per a aquesta k), és a dir,

$$|P_i(z)| \leq C \;\; k(z)$$

$\forall\, i \quad z \in \mathbb{C}$. Considerem ara la fórmula

$$\log |P_i(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \log |P_i(t)|}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \quad , \; z=x+iy \;,\; y>0$$

(que és vàlida per a tota funció entera de tipus exponencial zero, veure [5] , [29] o bé el darrer Capítol 6).

Junt amb l'anterior, arribem a

$$\log \left|P_j(z)\right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \log C + \log\ k(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt =$$

$$= \log C + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\ \log\ k(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \quad , \ z=x+iy\ ,\ y>0\ ,$$

(suposem que $k(t) \geq 1$; la integral anterior és en sentit general, pot prendre valor $+\infty$). Pasant ara al límit, trobem

$$\log \left|\exp(-iz)\right| \leq C + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\ \log\ k(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt\ ,\ z=x+iy\ ,\ y>0$$

és a dir,

$$y \leq C + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\ \log k(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \quad , \forall\, x,\ \forall\, y>0\ .$$

Especificant a $x=0$ i dividint per y

$$1 \leq \frac{C}{y} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log\ k(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt =$$

$$= \frac{C}{y} + \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\log\ k(t)}{t^2 + y^2}\, dt \quad , \forall\, y>0.$$

Si fos $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log \lambda_M(t)}{1 + t^2}\, dt < \infty$, podriem construir una funció $k(z)$ que domina $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp r \left|\mathrm{Im}\ z\right| \forall \varepsilon, r$ i t. q. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log\ k(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt < \infty$ i hom arriba a contradicció fent $y \longrightarrow \infty$.

Pel recíproc és suficient de demostrar que exp (-iz) és aproximable per polinomis a H_M. En efecte: fixem $t \in \mathbb{R}$, i considerem

$$\Psi_t : H_M \longrightarrow H_M$$

$$F \longmapsto F_t$$

On $F_t(z) = F(tz)$. Com que, per a $t \neq 0$,

$$\| F_t \|_{|t|r,\, \varepsilon/|t|} = \sup_z \frac{|F_t(z)|}{\lambda_M\left(\frac{|t\ z|}{\varepsilon}\right) \exp |tr \ \operatorname{Im} z|}$$

$$= \sup_z \frac{|F(t\,z)|}{\lambda_M\left(\frac{|t\ z|}{\varepsilon}\right) \exp |tr \ \operatorname{Im} z|} = \| F \|_{r,\varepsilon} ,$$

Ψ_t és contínua. Aleshores, si $P_n(z) \longrightarrow \exp(-iz)$, també $P_n(t\,z) \longrightarrow \exp(-itz)$, és a dir, exp (itz) és aproximable per polinomis $\forall t$. Com que les funcions exp (itz), $t \in \mathbb{R}$, són denses a H_M (exp (itz) = $(\delta_t)\hat{}(z)$ i evidentment les δ_t són denses a E_M'), concluïm que els polinomis són densos a H_M.

Així cal veure que exp (-iz) és límit de polinomis a H_M. La prova que es dóna ara és una el·laboració de la demostració de Bang ([2]). El desenvolupament de Taylor

$$\exp(-iz) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-iz)^n}{n!},$$

no pot ser convergent a H_M ; si ho fos , pel raonament anterior , també ho seria

$$\exp(itz) = \sum_{n\geq 0} \frac{(itz)^n}{n!} \quad ,$$

$t\in\mathbb{R}$. Llavors , a la representació (19) podríem commutar per obtenir

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \int_{\mathbb{C}} \frac{(iz)^n}{k(z)}\, d\mu(z) \quad , \ f\in E_M \, , \ t\in\mathbb{R}$$

Però de la mateixa fórmula (19) hom veu que

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{(iz)^n}{k(z)}\, d\mu(z) = f^{(n)}(0) \ .$$

Aleshores , tindríem que

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \ f^{(n)}(0)$$

per a qualsevol $f\in E_M$, $t\in\mathbb{R}$, és a dir , que qualsevol $f\in E_M$ és entera, cosa evidentment absurda (hi han classes quasi-analítiques que contenen estrictament H , com la corresponent a $M_n = (\, n \log n\,)^n$) .

Això justifica que cal mirar altres tipus de desenvolupament de exp (−iz) . Aquests els proporciona la següent generalització de la fórmula de Taylor , deguda a Bang ([2], [30]) :

Lema. – " Si f és una funció de classe C^n a un interval I , $x_0 , \ldots , x_n \in I$, aleshores

$$f(x_o) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f^{(j)}(x_n) \int_{x_j}^{x_n} \int_{x_{j-1}} \cdots \int_{x_1} dx^j +$$

(20)

$$+ \sum_{j=o}^{n} (-1)^j \int_{x_{j-1}}^{x_j} f^{(j)}(t) \int_{x_{j-1}}^{t} \int_{x_{j-2}} \cdots \int_{x_1} dx^{j-1}\, dt \;.$$

($\int_{x_j}^{a} \int_{x_{j-1}} \cdots\cdots \int_{x_1}$ designa el valor 1 per a j= 0, $\int_{x_1}^{a} d\tau$ per a j=1

i $\int_{x_j}^{a} \left[\int_{x_{j-1}}^{\tau_{j-1}} \cdots\cdots \int_{x_2}^{\tau_2} \left(\int_{x_1}^{\tau_1} d\tau \right) d\tau_1 \cdots d\tau_{j-2} \right] d\tau_{j-1}$

en el cas general). //

Fixem z i apliquem el lema per a $f(x)= \exp(ixz)$, $x_o = -1$, $x_n = 0$. Tindrem

$$\exp(-iz) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (iz)^j \int_{x_j}^{0} \int_{x_{j-1}} \cdots\cdots \int_{x_1} dx^j + \tag{21}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \int_{x_{j-1}}^{x_j} (iz)^j \exp(itz) \int_{x_{j-1}}^{t} \int_{x_{j-2}} \cdots\cdots \int_{x_1} dx^{j-1}\, dt =$$

$$= P_n(z) + G_n(z) \;.$$

Tot rau en triar els x_k de manera que $G_n \longrightarrow 0$ a H_M quan $n \longrightarrow \infty$. Definim $\mu_n = M_{n-1} / M_n$, $n \geq 1$ i $\alpha_n = (\sum_{k=1}^{n} \mu_k)^{-1}$. La hipòtesi és, segons (a) de (0.4.1.), que $\alpha_n \xrightarrow[n]{} 0$. La bona elecció dels x_j és :

$$x_0 = -1,\ x_1 = -1 + \alpha_n \mu_1,\ x_2 = -1 + \alpha_n (\mu_1 + \mu_2), \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_j = -1 + \alpha_n \sum_{l=1}^{j} \mu_l, \ldots\ldots\ldots, x_n = -1 + \alpha_n \sum_{l=1}^{n} \mu_l = 0 .$$

Amb aquesta elecció dels x_j està demostrat a [30 pgs 111-112] el següent

<u>(0.4.2.) Lema</u>.-

$$\sum_{j=0}^{n} M_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}} \int_{x_{j-2}} \cdots \int_{x_1} dx^j \leq \text{const.} \sum_{j=0}^{n} \alpha_n^j \, e^j . //$$

Amb P_n i G_n definits per (21) i l'anterior elecció dels x_j, demostrarem que $G_n \longrightarrow 0$ a $H_M(1,1)$ i haurem acabat la demostració del teorema. Però,

$$\frac{|G_n(z)|}{\lambda_M(|z|) \exp|\operatorname{Im} z|} \leq \sum_{j=0}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{|z|^j \exp|\operatorname{Im} z|}{\lambda_M(|z|) \exp|\operatorname{Im} z|} \int_{x_{j-1}}^{t} \cdots \int_{x_1} dx^{j-1} dt$$

(el tros $\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{t} \int_{x_{j-2}} \cdots\cdots \int_{x_1} dx^{j-1}$ és positiu per a $x_{j-1} \leq t \leq x_j$).

Ara,

$$\left\| G_n \right\|_{1,1} = \sup_z \frac{|G_n(z)|}{\lambda_M(|z|)\exp|\mathrm{Im}\, z|} \leq \sum_{j=0}^{n} M_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}} \cdots \int_{x_1} dx^j$$

$$\leq \quad \text{const.} \sum_{j=0}^{n} \alpha_n^j \; e^j \quad .$$

(on hem utilitzat el lema (0.4.2.) i (7)). Com que $\alpha_n \longrightarrow 0$, és $\alpha_n e < 1$ per a n gran i

$$\left\| G_n \right\|_{1,1} \leq \text{const.} \sum_{0}^{\infty} \alpha_n^j \; e^j = \frac{\alpha_n e}{1-\alpha_n e} \qquad ,$$

per a n gran. Fent $n \longrightarrow \infty$, veiem que $\left\| G_n \right\|_{1,1} \longrightarrow 0$ i ja hem acabat. //

Bang ([2]) aplica el desenvolupament (20) directament a les funcions $f \in E_M$. Hem demostrat el teorema d'aquesta forma perquè aquest mateix mètode servirà en un capítol posterior per a obtenir d'una manera més còmoda propietats de convergència del desenvolupament de Taylor de les $f \in E_M$ (és més senzill d'avaluar $\sup\limits_z$ que suprems de funcions i de llurs derivades).

CAPÍTOL 1

LES CLASSES E_M, $E_M(r)$ COM A ÀLGEBRES TOPOLÒGIQUES

En aquest capítol tractem qüestions generals entorn de l'estructura d'àlgebra de Fréchet de $E_M(r)$, E_M. En el primer apartat calculem els espectres d'aquestes àlgebres. En el segon estudiem la qüestió de quan són localment multiplicativament convexes, qüestió que és important en estudiar qualsevol àlgebra de Fréchet. Finalment, el tercer apartat és dedicat a l'estudi de la inversibilitat, és a dir, de quan hom pot assegurar que $f^{-1} \in E_M$ si $f \in E_M$ i f no s'anul·la mai. Més endavant estudiarem més a fons cadascun dels tres grups separadament (el grup analític, el grup quasi-analític no analític i el grup no quasi-analític).

1.1.- L'espectre de $E_M(r)$, E_M.

Ací utilitzarem els teoremes (0.3.1.) i (0.3.2.) per calcular l'espectre de caràcters de $E_M(r)$, E_M (entenent com a caràcter un funcional lineal continu multiplicatiu). Si volem fer servir els teoremes (0.3.1.) i (0.3.2.) cal, primer de tot, expressar que T és un caràcter en termes de $\hat{T}$. Com que les funcions e_z, $z \in \mathbb{C}$, formen un conjunt total, T és un caràcter si i només si $\hat{T}(z+z') = \hat{T}(z) + \hat{T}(z')$. Ara bé, una funció entera F que satisfà

$F(z+z') = F(z)\,F(z')$ per a qualssevols $z, z' \in \mathbb{C}$ és de la forma $F(z) = \exp izw$ per a un cert $w \in \mathbb{C}$.

D'aquesta forma, si volem calcular, per exemple, Spec E_M, hem de buscar $w \in \mathbb{C}$ t.q. la funció $e_w(z) = \exp(izw)$ pertany a H_M, és a dir,

$$(1) \qquad \left|\exp(izw)\right| = O\left(\lambda_M(O|z|)\,\exp O\left|\operatorname{Im} z\right|\right).$$

Si $w = a - bi$ i especifiquem (1) a z real, tenim

$$\exp(b\,t) = O\left(\lambda_M(O|t|)\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

que és el mateix que

$$(2) \qquad \exp(t|b|) = O\left(\lambda_M(O\,t)\right), \quad t > 0 .$$

També, (2) implica (1): si $\exp(t|b|) \leq A\,\lambda_M\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $t > 0$, per a un $\varepsilon > 0$,

$$\left|\exp(iwz)\right| = \exp(-a \operatorname{Im} z)\left|\exp b\, z\right| \leq \exp|a|\left|\operatorname{Im} z\right| \exp|b|\,|z| \leq$$

$$\leq A\,\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp|a|\left|\operatorname{Im} z\right| ,$$

i se satisfà (1). Així, per a $w = a - bi$, $e_w \in H_M$ si i només si (2) és cert. Però si b compleix (2), aleshores tot altre també ho compleix. Això vol dir que Spec E_M és $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ i que Spec $E_M = \mathbb{C}$ si i només si (2) és cert amb $b = 1$, és a dir, si i només si

(3) $$\exp t = O(\lambda_M(Ot)), \quad t > 0 .$$

La funció $\exp t$ és la μ_N de la successió $N_n = n!$, i d'acord amb el teorema (0. 2. 1.) , (3) és equivalent a

$$\sup_n \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty ,$$

i a la inclusió $E_M \subset H = E_N$. Per tant,

<u>(1. 1. 1.) Proposició.-</u> Spec E_M és $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Spec $E_M = \mathbb{C}$ si i només si la classe E_M és analítica. //

De la mateixa forma podem calcular Spec $E_M(r)$. Ara busquem $w \in \mathbb{C}$ t. q.

(4) $$|\exp(izw)| = O(\lambda_M(O|z|) \exp r |\mathrm{Im}\, z|) .$$

Si $w \notin \mathbb{R}$ és un d'aquests, igual que abans, arribem a (3), $E_M(r) \subset E_N(r) = H$ $(N_n = n!)$ i Spec $E_M(r) = \mathbb{C}$. Si $w = a \in \mathbb{R}$ també ho satisfà i $|a| > r$, escrivim (4) per a $z = -it$ i arribem a

$$\exp at = O(\lambda_M(O|t|) \exp r|t|), \quad t \in \mathbb{R},$$

ó

$$\exp(|a|t) = O(\lambda_M(Ot) \exp rt), \quad t > 0 ,$$

és a dir,

$$\exp((|a| - r)\, t) = O(\ _M(O\, t), \quad t > 0 \ ,$$

i continuem exactament igual que abans.

<u>(1.1.2.) Proposició.-</u> Spec $E_M(r)$ és K_r ó $\mathbb{C}$. Spec $E_M(r)$ = $\mathbb{C}$ si i només si la classe $E_M(r)$ és analítica. //

Reunim les dues proposicions anteriors en un

<u>(1.1.3.) Teorema.-</u> En el cas analític, Spec E_M = = Spec $E_M(r)$ = $\mathbb{C}$. En altre cas, Spec $E_M(r)$ = K_r i Spec E_M = $\mathbb{R}$. //

Fixem-nos que, en particular, E_M i $E_M(r)$ són simultàniament analítiques o no. En aquest cas, és clar com un $w \in \mathbb{C}$ actua com a caràcter: tota funció f de la classe extén a $\mathbb{C}$ com a funció entera, a la qual continuo anomenant f i $w(f) = f(w)$. Com que totes les classes contenen x, també és clar que la topologia de Gelfand és, en tots els casos, la topologia usual. El teorema és un exemple més que l'espectre d'una àlgebra de funcions (en principi, de variable real) retroba el domini natural de definició de les funcions de l'àlgebra. El més significatiu és aquesta mena de salt brusc que hi ha en l'espectre: de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Per exemple, no podem esperar trobar, amb la definició (3) Cap 0, classes de funcions que tinguin bandes $|\mathrm{Im}\, z| \leq S$ com a domini natural de definició.

1.2.- La l.m.-convexitat.

Hom diu que una àlgebra A localment convexa és localment multiplicativament convexa (breument, l.m.-convexa), si la seva topologia pot ésser definida per una família de seminormes (q_i) t.q. $q_i(ab) \leq q_i(a)\, q_i(b)$ per a tot i, $a, b \in A$. (veure [34], [36] o [50]). El fet que una àlgebra l.c. sigui l.m.-convexa és força important, ja que per a aquestes hi ha desenvolupada una teoria general paral·lela a la de les àlgebres de Banach. El propòsit d'aquest apartat és de caracteritzar, en termes de la successió M, quan són l.m.-convexes les àlgebres E_M, $E_M(r)$. El resultat obtingut és el següent :

<u>(1.2.1.) Teorema.-</u> Són equivalents els enunciats següents:

(a) $E_M(r)$ és l.m.-convexa, $\forall r > 0$.

(b) E_M és l.m.-convexa .

(c) hi ha constants $A, B, K > 0$ tals que

(5) $$\lambda_M(mt) \leq A\, B^m\, \lambda_M(Kt)^m, \quad t > 0,\ m \in \mathbb{N}.$$

(d) la successió $B_n = \dfrac{M_n^{1/n}}{n!}$ és quasi-creixent, és a dir, hi ha $K>0$ t.q. $B_m \leq K\, B_n$ per a $m \leq n$.

(e) la successió $A_n = \left(\dfrac{M_n}{n!}\right)^{1/n}$ és quasi-creixent.

(f) si $f \in E_M(r)$ i ϕ és entera, $\phi \circ f \in E_M(r)$.

<u>Demostració.-</u>

(a) $\Rightarrow$ (b). És inmediat ja que E_M és el límit projectiu dels $E_M(r)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) . Sigui (q_n) un sistema de seminormes que defineix la topologia de E_M i t.q. $q_n(fg) \leq q_n(f)\, q_n(g)\ \forall f,g \in E_M$. Donada $p_{r,\varepsilon}$, hi ha n, A t.q.

$$p_{r,\varepsilon}(f) \leq A\ q_n(f)\ , \quad f \in E_M\ .$$

Per aquest n, hi ha $B > 0$ i una seminorma $p_{s,\delta}$ t.q.

$$q_n(f) \leq B\ p_{s,\delta}(f), \quad f \in E_M\ .$$

Aleshores,

$$p_{r,\varepsilon}(f_1 \cdot \ldots \cdot f_m) \leq A\ q_n(f_1 \cdot \ldots \cdot f_m) \leq A\ q_n(f_1) \ldots q_n(f_m) \leq$$

$$\leq A\ B^m\ p_{s,\delta}(f_1) \ldots\ p_{s,\delta}(f_m)\ ,$$

i, en particular,

$$p_{r,\varepsilon}(f^m) \leq A\ B^m\ p_{s,\delta}(f)^m\ .$$

Per a $f = e_t$ i $\varepsilon = 1$, això dóna

$$\lambda_M(m\,t) \leq A\ B^m \lambda_M(t/\delta)^m$$

que és (5) .

(c) $\Rightarrow$ (d). Per la fórmula (7) del Cap. 0

$$B_n = \frac{1}{n} \sup_{t>0} \frac{t}{\lambda_M(t)^{1/n}} , \quad n \in N .$$

Fixem m i prenem $n > m$; suposem primer que $m | n$, és a dir, $n = ms$. Com que $t = s \frac{t}{s}$, la relació (5) dóna

$$\lambda_M(t) \leq A \; B^s \lambda_M(K\, t/s)^s \leq A \; B^n \lambda_M(Kt/s)^s ,$$

on hem suposat sense pèrdua de generalitat que $B > 1$ i on hem fet servir que $s \leq n$. Prenem ara arrels n-simes :

$$\lambda_M(t)^{1/n} \leq A^{1/n} B \lambda_M(Kt/s)^{s/n} \leq C \lambda_M(K\, t/s)^{1/m} .$$

Ara,

$$B_n = \frac{1}{ms} \sup_{t>0} \frac{t}{\lambda_M(t)^{1/n}} \geq \frac{1}{C\; ms} \sup_{t>0} \frac{t}{\lambda_M(K\, t/s)^{1/m}} =$$

$$= \frac{1}{C\,K} \frac{1}{m} \sup_{t>0} \frac{K\, t/s}{\lambda_M(K\, t/s)^{1/m}} = \frac{1}{CK} B_m ,$$

novament per (7) del Cap. 0. Per tant, $B_m \leq C\,K\,B_n$ si $m | n$. En el cas general fem servir un truquet inspirat en [43]: posem $m\, s < n < m(s+1)$ i observem (veure apartat 0. 2.) que $n\, B_n$ és creixent. Aleshores,

$$B_n \geq B_{ms} \frac{m\, s}{n} \geq \frac{1}{CK} B_m \frac{m\, s}{m(s+1)} \geq \frac{B_m}{2\, C\, K} ,$$

i $B_m \leq 2CK\, B_n$ per a $m \leq n$.

(d) $\Rightarrow$ (e). És suficient d'adonar-se que $B_n / A_n = (n!)^{1/n} / n$ té un límit finit diferent de zero (per la fórmula de Stirling) i per tant queda acotat superiorment i inferior per nombres positius.

(e) $\Rightarrow$ (f). El punt de sortida és la fórmula de Faa di Bruno sobre les derivades d'una composició (veure [2]):

(6) $$(\phi o f)^{(n)}(x) = \sum_{\nu} k_{\nu}\, \phi^{(\mu)}(f(x))\, f^{(1)}(x)^{\nu_1} \ldots\ldots f^{(r)}(x)^{\nu_r} .$$

A (6), ν recorre el conjunt de r-ples $\nu = (\nu_1, \ldots\ldots, \nu_r)$, ν_i, $r \in N$ tals que $\nu_1 + 2\,\nu_2 + 3\,\nu_3 + \ldots\ldots + r\,\nu_r = n$ i $\mu = \nu_1 + \ldots\ldots + \nu_r$. Les k_{ν} són constants que tan sols depenen de ν .

Suposem que $f \in E_M(r)$ i $\phi \in H$. Fixem $\varepsilon > 0$. Tindrem

(7) $$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq p_{r,\varepsilon}(f)\ \varepsilon^n M_n \quad , \ |x| \leq r \ , \ \ n \in N .$$

Com que $f(K_r)$ és compacte, a cada $\delta > 0$ li correspon $C(\delta) > 0$ t. q.

(8) $$\left| \phi^{(\mu)}(f(x)) \right| \leq C(\delta)\ \delta^{\mu}\ \mu! \ , \ |x| \leq r \ .$$

Posant (7) i (8) a (6) i sustituint M_n per $A_n^n\, n!$, hom arriba a

$$\left| (\phi o f)^{(n)}(x) \right| \leq \sum_{\nu} k_{\nu}\, C(\delta)\, \delta^{\mu} \mu!\ p_{r,\varepsilon}^{\nu_1}(f)\ \ \varepsilon^{\nu_1} M_1^{\nu_1} \ldots\ldots p_{r,\varepsilon}^{\nu_r}(f)\, \varepsilon^{r\,\nu_r} M_r^{\nu_r} =$$

$$= C(\delta)\, \varepsilon^n \sum_{\nu} k_{\nu}\, (\delta\, p_{r,\varepsilon}(f))^{\mu}\, \mu!\, (A_1^1\ 1!)^{\nu_1} \ldots\ldots (A_r^r\ r!)^{\nu_r} \ , |x| \leq r, \ n \in N.$$

Ara utilitzem la hipòtesi $A_m \leq K A_n$ per a $m \leq n$ i escollim $\delta = p_{r,\varepsilon}(f)^{-1}$:

$$\left|(\phi o f)^{(n)}(x)\right| \leq C(\varepsilon K)^n A_n^n \sum_{\nu} k_\nu \mu! \, (1!)^{\nu_1} \ldots . (r!)^{\nu_r}, \; |x| \leq r, \; n \in N.$$

Veurem ara com

$$\sum_{\nu} k_\nu \mu! \, (1!)^{\nu_1} \ldots \ldots (r!)^{\nu_r}$$

creix amb n (veure [2]). Especialitzant (6) a $f(x) = x/1-x$, $\phi = f$ i $x=0$ hom troba que aquesta suma val exactament $2^{n-1} n!$. Ara, finalment

$$\left|(\phi o f)^{(n)}(x)\right| \leq C \, (\varepsilon K)^n \frac{M_n}{n!} \; 2^{n-1} \; n! = \frac{C}{2} \, (2\varepsilon K)^n \, M_n \, ,$$

per a $|x| \leq r$, $n \in N$, és a dir, $\phi o f \in E_M(r)$.

(f) $\Rightarrow$ (a). Pel teorema 13.8 de [50] , una àlgebra de Frêchet A és l.m.-convexa si i només si per a cada $a \in A$ i cada funció entera $\phi(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$, la sèrie $\sum_{n \geq 0} c_n a^n$ és convergent a A cap a un element de A, anomenat $\phi(a)$. En el nostre cas, donada $f \in E_M(r)$, l'aplicació

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow E_M(r) \\ \phi &\longmapsto \phi o f \end{aligned}$$

és lineal i té gràfica tancada, ja que si $\phi_n \longrightarrow \phi$ a H i $\phi_n o f \longrightarrow g$ a $E_M(r)$ és $g = \phi o f$. Per tant és contínua i la convergència de $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ cap a ϕ s'aplica en convergència, a $E_M(r)$, de $\sum_{n \geq 0} c_n f^n$ cap a $\phi o f$.

Així hem acabat la demostració del teorema (1.2.1.)//.

Cal observar que les condicions del teorema (1.2.1.) són bones en el sentit que si una succesió M les compleix, també les compleix una successió equivalent que defineixi la mateixa classe; això és fàcil de veure mitjançant (d) ó (e). Com a darrer comentari, no coneixem explícitament cap sistema de seminormes (q_n) que defineixin la topologia i t.q. $q_n(fg) \leq q_n(f)\ q_n(g)$.

L'única classe E_M que és analítica i l.m.-convexa és H, la corresponent a $M_n = n!$ (tota E_M que sigui l.m.-convexa ha de contenir H ja que H hi opera per composició i $x \in E_M$; si es vol, també perquè A_n està acotada inferiorment si és quasi-creixent). Dins les quasi-analítiques, no analítiques, la classe corresponent a $M_n = (n \log n)^n$ és també l.m.-convexa (utilitzant el criteri (d) del teorema (1.2.1.)). Dins les no quasi-analítiques, les classes de Gevrey corresponents a $M_n = (n!)^{\alpha}$, $\alpha > 1$, són també l.m.-convexes (aplicant el criteri (d) a la successió equivalent $n^{n\alpha}$).

Una altra observació és que tot aquest apartat romandria vàlid sense la hipòtesi (2) del cap. 0 (amb la mateixa definició de E_M). Dins aquesta categoria hom té les següents proposicions.

<u>(1.2.2.) Proposició.-</u> Per a tota successió M hi ha una successió M' t.q. $E_M \subset E_{M'}$, $E_{M'}$ és l.m.-convexa i que és la mínima amb aquestes propietats.

Demostració.- A posteriori, $\lambda_{M'}$ compleix

$$\lambda_{M'}(t) \leq C \lambda_M(D\, t) \qquad i \quad \lambda_{M'}(n\, t) \leq A\, B^n \lambda_{M'}(K\, t)^n$$

Suposem que totes les constants són 1. Aleshores

$$\lambda_M(t)^n \geq \lambda_{M'}(t)^n \geq \lambda_{M'}(n\, t) \ ,$$

equivalentment, $\lambda_M(\frac{t}{n})^n \geq \lambda_{M'}(t)$. Motivats per això, definim,

$$h(t) = \inf_{n \geq 1} \lambda_M(\frac{t}{n})^n \ .$$

És evident que $h(t) \leq \lambda_M(t)$; també

$$h(m\, t) = \inf_{n \geq 1} \lambda_M(\frac{mt}{n})^n \leq \inf_{\substack{n=mk \\ k \geq 1}} \lambda_M(\frac{m\, t}{n})^n = \inf_{k \geq 1} \lambda_M(\frac{t}{k})^{mk} = h(t)^m.$$

Definim $M'_n = \sup_t \frac{t^n}{h(t)}$; és immediat que (M'_n) és logarítmicament convexa (ja no diem que es compleixi (2) del Cap. 0). Com que $h(t) \leq \lambda_M(t)$ és

$$M'_n \geq \sup_t \frac{t^n}{\lambda_M(t)} = M_n \ ,$$

i $E_M \subset E_{M'}$. Que $E_{M'}$ és l.m.-convexa ho demostraríem igual que en el pas (c) $\Rightarrow$ (d) del teorema (1.2.1.). Suposem ara que $E_M \subset E_{M''}$

i que $E_{M''}$ és l.m.-convexa. Això vol dir que

$$\lambda_{M''}(t) \leq C\, \lambda_M(D\, t) \quad \text{i} \quad \lambda_{M''}(n\, t) \leq A\, B^n\, \lambda_{M''}(K\, t)^n .$$

Ara,

$$\lambda_M\left(\frac{t}{n}\right)^n \geqslant C^{-n} \lambda_{M''}\left(\frac{t}{Dn}\right)^n \geqslant A^{-1}\; C^{-n}\; B^{-n}\, \lambda_{M''}\left(\frac{t}{DK}\right) .$$

Per a t gran podem suposar, fent més gros D, que $C < B^{-1}$.

Aleshores, tindrem

$$\lambda_M\left(\frac{t}{n}\right)^n \geqslant A\, \lambda_{M''}\left(\frac{t}{B}\right) ,$$

per a t gran, on A i B són unes certes constants. Això significa que

$$h(t) \geqslant A\, \lambda_{M''}\left(\frac{t}{B}\right)$$

per a t gran, i redefinint A, B, per a tot t . Ara,

$$M'_n \leq A \sup_t \frac{t^n}{\lambda_{M''}(\frac{t}{B})} = A\, B^n \sup_t \frac{(\frac{t}{B})^n}{\lambda_{M''}(\frac{t}{B})} = A\, B^n M''_n ,$$

i $E_{M'} \subset E_{M''}$ //.

<u>(1.2.3.) Proposició.-</u> Si E_M conté una $E_{M'}$ l.m.-convexa (que és el mateix que dir que contingui H), aleshores en conté una de màxima.

Demostració. - Seguim el mètode anterior. Definim

$$h(t) = \sup_n \lambda_M(n\,t)^{\frac{1}{n}} .$$

$h(t)$ és finit car la hipòtesi que E_M conté H implica que

$\lambda_M(t) = O$ (exp O t), per (0.2.1.). És immediat que $h(t) \geq \lambda_M(t)$; també

$$h(m\,t) = \sup_n \lambda_M(n\,m\,t)^{\frac{1}{n}} = \left[\sup_n \lambda_M(n\,m\,t)^{\frac{1}{n\,m}}\right]^m = h(t)^m ,$$

i tal com abans, $M'_n = \sup_t \frac{t^n}{h(t)}$ dóna lloc a una $E_{M'}$ que és l.m.-convexa i que, com que $h(t) \geq \lambda_M(t)$, s'inclou a E_M. Si $E_{M''}$ n'és una altra, és

$$\lambda_M(t) \leq C\,\lambda_{M''}(D\,t) \quad \text{i} \quad \lambda_{M''}(n\,t) \leq A\,B^n\,\lambda_{M''}(K\,t)^n .$$

$$\lambda_M(n\,t)^{\frac{1}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}}\,\lambda_{M''}(D\,n\,t)^{\frac{1}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}}\,A^{\frac{1}{n}}\,B\,\lambda_{M''}(K\,D\,t) \leq A\,\lambda_{M''}(B\,t),$$

que implica $h(t) \leq A\,\lambda_{M''}(B\,t)$ i tal com abans,

$$\sup \left(\frac{M''_n}{M'_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$$

és a dir, $E_{M''} \subset E_{M'}$ //.

Nota.- Totes les classes n.q.a. contenen H. En efecte : la sèrie

$$\sum \frac{M_{n-1}}{M_n}$$

és convergent i el terme general decreixent d'acord amb (1) Cap. 0 ; aleshores $a_n = n M_{n-1} / M_n$ tendeix a zero ; llavors, també $(a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$ tendeix a zero. Però $a_1 \dots a_n = \frac{n!}{M_n}$ i per tant $(\frac{n!}{M_n})^{1/n}$ roman acotat i això vol dir que $H \subset E_M$.

1.3.- Les classes invertibles.

Direm que E_M és invertible si sempre que $f \in E_M$ i $f(x) \neq 0 \ \forall x$ també $f^{-1} \in E_M$. El problema que ara tractem és el de caracteritzar, en termes de la successió M, quan és invertible E_M. Aquest mateix problema se'l plantejà Rudin ([43]) per a les classes clàsiques de Denjoy-Carleman (parcialment, a [32]), i obtingué una resposta completa tan sols pel cas no quasi-analític (també Hörmander en el cas general, veure [20]). Ací obtindrem una condició necessària i suficient independentment de tota hipòtesi sobre quasi-analiticitat.

Una condició suficient és fàcilment deduïble dels apartats anteriors. Si E_M és localment m-convexa i Spec $E_M = \mathbb{R}$, la teoria general d'àlgebres l.m.-convexes (veure [34] , [36] o [50]) assegura que E_M és invertible (en una àlgebra l.m.-convexa, un element és invertible si i només si la seva transformada de Gelfand no s'anul·la mai). Així, la condició següent és suficient:

(9) "La successió $A_n = \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ és quasi-creixent i no acotada superiorment"

És un fet curiós que la demostració directa d'això (una vegada se sap quina és la hipòtesi escaient) no és trivial; en certa forma, la situació és la mateixa que la del teorema de Wiener sobre la inversibilitat d'una funció f expressable sota la forma $f(t) = \sum a_n e^{int}$ amb $\sum_n |a_n| < \infty$, teorema que és demostrat ràpidament amb l'auxili de la teoria d'àlgebres de Banach. A partir d'ara veurem que la condició (9) és també necessària.

<u>(I.3.1.) Proposició.-</u> Si E_M és invertible, aleshores Spec $E_M = \mathbb{R}$.

<u>Demostració.-</u> La demostració és estàndard: sigui $\chi \in$ Spec E_M i definim $z_o = \chi(x)$. Si z_o no fos real, per a un costat tindríem que $x - z_o$ és invertible, mentres que per l'altre $\chi(x-z_o) = 0$. Per tant z_o és real. Veurem que $\chi(f) = f(z_o)$. Considerem la relació

$$f(x) - f(z_o) = (x - z_o) \int_0^1 f'(z_o + t(x - z_o))\, d\,t\,.$$

La funció $g(x) = \int_0^1 f'(z_o + t(x-z_o))\, dt$ és a E_M ja que

$$g^{(n)}(x) = \int_0^1 f^{(n+1)}(z_o + t(x-z_o))\, t^n\, dt\, ,$$

$\|g^{(n)}\|_r \leq \|f^{(n+1)}\|_{r+|z_o|}$ i $f' \in E_M$. Aplicant χ a la relació $f - f(z_o) = (x-z_o)\, g$ hom troba que $\chi(f) = f(z_o)$. //

<u>(1. 3. 2.) Proposició. -</u> Si E_M és invertible, aleshores E_M és l. m. -convexa.

<u>Demostració. -</u> Veurem que és certa (5) per a unes certes constants $A, B, K > 0$. Considerem la subàlgebra $B\,E_M$ de E_M que consta de les funcions acotades de E_M ([36]). Hi posem la topologia definida per les $p_{r,\varepsilon}$ i la norma $\|f\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

És inmediat que $B\,E_M$ és una àlgebra de Fréchet. Ara, el fet que E_M sigui invertible significa que les funcions invertibles de $B\,E_M$ són exactament aquelles acotades inferiorment. Però si f està acotada inferiorment, és a dir, $|f(x)| \geq m > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ i $\|f - g\|_{\mathbb{R}} < m/2$, aleshores $|g(x)| \geq m/2 > 0$ i g és invertible. Així, el conjunt d'elements invertibles de $B\,E_M$ és obert i, segons el teorema 13. 17 de [50] , $B\,E_M$ és l. m. -convexa. Seguint el mateix argument que a (b) $\Rightarrow$ (c) del teorema (1. 2. 1.), concluïm que per a cada r, ε hi ha una seminorma q , que és una de les $p_{s,\delta}$ o bé $\| \;\|_{\mathbb{R}}$, t. q.

$$p_{r,\varepsilon}(f^m) \leq A\, B^m\; q(f)^m .$$

Però per a $f = e_t$, $q(f) = 1 \leq p_{s,\delta}(e_t)$ i per tant, mentres apliquem la relació anterior a $f = e_t$ podem suposar que $q = p_{s,\delta}$. Per tant,

$$p_{r,\varepsilon}(e_{mt}) \leq A\, B^m\; p_{s,\delta}(e_t)^m,$$

que, al ser $p_{r,\varepsilon}(e_t) = \lambda_M(\frac{t}{\varepsilon})$, ja ès (5).//

Com a resum de l'apartat :

<u>(1.3.3.) Teorema.-</u> E_M és invertible si i només si és l.m.-convexa i Spec $E_M = \mathbb{R}$, ó equivalentment, si i només si la successió $A_n = (\frac{M_n}{n!})^{1/n}$ és quasi-creixent i no acotade superiorment.//

És clar que un enunciat anàleg és cert també per a $E_M(r)$. Fins i tot la demostració de la proposició (1.3.2.) seria més fàcil en aquest cas ja que si $E_M(r)$ és invertible, els invertibles ja formen un obert de $E_M(r)$ i no cal considerar cap subàlgebra; després es segueix igual.

Així dins el grup analític, cap E_M ès invertible. Fora del grup analític, ès a dir, quan Spec $E_M = \mathbb{R}$, les invertibles coincideixen amb les l.m.-convexes. Per exemple, les clases corresponents a $M_n = (n \log n)^n$ i $M_n = (n!)^\alpha$ són invertibles ($\alpha > 1$).

En el grup no analític, si una E_M no és l.m.-convexa, hi haurà almenys una funció que no és invertible tot i que no s'anul·la mai a $\mathbb{R}$, l'espectre. En aquests casos queda el problema d'esbrinar quina condició cal afegir a $f(x) \neq 0 \ \forall x$ a fi que f sigui invertible. La condició no sembla de fàcil enunciat i desconeixem la resposta a aquest problema. Tampoc coneixem, però, cap exemple no excessivament artificiós de successió M la qual doni lloc a una tal classe.

En el grup analític, en canvi, la situació serà radicalment diferent. En aquest cas, bé que E_M no sigui l.m.-convexa, si $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, és a dir, si f no s'anul·la a l'espectre, f és invertible.

CAPÍTOL 2

EL GRUP QUASI-ANALÍTIC

Comencem aquest capítol tractant el problema natural en el cas quasi-analític i que podríem dir-ne de síntesi espectral de l'aplicació $f \longmapsto (f^{(n)}(0))$. És el problema de com es recupera f de la successió $(f^{(n)}(0))$ (qüestió ja tractada a [2]); naturalment, això significarà estudiar el desenvolupament de Taylor de f. Després estudiem els ideals tancats de E_M i com que ací $\operatorname{Spec} E_M = \mathbb{R}$ ho fem en el cas natural que les funcions invertibles siguin les que no s'anul·len mai, és a dir, en el cas que E_M sigui invertible.

2.1.- La "síntesi espectral" en el cas quasi-analític.

Com $(f^{(n)}(0))$ determina f ? . En el cas $M_n = n!$ la resposta és immediata: la sèrie de Taylor de f en el punt 0 és sumable $\forall$ t i

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \quad .$$

Fins i tot la convergència d'aquesta sèrie ho és per la topologia de H. Què podem dir en el cas general ?

Hem vist a l'apartat 0.4. que hi ha polinomis $P_n(z)$ de grau n-1

$$P_n(z)=\sum_{j=0}^{n-1} C_{j,n}\,(iz)^j, \quad \left(C_{j,n}=\int_{x_j}^{0}\int_{x_{j-1}} \dots \int_{x_1} dx^j \right)$$

tals que $P_n(z) \longrightarrow \exp(iz)$ a H_M i aleshores $P_n(tz) \longrightarrow \exp(itz)$ a H_M $\forall\, t \in \mathbb{R}$. A la representació (19) del Capítol 0 commutem i trobem

$$f(t)=\lim_n \int_{\mathbb{C}} \frac{P_n(tz)}{k(z)}\, d\mu(z)=\lim_n \sum_{j=0}^{n-1} C_{j,n}\, t^j \int_{\mathbb{C}} \frac{(iz)^j}{k(z)}\, d\mu(z) =$$

$$=\lim_n \sum_{j=0}^{n-1} C_{j,n}\, t^j f^{(j)}(0).$$

Escrivint $C_{j,n}=D_{j,n}/j!$, s'interpreta més suggestivament l'anterior:

$$(1) \qquad f(t)=\lim_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j D_{j,n} \qquad \forall f\in E_M,\ \forall t .$$

Així les constants $D_{j,n}$ són una mena de "correctors universals" de les sèries de Taylor de les $f\in E_M$. És clar que no són úniques , puix si multipliquem $D_{j,n}$ per quelcom que amb n tendeixi a 1 obtenim altres constants amb la mateixa propietat .

Veurem ara que la convergència de (1) és uniforme sobre compactes . Com que

$$f(t)-\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j D_{j,n} = \int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(itz)-P_n(tz)}{k(z)}\, d\mu(z) ,$$

és suficient de veure que $P_n(tz)$ tendeix a $\exp(itz)$ a H_M , uniformement per a t dins un compacte. Amb les notacions de (0, 4), hem de veure que $\Psi_t(P_n) \xrightarrow[n]{} \Psi_t(e)$ uniformement per a $|t| \leq s$, on e designa la funció exp (iz) ; com que $P_n \longrightarrow e$, això serà cert si la família $\{\Psi_t, |t| \leq s\}$ és equicontínua. H_M és tonel·lat (és un L F) i per tant això és el mateix que veure si $\{\Psi_t(F), |t| \leq s\}$ és acotat a H_M, per a cada $F \in H_M$. Ara,

$$\|\Psi_t(F)\|_{r,\varepsilon} = \|F\|_{\frac{r}{|t|},\varepsilon|t|} .$$

$$\|G\|_{r,\varepsilon} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|G(z)|}{\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp r|\mathrm{Im}\, z|}$$ decreix amb r i creix amb ε. Així,

$$\|\Psi_t(F)\|_{r,\varepsilon} \leq \|F\|_{\frac{r}{s},\varepsilon s} \quad \text{per a } |t| \leq s .$$

Tota F fa finit el terme de la dreta per a alguns $r, \varepsilon > 0$; aleshores l'anterior demostra que $\{\Psi_t(F), |t| \leq s\}$ és acotat a $H_M(r, \varepsilon)$ i per tant a H_M.

Un argument similar demostraria el mateix per a cadascuna de les derivades, de manera que (1) és convergència uniforme sobre compactes de la funció i derivades, és a dir, convergència a E. La pregunta natural és si també és convergència per la topologia de E_M. Posem

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j D_{j,n} = \int_{\mathbb{C}} \frac{P_n(tz)}{k(z)} d\mu(z) .$$

Per a $F \in H_M$ avaluem la seva acció sobre f_n, com a element de E'_M:

$$(F, f_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} D_{j,n} (F, t^j) \quad .$$

En el Capítol 0 s'ha vist que $\hat{T}'(z) = T\ (\ t \longmapsto (it) \exp(itz)\ )$. Reiterant

(2) $$\hat{T}^{(n)}(z) = T\ (\ t \longmapsto (it)^n \exp(itz)\ ) \quad ,$$

i en particular

$$\hat{T}^{(n)}(0) = T\ (\ t \longmapsto (it)^n\ ) \ .$$

Això vol dir que $(F, t^j) = (-i)^j F^{(j)}(0)$. Aleshores,

$$(F, f_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} D_{j,n} (-i)^j F^{(j)}(0).$$

Sustituïnt $f^{(j)}(0)$ per

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{(iz)^j}{k(z)} d\mu(z)$$

trobem

(3) $$(F, f_n) = \int_{\mathbb{C}} \frac{F_n(z)}{k(z)} d\mu(z) = (F_n, f)$$

amb

(4) $$F_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} z^j D_{j,n} = \sum_{j=0}^{n-1} F^{(j)}(0)\ z^j\ C_{j,n} \quad .$$

Tant a E_M com a H_M, per a una successió és el mateix dir convergència dèbil que convergència per la topologia inicial ([25]).

Suposem que volem veure que $f_n \longrightarrow f$ a E_M $\forall f \in E_M$; l'anterior observació i (3) demostren que això equival a veure que $F_n \longrightarrow F$ a H_M $\forall F \in H_M$: Així (1) és convergència per E_M si i només si $F_n \longrightarrow F$ $\forall F \in H_M$. Quan $F(z) = \exp(iz)$, F_n és P_n de manera que sabem que és cert en aquest cas. Això també suggereix que mirem de demostrar-ho igual que per a aquest cas.

Per tant apliquem la fórmula (20) del Capítol 0 a $F(-tz)$ com a funció de t, amb els mateixos x_k. Arribem a

$$F(z)=\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (-z)^j F^{(j)}(0) \int_{x_j}^{0} \int_{x_{j-1}} \cdots \int_{x_1} dx^j \; +$$

$$+\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \int_{x_{j-1}}^{x_j} (-z)^j F^{(j)}(-tz) \int_{x_{j-1}}^{t} \int_{x_{j-2}} \cdots \int_{x_1} dx^{j-1}\, dt = F_n(z) + H_n(z) .$$

El primer terme de l'expressió de la dreta és $F_n(z)$ i hem de veure quan $H_n \longrightarrow 0$ a H_M . Avaluem $F^{(j)}(z)$; de (2),

$$\left| F^{(j)}(z) \right| \leq C\, p_{r,\varepsilon} \left(t \longmapsto (it)^j \exp(itz) \right) ,$$

per a uns certs C, r, ε . Afegim ara una hipòtesi: E_M és l. m.-convexa. Això vol dir (Cap. 1) que existeixen D, s, δ t. q. $p_{r,\varepsilon}(fg) \leq D^2 p_{s,\delta}(f) p_{s,\delta}(g)$ $\forall f, g \in E_M$. Aleshores,

$$\left| F^{(j)}(z) \right| \leq C D^{j+1}\, p^j_{s,\delta}(t \mapsto (it))\, p_{s,\delta}(e_z) \;\; ,$$

i redefinint C,

$$\left| F^{(j)}(z) \right| \leq C^j \lambda_M\left(\frac{|z|}{\delta} \right) \exp s \left| \operatorname{Im} z \right| \;\; .$$

Ara, tenint en compte que $-1 \leq t \leq 0$ a la fórmula de dalt, tenim

$$\left|H_n(z)\right| \leq \sum_{j=0}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |z|^j \; C^j \lambda_M\left(\frac{|z|}{\delta}\right) \exp s|\operatorname{Im} z| \int_{x_{j-1}}^{t} \cdots \int_{x_1} dx^{j-1} \, dt \leq$$

$$\leq \lambda_M\left(\frac{|z|}{\delta}\right) \exp s|\operatorname{Im} z| \sum_{j=0}^{n} (C|z|)^j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}} \cdots \int_{x_1} dx^j \leq$$

$$\leq \lambda_M\left(\frac{|z|}{\delta}\right) \exp s|\operatorname{Im} z| \, \lambda_M(C|z|) \sum_{j=0}^{n} M_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}} \cdots \int_{x_1} dx^j \leq$$

$$\leq \text{const.} \, \lambda_M\left(\frac{|z|}{\delta}\right) \lambda_M(C|z|) \exp s|\operatorname{Im} z| \sum_{j=0}^{n} \alpha_n^j \; e^j \quad ,$$

per a unes certes constants δ, C, s i per a tot n, on hem fet servir el lema (0.4.2.) i la relació (7) del Capítol 0. És necessària una altra hipòtesi:

"per a cada parell de constants $A, B > 0$ hi ha $C > 0$ t.q.

(5)
$$\lambda_M(A|z|)\, \lambda_M(B|z|) = O(\lambda_M(C|z|)). \text{"}$$

Amb aquesta hipòtesi, és

$$\left|H_n(z)\right| \leq \text{const.} \, \lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp s|\operatorname{Im} z| \sum_{j=0}^{n} \alpha_n^j \; e^j \quad ,$$

per a uns certs ε, s i tot n, és a dir

$$\|H_n\|_{s,\varepsilon} \leq \text{const.} \sum_{j=0}^{n} \alpha_n^j \; e^j \, .$$

Ara fent ús del fet $\alpha_n \longrightarrow 0$ deduïm com a l'apartat 0.4. que $\|H_n\|_{s,\varepsilon}$ tendeix a zero i per tant que $H_n \longrightarrow 0$ a H_M.

Com a resum d'aquest apartat (algun aspecte és a [2]) :

<u>(2.1.1.) Teorema.-</u> Si E_M és quasi-analítica, existeixen constants $D_{j,n}$, $j=0,\ldots,n-1$ tals que

$$f(t)=\lim_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j\, D_{j,n} \quad ,$$

per a qualsevol $f \in E_M$, $\forall$ t. La convergència ho és per la topologia de E (uniforme sobre compactes de la funció i derivades) . Si E_M és l.m.-convexa i es satisfà la hipòtesi (5), també és convergència per la topologia de E_M . //

El caràcter de "correctors universals" pels desenvolupaments de Taylor de les $f \in E_M$ que el teorema dóna a les $D_{j,n}$ també el tenen per a les $F \in H_M$, com ho demostra el fet que $F_n \longrightarrow F$ a H_M i la definició (4) de F_n . Així, les constants $D_{j,n}$, que només depenen de la successió M, són "correctors universals" per a E_M i H_M.

La condició (5) és equivalent a

$$(6) \qquad \sup_n \left(\frac{M_{2n}}{M_n^2} \right)^{\frac{1}{n}} < \infty \quad .$$

En efecte: (5) és equivalent a $\lambda_M^2(t) \leq A\, \lambda_M(Bt)$ i per (7) del Cap. 0,

$$M_{2n} = \sup_{t>0} \frac{(Bt)^{2n}}{\lambda_M(Bt)} \leq A\, B^{2n} \sup_{t>0} \frac{t^{2n}}{\lambda_M^2(t)} = A\, B^{2n} \left(\sup_{t>0} \frac{t^n}{\lambda_M(t)} \right)^2 =$$

$$= A\, B^{2n}\, M_n^2 \quad .$$

Recíprocament, si $M_{2n} \leq C^{2n} M_n^2$,

$$\lambda_M^2(t) = \sup_n \frac{t^{2n}}{M_n^2} \leq \sup_n \frac{(Ct)^{2n}}{M_{2n}} \leq \lambda_M(Ct) \ .$$

Mitjançant (6) hom veu que $M_n = (n \log n)^n$ està a les condicions de (2.1.1.). En efecte,

$$\left(\frac{M_{2n}}{M_n^2}\right)^{1/n} = \frac{(2n \log 2n)^2}{(n \log n)^2} = \frac{4 (\log 2 + \log n)^2}{\log^2 n}$$

roman acotat.

En el capítol següent veurem la versió del teorema (2.1.1.) en el cas analític.

2.2.- Estudi dels ideals de E_M en el cas quasi-analític invertible.

Veurem que en el cas quasi-analític invertible l'estructura dels ideals de E_M és del tot semblant a la de H (veure [16],[17]). En aquest cas, segons (1.3.2.), E_M és l.m.-convexa. Tota la feina consisteix a veure que val el mateix procediment que per a H. Un exemple de classe a la qual s'apliquen els resultats d'aquest apartat és la corresponent a $M_n = (n \log n)^n$.

Els zeros d'una funció $f \in E_M$, $f \neq 0$, formen un conjunt sense punts d'acumulació. En efecte, si $f(x_n) = 0$ i $x_n \longrightarrow x$, és $f(x) = 0$; però com que entre x_n i x_{n+1} hi ha un punt y_n on $f'(y_n) = 0$ i $y_n \longrightarrow x$, també és $f'(x) = 0$. Inductivament hom veu que $f^{(n)}(x) = 0$ i com que E_M és q. a., $f = 0$.

Donat un ideal I de E_M, h(I) indica els zeros de I,

$$h(I) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0 \ \forall f \in I \right\},$$

i d'acord amb l'observació anterior, o bé és un conjunt finit o bé és una successió (x_n), on cada terme el considerem escrit tantes vegades com la seva multiplicitat a h(I), i $|x_n| \xrightarrow[n]{} \infty$.

De la teoria general d'àlgebres l. m.-convexes ([36]), hom treu :

<u>(2. 2. 1.) Teorema.-</u> Suposem que E_M és q. a. i invertible . Aleshores, un ideal I de E_M és dens si i només si $h(I) = \emptyset$. //

Donat un ideal I, hom considera

$$kh(I) = \left\{ f \in E_M / f(x) = 0 \ \forall x \in h(I) \right\}$$

(si x surt n vegades a h(I), f s'hi ha d'anul·lar n vegades, és a dir, $f(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0$). Per tant, k h(I) consta de les funcions que s'anul·len allà on totes les de I s'anul·len. Doncs bé, veurem que k h(I) iguala l'adherència de I : $\overline{I} = k\,h(I)$. Per fer-ho, ens basarem en el teorema (1. 4. 1.) (que és un cas particular), en l'observació següent i el lema que la segueix .

Si $f \in E_M$ i $f(a) = 0$, podem parlar de la funció $\dfrac{f(x)}{x-a}$ com a un element g de E_M t. q. $f(x) = (x-a)\, g(x)$. Per exemple, l'expressió de g

$$g(x) = \int_0^1 f'(a+t(x-a)) \, dt$$

ho demostra, tal com en la demostració de la proposició (1.3.1.).

<u>(2.2.2.) Lema.-</u> Suposem que E_M és q.a. i invertible ; sigui I un ideal de E_M i $a \in \mathbb{R}$ que apareixi a h(I) amb multiplicitat n. Si $f \in I$ i f s'anul·la a a $k \geq n$ vegades, les funcions (de E_M)

$$\frac{f(x)}{(x-a)^j}, \quad j = 0, ---, k-n,$$

pertanyen a I.

<u>Demostració.-</u> Val la mateixa demostració que en el cas de H i en general, de les àlgebres de Hadamard (veure [9], [47]); és suficient de fer-ho en el cas $k = n+1$ i veure que $f(x)/x-a \in I$. Com que la multiplicitat de a dins h(I) és n i no n+1, hi ha $g \in I$ t.q.

$$g(x) = (x-a)^n \, h(x) \quad \text{amb} \quad h(a) \neq 0 .$$

Ara, la identitat

$$h(a)\frac{f(x)}{x-a} = f(x) \, \frac{h(a)-h(x)}{x-a} + g(x) \, \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}},$$

demostra que $h(a)\dfrac{f(x)}{x-a} \in I$ i com que $h(a) \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x-a} \in I$ //.

(2.2.3.) Teorema.- Si E_M és q.a. i invertible, per a tot ideal I de E_M, $\overline{I} = k\,h(I)$. En particular, tot ideal tancat està caracteritzat pels seus zeros, contant multiplicitats. Qualsevol conjunt discret pot aparèixer.

Demostració.- Utilitzarem (2.2.1.) i (2.2.2.) (l'observació que (2.2.1.) implica (2.2.3.) és deguda a Rubel, veure [22] i [26], [27], [28]). Sigui $f \in k\,h(I)$. Considerem

$$I_f = \{ g \in E_M / f g \in I \} .$$

I_f és un ideal de E_M i conté I. Veurem que $h(I_f) = \emptyset$; això implicarà, segons (2.2.1.) que I_f és dens. Si $g_n \in I_f$ i $g_n \longrightarrow 1$, aleshores $f = 1.f = \lim_n g_n.f$ i $g_n.f \in I$ demostren que $f \in \overline{I}$.

Suposem que $h(I_f) \neq \emptyset$ i sigui $a \in h(I_f)$. En particular, $a \in h(I)$. Sigui n la multiplicitat de a dins h(I), p la que té dins $h(I_f)$ i suposem que f s'anul·la a a amb multiplicitat $m \geq n$. Sigui $g \in I_f$ tal que s'anul·la exactament p vegades a a. Aleshores $fg \in I$ i s'anul·la a a $p+m$ vegades. Aplicant el lema (2.2.2.), les funcions

$$\frac{fg}{(x-a)^j}, \quad j = 0, ---, p+m-n,$$

pertanyen a I. Com que $m \geq n$, en particular $\frac{fg}{(x-a)^p} \in I$. Això vol dir que $\frac{g}{(x-a)^p}$ (que és un element de E_M ja que g s'anul·la p vegades a a) és a I_f. Com que $a \in h(I_f)$ arribem a poder dir que g s'anul·la a a més de p vegades i hem arribat a una contradicció. Això acaba la demostració de la primera part. Per a la segona, només cal fixar-se que donat un conjunt discret podem triar una funció entera que el tingui com a conjunt de zeros i aleshores l'ideal engendrat per aquesta funció serveix //.

La relació entre ideals principals i tancats és també la mateixa que en el cas de H :

<u>(2.2.4.) Lema.-</u> Suposem que E_M és q.a. i invertible; siguin f, $h \in E_M$ t.q. tot zero de f és un zero de h (contant multiplicitats). Aleshores, hi ha $g \in E_M$ t.q. $h = gf$.

<u>Demostració.-</u> Fix un interval K_r, siguin $a_1, ---a_n$ els zeros de f a K_r. Posem $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)\, g_1(x)$ amb $g_1 \in E_M$ i $g_1(x) \neq 0$ si $x \in K_r$. Com que $E_M(r)$ és invertible (teorema (1.3.3.), $g_{1|K_r}^{-1} \in E_M(r)$. Per hipòtesi,

$$h(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)\; g_2(x) ,$$

amb $g_2 \in E_M$ de manera que, a K_r

$$\frac{h(x)}{f(x)} = g_2(x)\; g_1(x)^{-1}$$

és a $E_M(r)$, és a dir, $\frac{h}{f} \in E_M$ //.

(2.2.5.) Teorema.- Si E_M és q.a. i invertible, els ideals tancats i els principals coincideixen.

Demostració.- Vegem primer, que tot principal és tancat: si $f g_n \xrightarrow[n]{} h$ a E_M, és $f g_n \xrightarrow[n]{} h$ a E i tot zero de f és un zero de h amb multiplicitat no inferior. Segons el lema (2.2.4.), hi ha $g \in E_M$ t.q. $h = fg$ i així l'ideal principal engendrat per f és tancat.

Vegem ara que tot tancat és principal: donat un ideal tancat I és $I = k\, h(I)$, segons el teorema (2.2.3.). Com que $H \subset E_M$ podem triar una funció $f \in H \subset E_M$ que tingui com a zeros exactament $h(I)$ (amb les mateixes multiplicitats). Aleshores segons el lema, $k\, h(I) = (f)$ i acabem//.

Nota.- Seria interessant de donar una versió d'aquests resultats en el cas quasi-analític general sense la hipòtesi de invertibilitat.

CAPITOL 3

EL GRUP ANALITIC

En aquest capítol tractem el cas analític $E_M(r), E_M \subset H$, és a dir, el cas que tota f de $E_M(r)$, E_M s'extén a una funció entera. Recordem que numericament això vol dir que (veure (0.2.1.))

$$(1) \qquad \sup \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{1/n} < \infty \text{ , o equivalentment, } \exp\ t = O(\lambda_M(0t)).$$

És clar que l'extensió de f és

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad ;$$

Segons la representació (19) del Cap. 0

$$f(x) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(ixw)}{k\ (w)}\ d\mu(w)$$

(on $k(w)$ domina totes les $\lambda_M(\frac{|w|}{\varepsilon})$ exp $r\,|\,\mathrm{Im}w|$ i μ és una mesura acotada). És, fix z, i utilitzant (1) .

$$|\exp\ (izw)| \leq \exp|z|\ |w| = O\ (\lambda_M(O|w|\ )$$

i per tant $k(w)$ domina $\exp(izw)$. Per tant, la següent expressió té sentit i representa també l'extensió de f :

$$(2) \qquad f(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(izw)}{k(w)} \, d\mu(w)$$

La representació (2) serà útil després.

Com és costum en l'estudi d'espais de funcions enteres, primer de tot estudiem si E_M pot ésser descrit en termes de la successió de coeficients del desenvolupament de Taylor. Si $f \in E_M(r)$, E_M, la successió $(f^{(n)}(0))$ pertany a l'espai de successions (a_n) amb $a_n \in \mathbb{C}$ tals que

$$|a_n| \leq C(\varepsilon)\, \varepsilon^n \, M_n$$

per a cada $\varepsilon > 0$ i una certa constant $C(\varepsilon) > 0$, espai que, en analogia als $E_M(r)$ designem per $E_M(0)$. El que fem primer (apartat 3.2.) és trobar una condició necessària i suficient per a que sigui cert el recíproc. A partir d'aquest punt es suposa tal condició.

Després, s'esbrina com són les funcions representades per (2), én el sentit de veure quines conseqüències té per a arguments complexes la original condició (3) del Capítol 0 (que és una condició només sobre l'eix real). Ací arribem a una "complexificació" de la condició esmentada, i al fet $E_M(r) = E_M$.

En aquest punt, i amb una hipòtesi suplementària, hom veu que E_M pot ser descrita en termes de la funció característica $M(r, f) = \sup\{ |f(z)| \ ; |z| = r \}$. De fet, apareixen àlgebres de funcions enteres de tipus minimal asociades a un pes; á la literatura hi han estudiades nombroses àlgebres de funcions enteres de tipus normal asociades a un pes (veure [9], [19], [22], [23], [24], [26], [27], [28], [41], [47]). A partir d'aquest fet, la feina no és altra que la de generalitzar els mètodes i resultats al cas minimal. Els punts que són tocats són : la qüestió dels invertibles, l'estudi dels ideals i la caracterització dels sistemes finits de generadors (diversos aspectes de l'estudi dels ideals són també, en el cas minimal, a [28]).

3.1.- L'espai de successions $E_M(0)$

S'ha definit l'espai $E_M(0)$ com el de les successions (a_n) amb $a_n \in \mathbb{C}$ t. q.

$$|a_n| \leq C(\varepsilon)\, \varepsilon^n M_n \quad ,$$

per a tot $\varepsilon > 0$ i una $C(\varepsilon) > 0$, és a dir, $\lim\limits_n \left(\frac{|a_n|}{M_n}\right)^{1/n} = 0$. Aquest apartat és dedicat a establir uns quants resultats referents a l'estructura de $E_M(0)$ i el seu dual que necessitarem en aquest capítol i en el capítol 6.

És immediat de comprovar que $E_M(0)$ és un espai de Frêchet amb les seminormes

$$p_\varepsilon(a) = \sup_n \frac{|a_n|}{\varepsilon^n M_n} \;, \varepsilon > 0 \,, \quad a = (a_n) \;.$$

Per altra banda, $(a_n) \longmapsto (\frac{a_n}{M_n})$ identifica $E_M(0)$ amb $h(\infty)$ de manera que el seu α-dual (veure [25]) consta de les successions $b = (b_n)$ t. q.

$$\text{(3)} \qquad \sup \left(|b_n| M_n \right)^{\frac{1}{n}} < \infty .$$

També és fàcil de veure que la topologia definida per les p_ε iguala la topologia normal ([25]). Per tant, l'espai φ de successions quasi nul·les és dens a $E_M(0)$ i el dual de $E_M(0)$ coincideix amb el α-dual, és a dir,

$$\text{(4)} \qquad a = (a_n) \longmapsto \sum_n a_n b_n ,$$

és la forma general d'un funcional lineal continu a $E_M(0)$, amb $b = (b_n)$ tals que compleixin (3).

La transformada de Fourier $\hat{T}$ d'una $T \in E_M(0)$ és definida, a fi que la transformada de Fourier de l'aplicació adjunta de $f \longmapsto (f^{(n)}(0))$ de E_M a $E_M(0)$ esdevingui una inclusió, per

$$\hat{T}(z) = T((i^n z^n)), \quad z \in \mathbb{C} .$$

Tenint en compte (4),

$$\hat{T}(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (iz)^n ,$$

amb (b_n) complint (3), és l'expressió general de $\hat{T}$. Si

$$c = \sup_n \left(|b_n| M_n \right)^{1/n} ,$$

$$|\hat{T}(z)| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{(c\,|z|)^n}{M_n} = \mu_M(c|z|) ,$$

i com que μ_M i λ_M són del mateix ordre, $F = \hat{T}$ satisfà

(5) $$|F(z)| = O(\lambda_M(\, C|z|)) .$$

Recíprocament, si F és una funció entera que compleix (5) i $F(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (iz)^n$, per les desigualtats de Cauchy tindrem

$$|b_n| \leq \inf_{t>0} \frac{M(t,F)}{t^n} \leq \text{const.} \inf_{t>0} \frac{\lambda_M(ct)}{t^n} = \text{const } c^n M_n^{-1} ,$$

i $b = (b_n)$ compleix (3). Així, si $H_M(0)$ és l'espai de les F que satifan (5), hem vist que $T \longmapsto \hat{T}$ estableix una bijecció entre el dual de $E_M(0)$ i $H_M(0)$.

Per a cada $\varepsilon > 0$, l'espai $H_M(0, \varepsilon)$ de les funcions enteres F t.q.

$$|F(z)| = O(\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})) ,$$

és un espai de Banach amb norma

$$\|F\|_\varepsilon = \sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})} .$$

$H_M(0)$ és la unió d'aquests espais de Banach i hi podem considerar doncs la topologia inductiva. Que $T \longmapsto \hat{T}$ és un isomorfisme topològic entre el dual fort de $E_M(0)$ i $H_M(0)$ amb aquesta topologia LF es pot veure igual que en (0.3.1.):

La identificació $(a_n) \longmapsto (\frac{a_n}{M^n})$ entre $E_M(0)$ i $h(\infty)$ és topològica i demostra que $E_M(0)$ és un espai de Schwartz. Per tant, segons [33], la topologia forta és una topologia LF. Així, $T \longmapsto \hat{T}$ és una bijecció entre dos espais LF de funcions. És immediat de comprovar que les dues topologies són més fines que la topologia de la convergència puntual, i el teorema general de la gràfica tancada de [15 pg. 148] demostra que $T \longmapsto \hat{T}$ és un isomorfisme topològic. Resumint :

(3.1.1.) Teorema.- . $E_M(0)$ és un espai de Fréchet-Schwartz ; la transformació de Fourier és un isomorfisme topològic entre el dual fort de $E_M(0)$ i l'espai $H_M(0)$ de les funcions enteres F que satisfan (5), aquest últim amb la topologia inductiva. //

3.2.- La imatge puntual.

Podríem mirar de caracteritzar aquelles successions que són la successió de derivades al zero d'una funció de E_M ; aquestes formen un subespai de $E_M(0)$. En lloc d'això, el que farem en aquest apartat és trobar una condició necessària i suficient per a que aquest subespai sigui tot $E_M(0)$, és a dir, per a que l'aplicació

$$r_o : E_M \longrightarrow E_M(0)$$

$$f \longmapsto (f^{(n)}(0))$$

sigui exhaustiva, (aquest mateix problema és resolt per al grup quasi-analític no analítici peralgrup no quasi-analític en el Capítol 6). Farem servir un mètode originalment pensat per al cas n.q.a. però que també funciona en la present situació. Ara ens interessa el cas analític però cal dir que tot aquest apartat és vàlid en el cas quasi-analític general (de fet, al tractar el cas quasi-analític no analític en el Cap. 6 emprarem aquest apartat).

Evidentment, r_o és continua i injectiva i, per tant, dir que r_o és exhaustiva és el mateix que dir que r_o és un isomorfisme topològic, pel teorema de l'aplicació oberta. Com que ambdós són reflexius (els dos són FS), això és el mateix que dir que l'aplicació adjunta $r_o{}^t$

$$r_o{}^t \ : \ E_M'(0) \longrightarrow E_M'$$

(que és una injecció ja que Im r_o és dens a $E_M(0)$ al contenir $\mathcal{P}$), sigui un isomorfisme topològic. Si apliquem la transformació de Fourier a $r_o{}^t$, utilitzant els teoremes (0.3.2.) i (3.1.1.), trobem la inclusió

$$H_M(0) \hookrightarrow H_M \ .$$

Quedem doncs que cal trobar una condició necessària i suficient per a que $H_M = H_M(0)$ com a espais vectorials topològics. Recordem que H_M és l'espai de les F enteres t.q.

$$\left|F(z)\right| = O \ \left(\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp r \left|\operatorname{Im} z\right| \ \right) \ ,$$

per a uns certs r, ε i $H_M(0)$ el de les F que satisfan això mateix però amb $r = 0$ (tots dos amb la topologia inductiva).

A la vista d'aquestes descripcions, veiem que una condició suficient és que λ_M absorbeixi exponencials en el sentit que

$$(6) \qquad \lambda_M(t) \exp t = O\left(\lambda_M(O\,t)\right), \quad t > 0$$

Ara veurem que (6) és també necessària.

(3.2.1.) Teorema.- Si E_M és quasi-analítica, una condició necessària i suficient per a que

$$r_o : E_M \longrightarrow E_M(0)$$

sigui exhaustiva és que λ_M absorbeixi exponencials, en el sentit de (6)

Demostració.- Ens falta veure que és necessària. Suposem doncs que $H_M = H_M(0)$ com a espais vectorials topològics. En particular,

$$H_M \xrightarrow{id} H_M(0)$$

ès contínua, és a dir (per definició de topologia inductiva)

$$H_M(r, \varepsilon) \hookrightarrow H_M(0)$$

és contínua $\forall r$, $\forall \varepsilon > 0$. Per un teorema de Grothendieck ([15, pg. 147]), hi ha $\delta > 0$ t.q. $H_M(r,\varepsilon) \subset H_M(0,\delta)$ i

$$H_M(r,\varepsilon) \hookrightarrow H_M(0,\delta)$$

és contínua (com a espais de Banach). Per tant, si r_o és exhaustiva tindrem :

"Per a cada parell r, ε existeix un $\delta > 0$ i una constant $C > 0$ t.q.

$$(7) \qquad \sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M\left(\frac{|z|}{\delta}\right)} \leq C \sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp r\,|\mathrm{Im}\, z|} ,$$

per a tota funció entera F que fagi finit el membre de la dreta."

Considerem $F(z) = \exp(-iz)\,\mu_M(-iz)$. L'acotació

$$|F(z)| = \exp \mathrm{Im}\, z\, |\mu_M(-iz)| \leq \exp |\mathrm{Im}\, z|\, \mu_M(|z|) \leq \exp |\mathrm{Im}\, z|\, 2\, \lambda_M(2|z|),$$

ens diu que (7) per a $\varepsilon = 1/2$, $r = 1$ i aquesta F té el membre de la dreta més petit que 2 . Per tant

$$\sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M\left(\frac{|z|}{\delta}\right)} \leq C ,$$

per a uns certs δ, C, és a dir

$$\exp \mathrm{Im}\, z\, |\mu_M(-iz)| \leq C\, \lambda_M\left(\frac{|z|}{\delta}\right), \quad \forall z .$$

Si especifiquem a $z = it$, arribem a

$$\exp t\, \mu_M(t) = O\,(\lambda_M(Ot)), \quad t > 0 ,$$

i això implica (6) ja que $\lambda_M \leq \mu_M$. //

(3. 2. 2.) Criteri per a que λ_M absorbeixi exponencials.-

(veure [11], pg. 478)

Si

(8) $$\sup_n \frac{M_{n+1}}{(n+1)\, M_n} = C < \infty ,$$

λ_M absorbeix exponencials.

Demostració.- Com que λ_M i μ_M són funcions del mateix ordre, podem treballar amb μ_M :

$$\mu_M'(t) = \sum_{n\geq 1} n \frac{t^{n-1}}{M_n} = \sum_{n\geq 0} (n+1) \frac{t^n}{M_{n+1}} \geq \frac{1}{C} \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{M_n} = C^{-1}\mu_M(t)$$

és a dir, $(\log \mu_M(t))' \geq d > 0$. Ara, si $0 < t < s$

$$\log \mu_M(s) - \log \mu_M(t) = \int_t^s (\log \mu_M(u))' \, d u \geq d\,(s-t)$$

i fent $s = 2t$, trobem que $\log \mu_M(2t) - \log \mu_M(t) \geq d\,t$, que és el mateix que $(\exp d\,t)\mu_M(t) \leq \mu_M(2t)$ //.

3.3. $E_M(r)$, E_M com a classes de funcions enteres.-

A partir d'ara, suposarem que es compleix (6) (els exemples més característics com $M_n = (n!)^\alpha$ amb $\alpha \leq 1$ la satisfan, doncs compleixen (8)). Llavors $E_M = E_M(0)$ i $H_M = H_M(0)$; també, les k de la representació (19) Cap. 0 o (2) són, tant en el cas de $E_M(r)$ com en el de E_M, les funcions que dominen $\lambda_M(\frac{|w|}{\varepsilon})$ per a tot $\varepsilon > 0$. Com a conseqüència, $E_M = E_M(r)$ $\forall r \geq 0$ i estem tractant un únic espai : el de les funcions enteres expressables sota la forma (2) amb k(w) dominant $\lambda_M(\frac{|w|}{\varepsilon})$ $\forall \varepsilon > 0$. De (2),

$$f^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{(iw)^n \exp(izw)}{k(w)} \, d\mu(w),$$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \|\mu\| \sup_w \frac{|w|^n \exp(|w| \, |z|)}{k(w)} .$$

Ara, k domina totes les $\lambda_M(\frac{|w|}{\varepsilon})$ exp r $|w|$ (perquè les exponencials s'absorbeixen a λ_M i k domina totes les $\lambda_M(|w|/\varepsilon)$). Si

$$\lambda_M(\frac{|w|}{\varepsilon}) \exp \; r|w| \leq C(\varepsilon,r) \; k(w) \quad ,$$

tindrem, per a $|z| \leq r$, (igual que després de la representació (19) del Cap. 0)

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \|\mu\| \; C(\varepsilon, r) \sup_w \frac{|w|^n}{\lambda_M(\frac{|w|}{\varepsilon})} = \|\mu\| \quad C(\varepsilon,r) \, \varepsilon^n \, M_n,$$

(per (7) del Cap. 0). Això és una mena de complexificació de la condició (3) Cap. 0 . Així,

<u>(3. 3. 1.) Proposició. –</u> Si λ_M absorbeix exponencials, $E_M = E_M(r)$ $\forall r \geq 0$ i és l'espai de les funcions enteres f(z) t. q.

$\forall r$, $\forall \varepsilon$ $\exists C(r,\varepsilon)$ t.q.

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq C(r,\varepsilon)\, \varepsilon^n\, M_n \quad \text{per a } |z| \leq r \ ,$$

(o equivalentment, el de les $f \in H$ t.q. $(f^{(n)}(0)) \in E_M(0)$. //

En el cas general, segons (0.1.1.), en els acotats de E_M coincideixen la topologia induïda per E_M i la induïda per E. Ací tenim la següent (no repetim més la hipòtesi (.6)) :

<u>(3.3.2.) Proposició.-</u> En els acotats de E_M coincideixen la topologia induïda per E_M i la induïda per H (la de la convergència uniforme sobre els compactes). Per a $f \in E_M$, la convergència de

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

cap a f ho és per la topologia de E_M.

<u>Demostració.-</u> Vegem lo primer. La inclusió

$$E_M \hookrightarrow H$$

és contínua perquè la seva gràfica és tancada : si $f_n \longrightarrow f$ a E_M i $f_n \longrightarrow g$ a H és $f = g$ sobre $\mathbb{R}$ i per tant, com que les dues són enteres, $f = g$. Això i el fet que E_M sigui de Montel demostren la primera afirmació de la proposició.

Vegem la segona. Del fet que

$$r_o : E_M \longrightarrow E_M(0)$$

sigui un isomorfisme topològic hom veu que les sumes parcials de $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ formen un conjunt acotat a E_M (perquè les seves r_o-imatges el formen a $E_M(0)$) i aleshores la segona afirmació és conseqüència de la primera (o també utilitzant una propietat de la topologia normal, veure [25, pg. 414]) //.

<u>Nota.-</u> Val a dir que la mateixa proposició seria vàlida per a l'espai $H_M = H_M(0)$, i en general, per a tot espai de funcions enteres definit per condicions <u>radials</u> de creixença, com és el cas de $H_M(0)$. Fins ara, però, E_M no ho està de definit per condicions radials; precisament en l'apartat següent donem una condició a fi que així sigui.

<u>3.4. Nova descripció de E_M.</u>

En aquest apartat introduïm una hipòtesi que implica (6) i que permet de descriure E_M com a un espai de funcions enteres amb condicions radials de creixença. La hipòtesi és la següent :

(9) "La successió $m_n = n!/M_n$ és logarítmicament convexa."

Novament, els exemples més característics compleixen (9) : si $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $\alpha \leq 1$, $m_n = (n!)^{1-\alpha}$ és logarítmicament convexa.

Igual que en 0.2. feiem per a M_n, tindrem que la succesió $m_n^{1/n}$ és creixent, és a dir,

$$\left(\frac{n!}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{(n+1)!}{M_{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad , \forall n .$$

D'aquesta, elevant a $n+1$

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)\,M_n} \leq \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} ,$$

i ara (1) ens diu que (8) ès certa, i per (3.2.2.), també (6). Això ens assegura que els apartats anteriors valen amb (9).

Si $m_n^{1/n}$ és acotada, juntament amb (1) implica que (M_n) és equivalent a $(n!)$ i per tant $E_M = H$. Com que no volem estudiar H, suposarem que $m_n^{1/n} \longrightarrow \infty$. Així podem considerar per a $t>0$

$$\lambda_m(t) = \sup_n \frac{t^n}{m_n} , \mu_m(t) = \sum_n \frac{t^n}{m_n}$$

<u>(3.4.1.) Proposició.-</u> Amb la hipòtesi (9), o bé E_M és H o bé és l'espai de les funcions enteres t.q.

(10) $$M(r,f) = O\,(\mu_m(\varepsilon r)) .$$

per a tot $\varepsilon > 0$, amb la topologia definida per les normes

$$\|f\|_\varepsilon = \sup_r \frac{M(r,f)}{\mu_m(\varepsilon r)} .$$

<u>Demostració.-</u> Si $f \in E_M$, com que $|f^{(n)}(0)| \leq C(\varepsilon)\,\varepsilon^n\, M_n$, és

$$|f(z)| \leq C(\varepsilon) \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n M_n}{n!} |z|^n = C(\varepsilon)\,\mu_m(\varepsilon|z|) .$$

D'aquesta s'arriba a (10). Recíprocament, si f satisfà (10), com que podem sustituir μ_m per λ_m al ser funcions del mateix ordre, les desigualtats de Cauchy i (7) del Capítol 0 aplicada a m_n (ací és on intervé la hipòtesi (9)) donen

$$\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \leq \inf_r \frac{M(r;f)}{r^n} \leq C(\varepsilon) \inf_r \frac{\lambda_m(\varepsilon r)}{r^n} =$$

$$= C(\varepsilon)\, \varepsilon^n \inf_r \frac{\lambda_m(\varepsilon r)}{(\varepsilon r)^n} = C(\varepsilon)\, \varepsilon^n m_n^{-1} = C(\varepsilon)\, \varepsilon^n \frac{M_n}{n!} ,$$

és a dir, $\left|f^{(n)}(0)\right| \leq C(\varepsilon)\, \varepsilon^n M_n$. Això significa que $(f^{(n)}(0)) \in E_M(0)$ i per (3.3.1.) que $f \in E_M$. L'afirmació sobre la topologia de E_M és conseqüència del fet que la definida per les $\|f\|_\varepsilon$ és de Fréchet i més fina que la de la convergència puntual (les desigualtats anteriors ho demostren directament). //

Amb aquesta nova descripció de E_M es pot veure clarament la qüalitat d'àlgebra de E_M, tot utilitzant la relació

$$\mu_m(r)^2 = (\sum_k \frac{M_k}{k!} r^k)(\sum_l \frac{M_l}{l!} r^l) = \sum_{k,l} \frac{M_k M_l}{k!\, l!} r^{k+l} =$$

(11)

$$= \sum_n r^n \sum_{k+l=n} \frac{M_k M_l}{k!\, l!} \leq \sum_n \frac{M_n}{n!} r^n \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!\, l!} = \mu_m(2r).$$

Tot el que fins ara hem dit és bo per a la classe corresponent a $M_n = 1$ o en general al cas $\sup_n M_n^{1/n} < \infty$, que havíem "segregat" al Capítol 0. Ací, $m_n = n!$, $\mu_m(r) = \exp r$ i E_M és l'àlgebra de les funcions enteres de <u>tipus exponencial minimal</u>.

<u>Exemple</u>. – Analitzem el cas $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $0<\alpha<1$. Ara, $m_n = (n!)^{1-\alpha}$ és logarítmicament convexa i no acotada. En aquest cas,

$$\lambda_m(t) = \sup_n \frac{t^n}{(n!)^{1-\alpha}} ,$$

i com que $(n!)^{1-\alpha}$ i $n^{n(1-\alpha)}$ són equivalents, $\lambda_m(t)$ és del mateix ordre que

$$\sup_n \frac{t^n}{n^{n(1-\alpha)}} = \Big(\sup_n \frac{(t^{1/1-\alpha})^n}{n^n} \Big)^{1-\alpha} .$$

L'expressió de dins el parèntesi de la dreta és del mateix ordre que $\exp t^{1/1-\alpha}$ i per tant també ho és $\lambda_m(t)$. Concluïm així que en aquest cas $\lambda_m(t)$ és del mateix ordre que $\exp t^{1/1-\alpha}$ i per tant, utilitzant (3.4.1.), E_M és l'àlgebra de les funcions enteres <u>d'ordre més petit o igual de $\beta = (1-\alpha)^{-1}$ i tipus minimal.</u>

3.5. Els invertibles de E_M.

En aquest apartat encetem l'estudi de E_M com a àlgebra. Concretament, volem saber quins elements són invertibles.

Suposem que f és una funció holomorfa al disc tancat de radi R, sense zeros i tal que $f(0)=1$; posem

$$m(r,f) = \inf_{|z|=r} |f(z)|$$

$$M(r,f) = \sup_{|z|=r} |f(z)| .$$

Aleshores tenim la desigualtat ([5] pg. 3):

$$\log m(r,f) \geqslant -\frac{2r}{R-r} \log M(R,f) .$$

Si apliquem això a una funció entera sense zeros amb $f(0)= 1$, fent $R= 2r$ trobem

$$\log m(r,f) \geqslant -2 \log M(2r,f) \quad ,$$

és a dir, que $m(r,f) \geqslant M(2r,f)^{-2}$. En el cas general, considerant $f/ f(0)$ i tenint en compte que $M(r,f^{-1})= m(r,f)^{-1}$, hom arriba a :

<u>Lema.</u>- Si f és una funció entera sense zeros, hom té

(12) $$M(r,f^{-1}) \leq |f(0)|^{-3} M(2r,f)^{2} . //$$

El lema ja permet de donar una caracterització dels invertibles:

<u>(3.5.1.) Proposició</u>.- Una $f \in E_M$ és invertible si i només si $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. L'aplicació $f \longmapsto f^{-1}$ és una operació contínua en el conjunt dels invertibles.

<u>Demostració</u>.- La primera afirmació és conseqüència de (11) i (12), tenint en compte (3.4.1.). Vegem la segona: si U és el conjunt format pels invertibles, és $U= \bigcap_n U_n$ on

$$U_n = \{ f \in E_M / \ f(z) \neq 0 \ \text{per a} \ |z| \leq n \} \quad .$$

La topologia de E_M és més fina que la induïda per H i com a conseqüència U_n és obert. Aleshores U és un G_δ-conjunt i segons un resultat contingut a [50], $f \longmapsto f^{-1}$ és contínua. //

Fixem-nos que la situació és radilcament diferent que en el cas Spec $E_M = \mathbb{R}$. En aquell cas, el que a la proposició s'enuncia només era possible quan l'àlgebra era l.m.-convexa.

3.6. Ideals principals de E_M.

Necessitarem el teorema següent, degut a Levin ([29], pg. 21):

Teorema.- Sigui $f(z)$ holomorfa a $|z|\leq 2eR$ ($R>0$) amb $f(0)=1$, i sigui $0<\eta<3e/2$ donat. Aleshores, a $|z|\leq R$ i fora d'una família de cercles la suma dels diàmetres dels quals és $\leq 8\eta R$, tenim

$$\log |f(z)| > -H(\eta) \log M(2eR,f) \tag{13}$$

on $H(\eta)=2+\log (3e/2\eta)$. //

(3.6.1.) Proposició.- Si $f_1, f_2 \in E_M$ i $h=f_1/f_2$ és entera, $h\in E_M$.

Demostració.- Suposem primer que $f_2(z)=z-a$. Aleshores $M(r,h) \leq M(r,f_1)$ per a r gran i acabem. Així en el cas general podem suposar, en iterant el cas anterior, que $f_2(0)\neq 0$ i per tant que $f_2(0)=1$. Donat $r>0$, apliquem el teorema anterior per a f_2 , $\eta<1/16$ i $R=2r$, de forma que podem assegurar que (13) és cert $\forall |z|\leq 2r$ fora d'una família de cercles; com que la suma dels diàmetres d'aquests cercles és $8\eta R\leq r$, podem assegurar que existeix un R_1 tal que $r<R_1<2r$ i (13) és vàlid per a $|z|=R_1$, és a dir, $m(R_1, f_2)\geq M(4er,f_2)^{-c}$. Ara,

$$M(r,h)\leq M(R_1,h)= \sup_{|z|=R_1} h(z) \leq M(R_1,f_1)\cdot m(R_1,f_2)^{-1} \leq$$

$$\leq M(R_1,f_1)\, M(4er,f_2)^{c} \leq M(4er,f_1)\, M(4er,f_2)^{c} .$$

És $M(4er,f_1)\leq \|f_1\|_\varepsilon \mu_m(4er\varepsilon)$ i $M(4er,f_2)^c\leq \|f_2\|_\varepsilon^c \mu_m(4er\varepsilon)^c$. Per (11), i suposant $c+1$ natural parell, $\mu_m(4er\varepsilon)^{c+1}\leq \mu_m(Cr\varepsilon)$. És a dir, hi ha C,c t.q. $\forall\varepsilon>0$,

$$M(r,h)\leq \|f_1\|_\varepsilon \|f_2\|_\varepsilon^c \mu_m(Cr\varepsilon) ,$$

i això demostra que $h\in E_M$. //

De fet, hem demostrat que

$$\|h\|_{C\varepsilon}\leq \|f_1\|_\varepsilon \ \|f_2\|_\varepsilon^c$$

per a unes certes constants c,C. Si, donats g,f ho apliquem a $f_1=gf$ i $f_2=f$, tindrem que

$$\|g\|_{C\varepsilon}\leq \|gf\|_\varepsilon \|f\|_\varepsilon^c$$

Aquesta desigualtat demostra que $g\longmapsto gf$ és un isomorfisme topològic entre E_M i la imatge (és clarament injectiva) i, en particular, que la imatge és tancada. En altres paraules,

(3.6.2.) Teorema.- Els ideals principals de E_M són tancats. //

3.7.- Estudi dels ideals tancats de E_M.

Mitjançant la descripció (3.4.1.) de E_M hom veu que l'àlgebra E_M és de la classe d'àlgebres estudiades a [28]. A [28] s'estudien les àlgebres de funcions enteres de tipus minimal respecte un pes $M(r)$ que compleixi que per a tot parell $a,b>0$ hi ha una $c>0$ tal que $M(ar)\,M(br)\leq M(cr)$. En el nostre cas, és clar que això és assegurat per (11). Posant, com a l'apartat 2.2., per a un ideal I i un conjunt discret Z,

$$h(I)=\left\{ z\in\mathbb{C} \;/\; f(z)=0 \;\forall f\in I\right\} \;,\; k(Z)=\left\{ f\in E_M / f(z)=0 \;\forall z\in Z\right\} \quad ,$$

(on cada z el considerem escrit tantes vegades com la seva multiplicitat), el principal resultat de l'esmentat article és:

<u>(3.7.1.) Teorema.–</u> Un ideal I de E_M és dens si i només si $h(I)=\emptyset$. Per a tot ideal I de E_M, l'adherència de I és kh(I). En particular, tot ideal tancat està caracteritzat pels seus zeros (contant multiplicitats). //

Es podria deduir la segona part de la primera tal com a l'apartat 2.2. . Una altra observació és que hom pot arribar a aquest mateix teorema utilitzant els mètodes que a [47] són desenvolupats per a les àlgebres de Hadamard, fent servir resultats de [41] (tècnica dels productes infinits, veure també [9]).

La qüestió natural a considerar ara és esbrinar quins conjunts aïllats poden aparèixer com a h(I) per a un cert ideal tancat I. Comencem pel cas que aquest ideal sigui principal i així doncs ara estudiarem quins conjunts aïllats són el conjunt de zeros d'una $f\in E_M$. La tasca és només generalitzar el que a [41] és desenvolupat per a àlgebres de <u>tipus normal</u>.

Primer de tot, fixem-nos que si $f\in E_M$ no solament és

$$M(r,f)= O\,(\mu_m(\varepsilon r)) \quad ,$$

per a tot $\varepsilon>0$, sinó que

$$M(r,f)= o\,(\mu_m(\varepsilon r)) \quad ,$$

per a tot $\varepsilon > 0$. Això és degut a que (11) implica que $\mu_m(\varepsilon r)=$

$= o(\mu_m(2\varepsilon r))$. Posant $m(r) = \log \mu_m(r)$, podem dir doncs que $f \in E_M$ si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha $r(\varepsilon) > 0$ tal que

(14) $$\log M(r,f) \leq m(\varepsilon r) \qquad \text{per a } r \geq r(\varepsilon) .$$

(11) s'escriu ara $2m(r) \leq m(2r)$; de fet, $m(r) + m(t) \leq m(r+t)$, $\forall\, r, t$.

Sigui Z una successió (z_n) de nombres complexes no nuls (poden haver-n'hi de repetits) t. q. $\lim |z_n| = \infty$. Per a cada $r > 0$, $n(r)$ és el nombre de z_n t. q. $|z_n| \leq r$ i

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt = \sum_{|z_n| \leq r} \log \frac{r}{|z_n|}$$

Per a $k = 1, 2, 3, \ldots$ i $r > 0$, hom defineix

$$S(r,k) = \frac{1}{k} \sum_{|z_n| \leq r} \left(\frac{1}{z_n}\right)^k .$$

Es diu que la successió Z té m-densitat zero si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, r(\varepsilon)$ t. q.

(15) $$N(r) \leq m(\varepsilon r) \qquad \text{per a } r \geq r(\varepsilon) ,$$

i es diu que és m-equilibrada si hi ha una successió de complexes (a_n) amb la propietat que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, r(\varepsilon)$ t. q.

(16) $$\left| a_k + S(r,k) \right| \leq \frac{m(\varepsilon r)}{r^k} \quad \forall k, \quad r \geq r(\varepsilon) .$$

Amb aquestes definicions, hom té :

(3.7.2.) Teorema.- Una successió Z és la successió de zeros d'una funció $f \in E_M$ si i només si té m-densitat zero i és m-equilibrada.

Demostració.- Suposem que Z és la successió de zeros de $f \in E_M$. Suposem també que $f(0) = 1$ i que $f(z) = \exp(\sum_k a_k z^k)$ a un entorn $|z| \leq r_o$ de 0. ($r_o = \min_n |z_n|$). La fórmula de Jensen dóna

$$N(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\theta})| \, d\theta \quad ,$$

i ara, per (14), Z té m-densitat zero. Per a $r > 0$, sigui

$$f_r(z) = f(z) \prod_{|z_n| \leq r} \frac{1}{1 - z/z_n}$$

f_r és una funció entera, $f_r(0) = 1$. $f_r(z) \neq 0$ per a $|z| \leq r$. Per tant, hi ha una funció holomorfa a $|z| \leq r$ t.q. $g_r(0) = 0$ i $\exp g_r(z) = f_r(z)$ per a $|z| < r$. Per a cada n, i per a $|z| < r_o$, tenim

$$\log \frac{1}{1 - z/z_n} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k ,$$

de manera que, per a $|z| < r_o$, és

$$g_r(z) = \sum_{k \geq 1} (a_k + S(r,k)) \, z^k \; .$$

Si $|z| = 2r$ i $|z_n| \leq r$, és $|z/z_n| \geq 2$ i $\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \geq 1$. Per tant, $|f_r(z)| \leq |f(z)|$ per a $|z| = 2r$, i així $|f_r(z)| \leq M(2r,f)$ per a $|z| = 2r$. Pel principi del mòdul màxim,

$$|f_r(z)| \leq M(2r,f) \quad \text{per a} \quad |z| \leq 2r \ .$$

Aleshores

$$\operatorname{Re} g_r(z) = \log |f_r(z)| \leq \log M(2r,f) \text{ per a } |z| < r \ .$$

D'ací, per una acotació dels coeficients de la sèrie de Taylor d'una funció holomorfa en termes d'una cota per a la part real (veure [14] pg. 337), tenim

$$\left| a_k + S(r,k) \right| \leq \frac{2 \log M(2r,f)}{r^k} \ , \quad k \geq 1 \ .$$

Donat $\varepsilon > 0$, per (14) és $\log M(r,f) \leq m(\varepsilon r)$ per a $r \geq r(\varepsilon)$. Llavors, per a $r \geq r(\varepsilon)$ i $k \geq 1$,

$$\left| a_k + S(r,k) \right| \leq \frac{2m(2\varepsilon r)}{r^k} \leq \frac{m(4\varepsilon r)}{r^k} \ ,$$

és a dir, Z és m-equilibrada.

Suposem ara que tenim una successió $Z = (z_n)$ m-equilibrada i que té m-densitat zero : per a $\varepsilon > 0$, hi ha $r(\varepsilon) > 0$ t.q. per a $r \geq r(\varepsilon)$ (15) i (16) són certes; (16) demostra que la sèrie $\sum_{k \geq 1} (a_k + S(r,k))\, z^k$ és convergent per a $|z| < r$ si r és gran.

La sèrie $\sum_{k\geq 1} S(r,k)\, z^k$ és convergent per a $|z| < r_o$ i per a tot r, perquè

$$(17) \quad \sum_k S(r,k)\, z^k = \sum_k \sum_{|z_n|\leq r} \left(\frac{1}{z_n}\right)^k \frac{z^k}{k} = \sum_{|z_n|\leq r} \sum_k \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k .$$

Per tant, $\sum_{k\geq 1} a_k z^k$ és convergent per a $|z| < r_o$. Sigui $g(z)$ la seva suma i definim $f(z) = \exp g(z)$. Veurem ara que f, que de moment tan sols és definida per a $|z| < r_o$, pot ésser perllongada com a funció entera.

Per a r gran, definim, per a $|z| < r$,

$$(18) \qquad g_r(z) = \sum_k (a_k + S(r,k))\, z^k .$$

Si $f_r(z) = \exp g_r(z)$, considerem

$$f_r(z) \prod_{|z_n|\leq r} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) .$$

Aquesta és una funció holomorfa a $|z| < r$. Comparant (17) i (18), veiem que $g_r(z) = g(z) - \sum_{|z_n|\leq r} \log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ per a $|z| < r_o$. Per tant, coincideix amb $f(z)$ per a $|z| < r_o$. Per tant, hi ha una funció entera f t. q.

$$f(z) = f_r(z) \prod_{|z_n|\leq r} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \text{ per a } |z| < r ,$$

$$f(z) = \exp\left(\sum_k a_k z^k\right) \text{ per a } |z| < r_o .$$

Lo primer demostra que (z_n) és la successió de zeros de f, doncs $f_r(z) \neq 0 \ \forall |z|<r$. Veurem ara que $f \in E_M$ i acabarem; fixem $\varepsilon > 0$ i sigui $r(\varepsilon)$ com a (15). Per a $r \geq r(\varepsilon)$ i $|z| \leq r$,

$$\left|g_{2r}(z)\right| \leq \sum_{k \geq 1} \left|a_k + S(2r,k)\right| \ r^k \leq \sum_{k \geq 1} \frac{m(2\varepsilon r)}{(2r)^k} r^k = m(2\varepsilon r) .$$

Per a $|z| \leq r$, $\quad f(z) = f_{2r}(z) \prod_{|z_n| \leq 2r} (1 - \frac{z}{z_n})$ i així

$$\left|f(z)\right| \leq \exp m(2\varepsilon r) \prod_{|z_n| \leq 2r} (1 + \frac{r}{|z_n|}) ,$$

que és el mateix que

$$\log M(r,f) \leq m(2\varepsilon r) + \sum_{|z_n| \leq 2r} \log (1 + \frac{r}{|z_n|}) \text{ per a } r \geq r(\varepsilon) .$$

Com que $|z_n| \leq 2r$,

$$1 + \frac{r}{|z_n|} \leq \frac{2r}{|z_n|} + \frac{r}{|z_n|} = \frac{3r}{|z_n|} \quad \text{i}$$

$$\sum_{|z_n| \leq 2r} \log (1 + \frac{r}{|z_n|}) \leq \sum_{|z_n| \leq 2r} \log \frac{3r}{|z_n|} \leq \sum_{|z_n| \leq 3r} \log \frac{3r}{z_n} = N(3r) \leq$$

$\leq \quad m(3\varepsilon r)$.

Resumint, per a $r \geq r(\varepsilon)$,

$$\log M(r,f) \leq m(2\varepsilon r) + m(3\varepsilon r) \leq m(5\varepsilon r)$$

i així $f \in E_M$. //

Direm que una successió $Z = (z_n)$ és <u>m-admissible</u> si és m-equilibrada i té m-densitat zero. Així <u>els ideals principals són tots del tipus $k(Z)$ amb Z m-admissible</u> .

Direm que una successió Z és <u>relativament m-admissible</u> si hi ha una supersuccessió $Z' \supset Z$ que sigui m-admissible. Aleshores, <u>tot ideal tancat és del tipus $k(Z)$ amb Z relativament m-admissible.</u>

Tot ideal tancat serà principal quan els dos conceptes siguin el mateix, és a dir, quan les propietats (15) i (16) siguin hereditàries per a subsuccessions. La (15) sempre ho és mentre que la (16) no i té que veure amb la distribució angular dels z_n .

Una observeció és que mentre (15) és una condició bona, intrinseca (16) no ho és. Igual que en el cas de tipus normal ([41]) podríem donar condicions equivalents a (16) que fossin intrinseques. En lloc d'això estudiarem un cas concret, el de $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $\alpha < 1$.

3.8. El cas $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $0 < \alpha < 1$.-

Ja sabem que en aquest cas E_M és l'àlgebra de les funcions enteres d'ordre $\leq \beta = (1-\alpha)^{-1}$ i tipus minimal. Podem pensar doncs que $m(r) = r^{\beta}$.

(3.8.1.) Proposició.- Si $m(r) = r^{\beta}$, una successió Z té m-densitat zero si i només si $n(r) = o(r^{\beta})$.

Demostració.- Donat $\varepsilon > 0$, és $N(r) \leq (\varepsilon r)^{\beta}$ per a $r \geq r(\varepsilon)$, és a dir, $N(r) = o(r^{\beta})$. Com que

$$N(er) \geq \int_r^{er} \frac{n(t)}{t}\, dt \geq n(r) \int_r^{er} \frac{dt}{t} = n(r),$$

també $n(r) = o(r^{\beta})$.

Reciprocament, suposem que $n(r) = o(r^{\beta})$. Donat $\varepsilon > 0$, és $n(r) \leq \varepsilon r^{\beta}$ per a $r \geq r(\varepsilon)$. Aleshores,

$$N(r) = N(r(\varepsilon)) + \int_{r(\varepsilon)}^{r} t^{-1} n(t)\, dt \leq N(r(\varepsilon)) + \varepsilon \int_{r(\varepsilon)}^{r} t^{\beta-1}\, dt =$$

$$= N(r(\varepsilon)) + \varepsilon \beta^{-1} r^{\beta} - \varepsilon \beta^{-1} r(\varepsilon)^{\beta},$$

és a dir, per a $r \geq r(\varepsilon)$

$$N(r)\, r^{-\beta} \leq N(r(\varepsilon))\, r^{-\beta} + \varepsilon \beta^{-1} - \varepsilon \beta^{-1} (r(\varepsilon)\, r^{-1})^{\beta}.$$

Fent $r \longrightarrow \infty$, arribem a

$$\limsup_{r \longrightarrow \infty} N(r)\, r^{-\beta} \leq \varepsilon \beta^{-1},$$

i com ε és arbitrari, $N(r) = o(r^{\beta})$. //

Estudiem ara la condició de r^{β}-equilibri. Com ja és clàssic, hom troba una diferència essencial entre el cas $\beta \in Z$ i el cas $\beta \notin Z$. (teoremes de Lindelöf (2.9.5.) i (2.10.3.) de [5]).

<u>(3.8.2.) Proposició.-</u> Si $\beta \notin Z$, tota successió de r^{β}-densitat zero és r^{β}-equilibrada (i per tant, r^{β}-admissible).

<u>Demostració.-</u> Cal trobar a_k t.q.

$$(19) \qquad \left| a_k + S(r,k) \right| \leq \varepsilon \, r^{\beta - k} \quad \text{per a } r \geq r(\varepsilon), \quad k \geq 1 \ .$$

Fixem-nos que (19) implica que per a $\beta < k$ a_k és necessariament

$$a_k = - \lim_{r \to \infty} S(r,k) = - \frac{1}{k} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z_n}\right)^k .$$

Comencem doncs per veure que aquesta sèrie és efectivament convergent. Donat $\varepsilon > 0$, per hipòtesi, és $n(r) \leq \varepsilon \, r^{\beta}$ per a $r \geq r(\varepsilon)$. Aleshores, si $r_2 > r_1 > r(\varepsilon)$,

$$(20) \quad \left| S(r_2,k) - S(r_1,k) \right| = \frac{1}{k} \left| \sum_{r_1 < |z_n| \leq r_2} \left(\frac{1}{z_n}\right)^k \right| \leq \frac{1}{k} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dn(t)}{t^k} =$$

$$= \frac{1}{k} \left\{ \frac{n(r_2)}{r_2^k} - \frac{n(r_1)}{r_1^k} + k \int_{r_1}^{r_2} \frac{n(t)}{t^{k+1}} \, dt \right\} \leq \varepsilon (r_2^{\beta - k} + r_1^{\beta - k}) +$$

$$+ \varepsilon \int_{r_1}^{r_2} t^{\beta - (k+1)} \, dt \leq \varepsilon \, (r_2^{\beta - k} + r_1^{\beta - k}) \, \left(1 + \frac{1}{|\beta - k|}\right) .$$

Com que $\beta - k < 0$, veiem que la sèrie compleix el criteri de Cauchy, D'aquesta forma podem definir

$$a_k = -\frac{1}{k}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{z_n}\right)^k \quad \text{per a } k>\beta.$$

Per a $k<\beta$ definim $a_k = -S(2,k)$ (de fet veurem que no tenen trascendència). Amb aquesta elecció del a_k demostrem ara (19). Fixem $\varepsilon>0$ i sigui $r(\varepsilon)$ t.q. $n(r)\leq \varepsilon r^{\beta}$ per a $r\geq r(\varepsilon)$. Si $k>\beta$,

$$\left|a_k + S(r,k)\right| = \lim_{r'\to\infty}\left|S(r,k) - S(r',k)\right| .$$

Ara bé; com a (20) i utilitzant que $\left(1+\frac{1}{|\beta-k|}\right)\leq C$ al ésser $\beta\notin Z$,

$$\left|S(r,k) - S(r',k)\right| \leq \varepsilon\left(r^{\beta-k} + r'^{\beta-k}\right)\left(1+\frac{1}{|\beta-k|}\right)\leq C\,\varepsilon\left(r^{\beta-k}+r'^{\beta-k}\right),$$

i fent $r'\to\infty$, trobem que $\left|a_k + S(r,k)\right|\leq C\varepsilon\, r^{\beta-k}$ per a $r\geq r(\varepsilon)$ i $k>\beta$ que és (16).

Vegem ara els $k<\beta$. Com a (20),

$$\left|a_k + S(r,k)\right| \leq \frac{n(r)}{r^k} + \frac{n(2)}{2^k} + \int_2^r \frac{n(t)}{t^{k+1}}\,dt .$$

Si $r\geq r(\varepsilon)$,

$$\left|a_k + S(r,k)\right| \leq \varepsilon r^{\beta-k} + n(2) + \int_2^{r(\varepsilon)}\frac{n(t)}{t^{k+1}}\,dt + \int_{r(\varepsilon)}^{r}\frac{n(t)}{t^{k+1}}\,dt \leq$$

$$\leq \varepsilon\, r^{\beta-k} + n(2) + \int_2^{r(\varepsilon)}\frac{n(t)}{t^{k+1}}\,dt + \varepsilon\frac{1}{|\beta-k|}\left(r^{\beta-k} + r(\varepsilon)^{\beta-k}\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon r^{\beta-k} + 2\varepsilon \frac{1}{|\beta-k|} r^{\beta-k} + n(2) + D(\varepsilon) .$$

Si fem $r \to \infty$, com que ara $\beta -k > 0$, trobem que

$$\limsup_{r\to\infty} \left| a_k + S(r,k)\right| r^{k-\beta} \leq C\,\varepsilon ,$$

per a $k<\beta$ i com que ε és qualsevol, trobem (19). //

Per tant en el cas que $\beta \notin Z$, és el mateix dir que Z és r^{β}-admissible que dir que té r^{β}-densitat zero. Com que això últim és hereditari per a subsuccessions tenim :

<u>(3. 8. 3) Teorema.</u>- Si $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $\alpha < 1$ i $\beta = (1-\alpha)^{-1} \notin Z$, els ideals principals i els tancats coincideixen i tots són del tipus $k(Z)$, on Z és una successió tal que $n(r) = o(r^{\beta})$. //

<u>(3.8.4.) Proposició.</u>- Si $\beta \in Z$, una successió de r^{β}-densitat zero és r^{β}-admissible si i només si la sèrie $\sum_n (\frac{1}{z_n})^{\beta}$ és convergent.

<u>Demostració.</u> - Suposem que existeixen a_k t.q.

$$\left|a_k + S(r,k)\right| \leq \varepsilon\, r^{\beta-k} \quad \text{per a } r \geq r(\varepsilon), \forall k \geq 1.$$

Per a $k=\beta$ això significa que $a_{\beta} = -\lim_{r\to\infty} S(r,\beta) = \frac{1}{\beta} \sum_n (\frac{1}{z_n})^{\beta}$

i així la condició és necessària. Vegem que és suficient. Definim

$$a_k = -\frac{1}{k} \sum_{n\geq 1} (\frac{1}{z_n})^k \quad \text{per a } k \geq \beta ,$$

(per a $k>\beta$, hom demostraria la convergència de la sèrie tal com a la proposició (3.8.2.)) i

$$a_k = -S(2,k) \qquad \text{per a } k<\beta.$$

Donat $\varepsilon>0$, igual que abans , veuriem pels $k\neq\beta$ que

$$\left|a_k + S(r,k)\right| \leq \varepsilon\, r^{\beta-k} \text{ per a } r\geq r(\varepsilon).$$

Per a $k=\beta$, això mateix és cert per a $r\geq r'(\varepsilon)$, per definició de a_β Així també és cert (19) i acabem la demostració de la proposició. //

Veiem doncs que en el cas $\beta\in Z$ ja no és cert que les successions r^β-admissibles siguin les de r^β-densitat zero. Com a conseqüència, la propietat de r^β-admissibilitat ja no és hereditària, les relativament r^β-admissibles no són r^β-admissibles i no tots els ideals tancats són principals. Però en canvi, hom pot caracteritzar les successions relativament r^β-admissibles.

<u>(3.8.5.) Proposició</u>.- Si $\beta\in Z$, una successió és relativament r^β-admissible si i només si té r^β-densitat zero, $n(r)=o(r^\beta)$.

<u>Demostració</u>.- Hem de veure només la suficiència, és a dir, utilitzant (3.8.4.) , que si Z té r^β-densitat zero podem afegir-hi termes de manera que la sèrie de terme general $z_n^{-\beta}$ sigui convergent conservant $n(r)=o(r^\beta)$. Una manera de fer-ho és afegint els $w^{-1}\ z_n$ amb $w^\beta=-1$; la nova $n(r)$ és el doble de l'anterior i

$$\sum_{|z'_n|\leq r}\left(\frac{1}{z'_n}\right)^\beta = \sum_{|z_n|\leq r}\left(\frac{1}{z_n}\right)^\beta + \sum_{|z_n|\leq r}\left(\frac{1}{w z_n}\right)^\beta = 0. //$$

Emprant (3.8.4.) i (3.8.5.) tenim

(3.8.6.) Teorema. - Si $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $0 \leq \alpha < 1$ i $\beta = (1-\alpha)^{-1} \in Z$ aleshores tot ideal tancat és del tipus k(Z) on Z és una successió tal que $n(r) = o(r^{\beta})$. Els ideals principals són aquells que la corresponent successió compleix a més a més que $\sum_n z_n^{-\beta}$ és convergent. //

Nota. - En el cas $\alpha = 0$ (funcions de tipus exponencial minimal), $\beta = 1$ i $n(r) = o(r)$ és equivalent a dir que $n z_n^{-1} \longrightarrow 0$ ([5] pg. 5). Aquest és el cas estudiat a [38] . Cal dir que els teoremes (3.8.3.) i (3.8.6.) semblen ésser coneguts però que no hem reeixit a trobar-los enunciats a la literatura.

3.9. - El cas que m(r) sigui lentament creixent.

Després de l'apartat anterior, veiem que la qüestió dels ideals és força subtil. Hom diu que un pes m(r) és regular quan val (3.8.5.), és a dir, quan les successions relativament m-admissibles són les que tenen m-densitat zero (veure [41]). Això significarà que la condició que descriu els zeros dels ideals és radial. Els criteris que en el cas de tipus normal existeixen per a que m(r) sigui regular ([41]) poden ser generalitzats. Per exemple, aquest és el cas dels pesos que són lentament creixents.

Hom diu que un pes m(r) és lentament creixent si $m(2r) \leq C\, m(r)$ per a una certa constant C. Hom pot veure que aquesta definició és equivalent al fet que hi hagin $p_o \in Z$ i constants A, B t.q.

$$(21) \qquad \int_r^{\infty} \frac{m(t)}{t^{k+1}}\, dt \leq \frac{A\, m(Br)}{k\, r^k} \quad \text{per a } k \geq p_o ,$$

([41] lema 3.7.).

(3.9.1.) Proposició.- Si $m(r)$ és lentament creixent, $m(r)$ és regular.

Demostració.- Suposem que $Z=(z_n)$ té m-densitat zero, és a dir, $N(r) \leq m(\varepsilon r)$ per a $r \geq r(\varepsilon)$. Hem d'afegir-hi termes fins fer-la m-admissible. Sigui $p_1 \in Z$ t.q. $2^{p_1} > 2C$ i $p_2 = \max(p_o, p_1)$. Així, per a $k \geq p_2$ tenim que val (21) i

(22) $$\frac{m(2^n)}{2^{nk}} \leq \frac{C^n m(1)}{2^{nk}} = \left(\frac{C}{2^k}\right)^n m(1) \xrightarrow[n]{} 0$$

Definim $Z' = \bigcup_{k=0}^{p_2} w^{-k} Z$ on $w = \exp(2\pi i / p_2 + 1)$ i $w^{-k} Z$ designa la successió $(w^{-k} z_n)$. Veurem que Z' és m-admissible. Tenim

$$N'(r) = (p_2 + 1)\, N(r)$$

i així ja té m-densitat zero. Ara cal trobar a_k de manera que valgui (16). Per a $k \leq p_2$ definim $a_k = - S(2,k)$. Per a $k > p_2$, veurem que $(S'(2^n,k))$ és de Cauchy(les ' es refereixen a Z').

$$\left|S'(2^n,k) - S(2^m,k)\right| \leq \frac{1}{k} \int_{2^n}^{2^m} \frac{dn'(t)}{t^k} \leq$$

$$\leq \frac{n'(2^n)}{2^{nk}} + \frac{n'(2^m)}{2^{mk}} + \int_{2^n}^{2^m} \frac{n'(t)}{t^{k+1}}\, dt .$$

Per a r gran $n'(r) \leq N'(er) = (p_2 + 1)\, N(er) \leq (p_2 + 1)\, m(\varepsilon e r)$. Així, per a n gran, $n'(2^n) \leq (p_2 + 1)\, m(\varepsilon e 2^n) \leq (p_2 + 1)\, C^n\, m(\varepsilon e)$. Per tant, per a n,m grans

$$\left|S'(2^n,k)-S'(2^m,k)\right| \leq (p_2+1)\, m(\varepsilon e) \left\{ \frac{C^n}{2^{nk}} + \frac{C^m}{2^{mk}} \right\} +$$

$$+ \int_{2^n}^{2^m} \frac{(p_2+1)\, m(\varepsilon et)}{t^{k+1}}\, dt .$$

Aleshores (22) i el fet que la integral de (21) sigui convergent demostren que $(S'(2^n,k))$ és de Cauchy. Això ens permet de definir

$$a_k = -\lim_n S'(2^n,k) \text{ per a } k > p_2 .$$

Comprobem ara (16): fixem $\varepsilon > 0$ i sigui $r(\varepsilon)$ com a (15). Per a $k \leq p_2$,

$$a_k + S'(r,k) = \frac{1}{k} \sum_{2<|z'_n|\leq r} \left(\frac{1}{z'_n}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{2<|z_n|\leq r} \left(\frac{1}{z_n}\right)^k \sum_{r=0}^{p_2} w^{rk} = 0.$$

Per tant, només cal comprovar (16) per a $k > p_2$. En aquest cas,

$$\left|a_k + S'(r,k)\right| = \lim_n \left|S'(r,k)-S'(2^n,k)\right| .$$

Però

$$\left|S'(r,k)-S'(2^n,k)\right| \leq \frac{n'(r)}{r^k} + \frac{n'(2^n)}{2^{nk}} + \int_r^{2^n} \frac{n'(t)}{t^{k+1}}\, dt .$$

Aleshores per a $r \geq r(\varepsilon)$ i n gran

$$\left|S'(r,k)-S'(2^n,k)\right| \leq \frac{(p_2+1)\, m(\varepsilon er)}{r^k} + \frac{(p_2+1)\, C^n\, m(\varepsilon e)}{2^{nk}} +$$

$$+(p_2+1)\int_r^{2^n}\frac{m(\varepsilon et)}{t^{k+1}}\,dt \leq \frac{(p_2+1)\,m(\varepsilon er)}{r^k}+\frac{(p_2+1)\,C^n\,m(\varepsilon e)}{2^{nk}}+$$

$$+(p_2+1)(\varepsilon e)^k\int_{\varepsilon er}^{e2^n\varepsilon}\frac{m(u)}{u^{k+1}}\,du\,,$$

i suposant $\varepsilon < e^{-1}$,

$$\left|S'(r,k)-S'(2^n,k)\right| \leq \frac{(p_2+1)\,m(\varepsilon er)}{r^k}+(p_2+1)\,m(\varepsilon e)\left(\frac{C}{2^k}\right)^n+(p_2+1)\int_{\varepsilon er}^{\varepsilon e2^n}\frac{m(u)}{u^{k+1}}\,du$$

Fent ara $n\longrightarrow\infty$, i utilitzant (21) trobem

$$\left|a_k+S'(r,k)\right| \leq \frac{(p_2+1)\,m(\varepsilon er)}{r^k}+(p_2+1)\int_{\varepsilon er}^{\infty}\frac{m(u)}{u^{k+1}}\,du \;\leq$$

$$\leq (p_2+1)\left\{\frac{m(\varepsilon er)}{r^k}+\frac{A\,m(\varepsilon eBr)}{kr^k}\right\}\quad,\ k>p_2 \qquad r\geq r(\varepsilon),$$

i aquesta ja implica (16),(gràcies a que $N\,m(r)\leq m(Nr)$). //

<u>(3.9.2.) Proposició</u>.- Si $m(r)$ és lentament creixent, tot ideal de E_M és del tipus $k(Z)$ on Z és una successió amb m-densitat zero, és a dir, tal que val (15). //

3.10.- Generadors de E_M.

Diem que $f_1,\ldots,f_n\in E_M$ són generadors si l'ideal $(f_1,\ldots,f_n)$ que engendren és tot E_M. En aquest apartat donem una condició necessària i suficient per a que $f_1,\ldots,f_n$ siguin generadors, generalitzant resultats de [19], [23], [24]. Necessitarem uns resultats previs que també tenen interès de per sí.

(3.10.1.) Proposició .- Donada una funció contínua positiva $h(r)$ t.q. per a tot $\varepsilon > 0$,

$$h(r) = O(\mu_m(\varepsilon r)), \quad r > 0,$$

existeix $f \in E_M$, amb coeficients de Taylor ≥ 0, de manera que

$$h(r) \leq M(r, f) .$$

Demostració.- Està inspirada en una semblant de [13] . Degut al fet que $\mu_m(\varepsilon r)^2 \leq \mu_m(2\varepsilon r)$, no solament és $h(r) = O(\mu_m(\varepsilon r))$ $\forall \varepsilon > 0$, sinó que també $h(r) = o(\mu_m(\varepsilon r))$ $\forall \varepsilon > 0$. Llavors per a cada $n > 1$, podem triar $d_n \geq 1$ t.q.

$$h(r) \leq \mu_m(\frac{r}{n}) \text{ per a } r \geq d_n .$$

Podem suposar també que $d_{n+1} > d_n$. Sabem que

$$h(r) \leq C \mu_m(r) ,$$

per a una certa constant $C > 1$. Com que $\mu_m(r) = \sum_k \frac{r^k}{m_k}$ uniformement sobre compactes, i canviant C per $2C$, hi ha un $p_1 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$h(r) \leq C \sum_{k=0}^{p_1} \frac{r^k}{m_k} \quad \text{per a } r \leq d_2 .$$

Definim $b_k = \frac{C}{m_k}$ per a $k \leq p_1$.

Suposem, inductivament, que hem determinat $p_1 --, p_n \in \mathbb{N}$ i definit els $b_1, --, b_{p_n}$ de forma que

$$h(r) \leq \sum_{k=0}^{p_n} b_k \; r^k \,, \qquad r \leq d_{n+1}$$

$$b_k \geqslant \frac{1}{m_k \, n^k} \,. \qquad k \leq p_n$$

Llavors, per a $r \geqslant d_{n+1}$

$$h(r) \leq \mu_m\left(\frac{r}{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{p_n} \frac{1}{m_k} \left(\frac{r}{n+1}\right)^k + \sum_{k > p_n} \frac{1}{m_k} \left(\frac{r}{n+1}\right)^k < \sum_{k=0}^{p_n} b_k \, r^k +$$

$$+ \sum_{k > p_n} \frac{1}{m_k} \left(\frac{r}{n+1}\right)^k \,.$$

Per la mateixa raó anterior, hi ha $p_{n+1} \in N$ de forma que

$$h(r) \leq \sum_{k=0}^{p_n} b_k \, r^k + \sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} \frac{1}{m_k} \left(\frac{r}{n+1}\right)^k , \quad d_{n+1} \leq r \leq d_{n+2} \,.$$

Definim $b_k = \dfrac{1}{m_k (n+1)^k}$ per a $p_n < k \leq p_{n+1}$. D'aquesta forma

determinem una successió (p_n) t. q. si $b_k = \dfrac{1}{m_k n^k}$ per a $p_{n-1} < k \leq p_n$,

tenim

$$h(r) \leq \sum_{k=0}^{p_n} b_k \, r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, r^k \,.$$

La funció $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, z^k$ és de E_M perquè $\left(\frac{f^{(k)}(0)}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{b_k k!}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{n}$

per a $p_{n-1} < k \leq p_n$, tendeix a zero, és a dir, $(f^{(k)}(0)) \in E_M(0)$ i per

(3.3.1.) això és suficient per a que $f \in E_M$. Finalment,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k = f(r) = M(r,f) ,$$

degut al fet que $b_k \geq 0 \;\forall k$. Això acaba la demostració de la proposició. //

<u>(3.10.2.) Corol·lari.-</u> Donada $h(r)$ com a (3.9.1.), existeix una funció Ψ convexa en $\log r$ (i per tant, subharmònica com a funció de z) t.q.

$$h(r) \leq \exp \Psi(r))$$

$$\exp \Psi(r) = O\ (\mu_m(\varepsilon r)) \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

<u>Demostració.-</u> És suficient de definir $\Psi(r) = \log M(r,f)$ on f és la de la proposició (3.9.1.). $\Psi(r)$ és convexa en $\log r$ pel teorema dels tres cercles de Hadamard. //

<u>(3.10.3.) Lema.-</u> Si (M_n) és una successió logarítmicament convexa i $M_n^{1/n} \longrightarrow \infty$, les funcions λ_M i μ_M definides al capítol O compleixen les desigualtats

$$(23) \qquad \lambda_M(s+t) \leq \lambda_M(2s)\,\lambda_M(2t),\; \mu_M(s+t) \leq 2\,\mu_M(4s)\,\mu_M(4t) .$$

<u>Demostració.-</u> La segona és conseqüència de la primera perquè $\lambda_M(t) \leq \mu_M(t) \leq 2\,\lambda_M(2t)$. Demostrem doncs la primera : per a tot n, utilitzant (4) del Capitol O, tenim

$$(s+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k} \leq \lambda_M(s)\;\lambda_M(t) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k\; M_{n-k} \leq$$

$$\leq \lambda_M(s)\,\lambda_M(t)\, M_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \lambda_M(s)\;\lambda_M(t)\; M_n\; 2^n .$$

Aquesta desigualtat demostra que $\lambda_M\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \lambda_M(s)\,\lambda_M(t)$ que és el mateix que (23) . //

<u>(3.10.4.) Proposició.-</u> Per a una funció entera f, són equivalents :

(a) $f \in E_M$

(b) per a tot $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)|^2}{\mu_m(\varepsilon|z|)}\, dm(z) < \infty$ (d m la mesura de Lebesque)

(c) existeix una funció $\Psi(z) \geq 0$ subharmònica t.q.

(i) $\exp \Psi(z) = O(\mu_m(\varepsilon|z|)) \quad \forall \varepsilon > 0$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \exp(-\Psi(z))\, dm(z) < \infty$.

<u>Demostració.-</u>

(c) $\Rightarrow$ (b) és inmediat

(b) $\Rightarrow$ (a) . Fixem z i sigui B la bola de centre z i radi a. Tindrem,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\pi}\int_B |f(w)|\, dm(w) = \frac{1}{\pi}\int_B \frac{|f(w)|}{\mu_m(\varepsilon|w|)^{\frac{1}{2}}}\, \mu_m(\varepsilon|w|)^{\frac{1}{2}}\, dm(w) \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{\pi}\int_B \frac{|f(w)|^2}{\mu_m(\varepsilon|w|)}\, dm(w)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\pi}\int_B \mu_m(\varepsilon|w|)\, dm(w)\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C(\varepsilon) \left[\frac{1}{\pi}\int_B \mu_m(\varepsilon|w|)\, dm(w)\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Per el lema (3.10.3.) aplicat a la successió logaritmicament convexa m_n, és $\mu_m(\varepsilon|w|) \leq \mu_m(\varepsilon+\varepsilon|z|) \leq 2\mu_m(4\varepsilon)\mu_m(4\varepsilon|z|)$. Així,

$$|f(z)| \leq C(\varepsilon)(2\mu_m(4\varepsilon)\mu_m(4\varepsilon|z|))^{\frac{1}{2}} \leq C'(\varepsilon)\mu_m(4\varepsilon|z|), \quad i \quad f \in E_M.$$

(a) $\Rightarrow$ (c). Si $f \in E_M$, també $f^2 \in E_M$. Si $f^2(z) = \sum b_n z^n$, la funció $g(z) = \sum_n |b_n| z^n$ també és de E_M (perquè $(|b_n|) \in E_M(0)$). Posem $h(z) = (1 + z^p)\, g(z) + 1$, on $p \in N$ és gran, que també és a E_M. Definim $\Psi(z) = \log h(|z|)$; (i) és cert ja que $h \in E_M$. També,

$$|f(z)|^2 \exp(-\Psi(z)) = \frac{|f(z)|^2}{h(|z|)} \leq \frac{g(|z|)}{h(|z|)} \leq \frac{1}{1+|z|^p}$$

és integrable si p és prou gran. Finalment, $\Psi(z) = \log h(|z|) = \log M(|z|, h)$ és una funció convexa en $\log|z|$ (teorema dels tres cercles de Hadamard) i per tant és subharmònica. //

<u>(3.10.5.) Teorema.-</u> Siguin $f_1, \ldots, f_n \in E_M$ i I l'ideal que engendren. Aleshores, $I = E_M$ si i només si no s'anul·len simultàniament en cap punt i

$$(24) \qquad \Big(\sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|\Big)^{-1} = O(\mu_m(\varepsilon|z|))$$

per a tot $\varepsilon > 0$.

<u>Demostració.-</u> La condició és necessària : si $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$, com que $|g_j(z)| \leq \|g_j\|_\varepsilon \, \mu_m(\varepsilon|z|)$, tenim

$$1 \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|\,|g_j(z)| \leq C(\varepsilon)\mu_m(\varepsilon|z|) \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|,$$

que implica (24).

Per demostrar que la condició és suficient seguirem el mètode de [19], [24]. Sigui W l'espai de les funcions f mesurables definides a $\mathbb{C}$, a valors complexes que satisfan (c) de (3.10.4.); per a $q > 0$, sigui $L_q = L_q^0$ l'espai de les formes diferencials de tipus $(0,q)$ a $\mathbb{C}$ amb coeficients a W, és a dir, les w t.q. $|w|$ satisfà (c) de (3.10.4.) (si $w = \sum_J w_J d\bar{z}^J$, J creixent, $|w|^2 = \sum_J |w_J|^2$). Per a cada $p \in N$, sigui Γ_p el conjunt de totes les p-ples $I = (i_1, \dots i_p)$ amb $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$ i L_q^p el conjunt de totes les aplicacions antisimètriques de Γ_p en L_q. Per a cada $\alpha \in L_q^p$ i $I \in \Gamma_p$, $\alpha(I) \in L_q$. L'operador $\bar{\partial}$ defineix un operador no acotat

$$\bar{\partial} : L_q^p \longrightarrow L_{q+1}^p$$

per $(\bar{\partial}\alpha)(I) = \bar{\partial}(\alpha(I))$ (en el sentit de les distribucions). El seu domini consta de les $\alpha \in L_q^p$ t.q. $\bar{\partial}(\alpha(I)) \in L_{q+1}$ $\forall I \in \Gamma_p$.

Definim $P: L_q^{p+1} \longrightarrow L_q^p$ de la manera següent: per a $\alpha \in L_q^{p+1}$ i $I = (i_1, \dots, i_p) \in \Gamma_p$,

$$(P\alpha)(I) = \sum_{j=1}^{n} f_j\, \alpha(i_1, \dots, i_p, j).$$

Definim també $P\alpha = 0$ si $\alpha \in L_q$. És clar que $P^2 = \bar{\partial}^2 = 0$; per a

$\alpha \in L_q^{p+1}$, $I \in \Gamma_p$, com que $\bar\partial f_j = 0$ al ser f_j entera, tenim

$$(P \bar\partial \alpha)(I) = \sum_{j=1}^{n} f_j (\bar\partial\alpha)(i_1,\ldots, i_s, j) = \sum_{j=1}^{n} f_j \bar\partial\alpha(i_1,\ldots,i_s,j) =$$

$$= \bar\partial \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \alpha(i_1,\ldots,i_s,j) \right) = \bar\partial (P\alpha)(I) = (\bar\partial P\alpha)(I) .$$

Per tant, tenim un complexe doble (el complexe de Koszul).

Amb aquestes definicions, el fet a demostrar, $I = E_M$, equival a demostrar l'existència de $\alpha \in L_o^1$ t.q. $P\alpha = 1$, $\bar\partial\alpha = 0$. En efecte: $P\alpha = \sum_{j=1}^{n} f_j \alpha(j)$ on $\alpha(j)$ és una (o,o) forma amb coeficients de W, és a dir, una funció de W; $\bar\partial\alpha = 0$ significa que cada $\alpha(j)$ és entera i (3.10.4) ens diu que $E_M = H \cap W$.

El lema següent és a [19], i és una modificació del teorema 4.4.2. de [18]:

<u>Lema 1.-</u> Sigui β una forma de tipus $(0, q+1)$ amb coeficients mesurables , $\bar\partial\beta = 0$ i φ subharmònica t.q.

$$\int_{\mathbb{C}} |\beta|^2 \exp(-\varphi)\, dm < \infty .$$

Aleshores, hi ha una forma α de tipus $(0,q)$ tal que $\bar\partial\alpha = \beta$ i

$$(25) \qquad \int_{\mathbb{C}} |\alpha|^2 \exp(-\varphi)\,(1+|z|^2)^{-2}\, dm(z) \leq \int_{\mathbb{C}} |\beta|^2 \exp(-\varphi)\, dm \; //.$$

<u>Lema 2.-</u> L'equació $\bar\partial\alpha = \beta$ té una solució $\alpha \in L_q^p$ per a cada $\beta \in L_{q+1}^p$ tal que $\bar\partial\beta = 0$.

Demostració. - És suficient de fer el cas p=0. Aleshores el lema 1 anterior ens dóna una α tal que la funció $|\alpha|$ compleix (ii) de (c) de (3.10.4.) amb la funció s.h. $\psi(z)=\varphi(z)+2\log(1+|z|^2)$. Ara, per (11),

$$\exp\ \psi = \exp\ \varphi\ (1+|z|^2)^2$$

és $O(\mu_m(\varepsilon|z|))$ $\forall\varepsilon>0$ perquè $\exp\varphi$ ho és i el polinomi també. //

Lema 3. - Si $\alpha\in L_q^p$ i $P\alpha=0$, existeix $\beta\in L_q^{p+1}$ tal que $P\beta=\alpha$. A més a més, $\bar\partial\beta\in L_{q+1}^{p+1}$ si $\bar\partial\alpha=0$.

Demostració. - Per a $I\in\Gamma_{p+1}$, definim

$$\beta(I)=\Big(\sum_{j=1}^{n}|f_j(z)|^2\Big)^{-1}\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{s+1-k}\ \bar f_{i_k}\alpha(I_k)\quad ,$$

on I_k és $I=(i_1,\dots,i_{p+1})$ amb i_k eliminat. Si w és el sumatori de la dreta, utilitzant que $\alpha(I_k)\in L_q$, que $f_j\in E_M$ i (3.10.4.) veuriem que $w\in L_q$, és a dir,

$$\int_{\mathbb{C}}|w|^2\exp(-\varphi_1)<\infty\quad ,$$

per a una certa funció subharmònica φ_1 t.q. $\exp\varphi_1(z)=O(\mu_m(\varepsilon|z|))$ $\forall\varepsilon>0$. Posem

$$h(r)=\sup_{|z|=r}\Big(\sum_{j=1}^{n}|f_j(z)|\Big)^{-1}\quad ,$$

de manera que $|\beta(I)|^2=\Big(\sum_{j=1}^{n}|f_j(z)|^2\Big)^{-2}|w|^2\le$ const. $h(|z|)^4|w|^2$. La hipòtesi (24) significa que h(r) compleix les condicions de (3.10.2.) i així existeix una funció subharmònica $\varphi_2(z)$ t.q. $h(|z|)\le\varphi_2(z)$ i $\exp\varphi_2(z)=O(\mu_m(\varepsilon|z|))$ $\forall\varepsilon>0$. Si $\psi=\varphi_1+4\varphi_2$, ψ és subharmònica, $\exp\psi(z)=O(\mu_m(\varepsilon|z|))$ gràcies a (11) i

$$\int |\beta(I)|^2 \exp(-\Psi) \le \text{const.} \int |w|^2 \exp(-\varphi_1) < \infty .$$

Això demostra que $\beta \in L_q^{p+1}$. És senzill de veure que $P\beta = \alpha$.

Suposem que $\bar\partial \alpha = 0$. Si $|f|^2 = \sum |f_j(z)|^2$, utilitzant el lema 2.4. de [24],

$$(\bar\partial \beta)(I) = \bar\partial(\beta(I)) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{s+1-k} \bar\partial\left(\frac{\bar f_{i_k}}{|f|^2}\right) \wedge \alpha(I_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{s+1-k} |f|^{-1} \sum_{j=1}^{n} f_j \overline{(f_j \partial f_{i_k} - f_{i_k} \partial f_j)} \wedge \alpha(I_k) \wedge d\bar z \quad .$$

Els coeficients de $(\bar\partial \beta)(I)$ són doncs els de $\alpha(I_k)$, que estan a W, multiplicats per expressions

$$|f|^{-1} \sum_{j=1}^{n} f_j \overline{(f_j \partial f_{i_k} - f_{i_k} \partial f_j)} .$$

$|f|^{-1}$ és com abans $O(\exp \varphi(z))$ amb $\exp \varphi = O(\mu_m(\varepsilon |z|))$ $\forall \varepsilon > 0$. També ho són $|f_j|$ i $|\partial f_i|$ perquè $f' \in E_M$ si $f \in E_M$. Aplicant (ii) reiteradament, hom veu que els coeficients de $(\bar\partial\beta)(I)$ són $O(\exp \varphi(z))$ amb $\exp \varphi(z) = O(\mu_m(\varepsilon |z|))$ $\forall \varepsilon > 0$, és a dir, $\bar\partial \beta \in L_{q+1}^{p+1}$. //

<u>Lema 4.-</u> Per a cada $\alpha \in L_q^p$ tal que $\bar\partial\alpha = P\alpha = 0$, hi ha $\beta \in L_q^{p+1}$ tal que $\bar\partial\beta = 0$ i $P\beta = \alpha$.

<u>Demostració.-</u> És un argument de tipus homològic ([19]).

Si $r > 1$ o $s > n$ és trivial. Per inducció, pel lema 3, hi ha $\beta' \in L_q^{p+1}$ t.q. $P\beta' = \alpha$ i $\bar\partial\beta' \in L_{q+1}^{p+1}$; com que $\bar\partial\bar\partial\beta' = 0$ i $P\bar\partial\beta' = \bar\partial P\beta' = \bar\partial\alpha = 0$, la hipòtesi d'inducció aplicada a $\bar\partial\beta'$ permet de trobar $\beta'' \in L_{q+1}^{p+2}$ tal que $P\beta'' = \bar\partial\beta'$ i $\bar\partial\beta'' = 0$. Pel lema 2, existeix $\beta''' \in L_q^{p+2}$ de forma que $\bar\partial\beta''' = \beta''$. Definim $\beta = \beta' - P\beta'''$. Ara,

$$\bar\partial\beta = \bar\partial\beta' - \bar\partial P\beta''' = \bar\partial\beta' - P\bar\partial\beta''' = \bar\partial\beta' - P\beta'' = 0 \quad \text{i } P\beta = P\beta' = \alpha . //$$

Aquest lema, per a $\alpha = 1, p = q = 0$ demostra el teorema (3.10.5.). //

CAPÍTOL 4

EL GRUP NO QUASI-ANALÍTIC

4.0.- Introducció.

El principal resultat d'aquest capítol és el teorema de la síntesi espectral, que demostrem amb hipòtesis escaients. Aclarirem ara que entenem per síntesi espectral.

Suposem que E_M és invertible, o equivalentment, segons (1.3.3.), que E_M és l.m.-convexa. La no quasi-analiticitat significa que l'àlgebra és regular. Aleshores, per teoria general (veure [36]), tindrem:

" Per a tot conjunt tancat $F \subset \mathbb{R}$ existeix un mínim ideal $N(F)$, anomenat l'ideal de nulitats de F, que té a F com a conjunt de zeros. $N(F)$ és format per les funcions nul·les en un entorn de F. La seva adherència $\overline{N(F)}$, l'ideal tancat de nulitats, és el mínim ideal tancat que té a F com a conjunt de zeros."

Un altre fet general és que existeixen a E_M particions de la unitat en el sentit habitual (veure [6]) i com a conseqüència hom té que si $f \in E_M$ pertany localment a un ideal tancat I, en el sentit que per a tot x hi ha un entorn U_x i una $g_x \in I$ tal que $f = g_x$ a U_x, aleshores $f \in I$ ([6] , [36]). És a dir, si $N(x)$ és l'ideal de nulitats del punt x, hom té:

(4.0.1.) Teorema.- Per a tot ideal tancat I de E_M,

$$I = \bigcap_x I + N(x) \quad . \qquad //$$

(de fet aquest resultat només depen de l'existència de particions de la unitat, i utilitzant (0.1.1.) podriem veure que val en el cas general sense la hipòtesi de l.m.-convexitat).

El problema de la síntesi espectral consisteix en veure si és certa, per a tot ideal I de E_M, la relació

$$(1) \qquad I = \bigcap_x I + \overline{N(x)} \quad .$$

Aquest és un problema plantejable en qualsevol àlgebra A l.m-convexa regular; utilitzant que $I + J = A$ si I, J són ideals tancats sense zeros en comú ([36]), veiem que tant a (4.0.1.) com a (1) és suficient de considerar els $x \in h(I)$ (aci no contem multiplicitats). Llavors, és fàcil de veure utilitzant (4.0.1.), que (1) és sempre cert si $h(I)$ és un conjunt discret.

Hom només coneix relativament pocs exemples d'àlgebres l.m-convexes regulars on val la síntesi espectral. L'exemple més conegut és el de E, demostrat per Whitney ([49]). Una demostració simplificada es troba a [31]. En el nostre cas, comencem per identificar $\overline{N(x)}$:

(4.0.2.) Proposició.- $\overline{N(x)}$ és l'ideal de les funcions de E_M planes a x, , és a dir, $f^{(n)}(x) = 0, \forall n$.

<u>Demostració.-</u> És evident que $\overline{N(x)}$ està format per funcions planes a x. Recíprocament, i fent-ho només per a $x = 0$, si $f^{(n)}(0) = 0$, definim

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x - 1/n) & \text{per a } 1/n \leq x , \\ 0 & \text{per a } |x| \leq 1/n, \\ f(x + 1/n) & \text{per a } x \leq -1/n . \end{cases}$$

$f_n \in E_M$ ja que $p_{r,\varepsilon}(f_n) \leq p_{r+1,\varepsilon}(f)$; això mateix demostra que (f_n) és un conjunt acotat a E_M. Com que $f_n \longrightarrow f$ a E, per (0.1.1.) deduïm que $f_n \longrightarrow f$ a E_M i així $f \in \overline{N(x)}$. //

Per tant, demostrar (1) significa veure que si una funció $f \in E_M$ té a tot punt x el mateix desenvolupament de Taylor que una funció de I (podriem dir que pertany <u>puntualment</u> a I), aleshores $f \in I$. Expressat d'aquesta forma, és un problema plantejable en el cas general, sense cap hipòtesi de I. m-convexitat. Això és el que farem en aquest capítol : <u>donada E_M n.q.a. estudiar quan és que per a tot ideal tancat</u> ,

(2) $$I = \bigcap_x I + P(x) ,$$

<u>on $P(x)$ és l'ideal de les funcions planes a x .</u>

El mètode que seguirem és inspirat en la demostració que Malgrange fa del teorema de Whitney ([31]) . Quan hom intenta trobar una generalització adeqüada del lema central 1.4. p. 22 de [31], (veure més endavant), hom veu que intervenen, en línies generals, dues funcions de $d > 0$, una que decreix ràpidament i una altra que creix ràpidament.

– La primera és la funció que controla, per a una $f \in E_M$ plana a a com decreix $f^{(k)}(x)$ quan $|x - a| = d$ tendeix a zero.

– La segona és la funció que controla, per a particions de la unitat (Ψ_i) subordinades a un recobriment θ, i fixe ε, com creix

$$(3) \qquad \sup_{\substack{k \in N \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{\sum_i |\Psi_i^{(k)}(t)|}{\varepsilon^k M_k} ,$$

quan el diàmetre d dels conjunts de θ es fa petit.

Hom veu també que és necessari que la primera "compensi" a la segona. Començarem per veure que és el millor que podem dir de la primera funció; després, la feina serà veure que podem sempre construir particions de la unitat de forma que (3) no escapi dels "límits imposats" per la primera funció.

4.1. Com decreix f si és plana a un punt a ?

A la nota posterior a (1.2.3.) hem vist que si E_M és n.q.a. la successió $N_n = \frac{M_n}{n!}$ és t.q. $N_n^{1/n} \longrightarrow \infty$. Aleshores

$$\lambda_N(t) = \sup_n \frac{t^n}{N_n} ,$$

és finit, per a tot $t > 0$.

Utilitzant la fórmula integral pel rest d'ordre m d'una $f \in E$ en un punt a, tindrem, per a una funció f plana a a, i per a tot m,

$$(4) \qquad f(x) = (x-a)^{m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(a+t(x-a))\, dt \; .$$

Fixem r, ε i considerem $|x|, |a| \leq r$. Aleshores

$$|f(x)| \leq |x-a|^{m+1} \frac{\|f^{(m+1)}\|_r}{m!} \leq \frac{|x-a|^{m+1}}{m!} p_{r,\varepsilon}(f)\, \varepsilon^{m+1} M_{m+1} ,$$

i utilitzant (2) del Cap. 0 ,

$$|f(x)| \leq A \varepsilon\, p_{r,\varepsilon}(f)\, |x-a| \frac{(\varepsilon H |x-a|)^m M_m}{m!} \; .$$

Això és cert $\forall m$ i per tant

$$|f(x)| \leq A\, \varepsilon\, p_{r,\varepsilon}(f)\, |x-a| \inf_m \frac{(\varepsilon H |x-a|)^m M_m}{m!} =$$

$$= A \varepsilon\, p_{r,\varepsilon}(f)\, |x-a| \left(\sup_m \frac{m!}{(\varepsilon H |x-a|)^m M_m}\right)^{-1} =$$

$$= A \varepsilon\, p_{r,\varepsilon}(f)\, |x-a|\, \lambda_N^{-1}(1/\varepsilon H |x-a|) \; ,$$

per a $|x|, |a| \leq r$. De la mateixa forma, per a $f^{(k)}$ que també és plana:

$$|f^{(k)}(x)| \leq A \varepsilon\, p_{r,\varepsilon}(f^{(k)})\, |x-a|\, \lambda_N^{-1}(1/\varepsilon H |x-a|), \; |x|, |a| \leq r \; .$$

Introduïm ara la primera hipòtesi .

(5) "existeix una constant $D > 0$ t.q. $M_{k+n} \leq D^{k+n} M_k M_n$ "

Per exemple, $M_n = (n!)^{\alpha}$, $\alpha > 1$, compleix (5) amb $D = 2^{\alpha}$; per a veure-ho, només cal elevar a α la desigualtat $\binom{k+n}{k} \leq 2^{k+n}$. Amb la hipòtesi (4),

$$p_{r,\varepsilon}(f^{(k)}) = \sup_n \frac{\|f^{(k+n)}\|_r}{\varepsilon^n M_n} \leq M_k \varepsilon^k \sup_n \frac{\|f^{(k+n)}\|_r D^{k+n}}{\varepsilon^{k+n} M_{n+k}} \leq$$

$$\leq M_k \varepsilon^k p_{r,B\varepsilon}(f)$$

i

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq A\varepsilon M_k \varepsilon^k p_{r,B\varepsilon}(f) \quad |x-a| \lambda_N^{-1} (1/\varepsilon H |x-a|) .$$

Així hem arribat a

<u>(4.1.1.) Proposició.-</u> Suposem que es compleix (5). Aleshores, existeixen constants $A, B, H > 0$ t.q. si f és plana a a, hom té

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq A\varepsilon p_{r,B\varepsilon}(f) \varepsilon^k M_k |x-a| \lambda_N^{-1} (1/\varepsilon H |x-a|), \tag{6}$$

$\forall k$, per a $|x|, |a| \leq r$ //

Quan $x \to a$, $\lambda_N(1/\varepsilon H |x-a|)$ tendeix a ∞, $\lambda_N^{-1}(1/\varepsilon H |x-a|)$ a zero i així (6) controla el decreixement de $f^{(k)}$. (a [3] s'obtenen millors estimacions, en casos particulars, per altres mètodes).

A (6), veiem que $\lambda_N^{-1}(d^{-1})$ és essencialment, la primera funció que buscàvem . Així, la segona no pot creixer més que $\lambda_N(d^{-1})$.

4.2.- El problema de les particions de la unitat.

Per fer més senzilles les coses només considerarem particions de la unitat molt especials: seran subordinades als recobriments format pels intervals $K_{n,d} = [(n-1)d, (n+1)d]$ i totes les funcions seran trasladades d'una funció fixa amb suport a $K_{o,d}$. És a dir, donada una $\varphi \in D_M$ t. q.

$$\varphi(x) + \varphi(x-d) = 1 \qquad 0 \leq x \leq d\,, \quad \operatorname{supt} \varphi \subset [-d, d] \,,$$

definim $\varphi_n(x) \stackrel{!}{=} \varphi(x-nd)$. És clar que supt $\varphi_n \subset K_{n,d}$; per a x a la mitad dreta de $K_{n,d}$ només no s'anul·len $\varphi_{n,d}$ i $\varphi_{n+1,d}$ i

$$\varphi_{n,d}(x) + \varphi_{n+1,d}(x) = \varphi(x-nd) + \varphi(x-nd-d) = 1 \;.$$

Per tant, d'aquesta forma obtenim realment una partició de la unitat (no cal que les funcions siguin positives). Tenim també, per a aquest x

$$\sum_n \varphi_{n,d}^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x-nd) + \varphi^{(k)}(x-nd-d) \,,$$

i per tant (3), per a aquestes particions de la unitat, és dominat per

$$2 \sup_k \frac{\|\varphi^{(k)}\|_d}{\varepsilon^k M_k} = 2\, p_{d,\varepsilon}(\varphi) \;.$$

Posant $\varphi(x) = \psi(x/d)$ amb supt $\psi \subset [-1, 1]$ ho reduïm al cas $d = 1$, i la quantitat a controlar és ara

$$p_{d,\varepsilon}(\varphi) = \sup_k \frac{\|\varphi^{(k)}\|_d}{\varepsilon^k M_k} = \sup_k \frac{\|\psi^{(k)}\|_1}{(\varepsilon d)^k M_k} = p_{1,\varepsilon d}(\psi) .$$

D'acord amb el que s'ha exposat a la introducció, hem de veure que és posible de trobar φ t. q.

$$(7) \qquad \varphi \in D_M, \ \ \mathrm{supt}\, \varphi \subset [-1,1] \quad \varphi(t) + \varphi(t-1) = 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

i de manera que $p_{1,\varepsilon d}(\varphi)$ no creixi essencialment més de pressa que $\lambda_N(d^{-1})$.

Ara bé, considerem φ com a (7). Com que φ és plana a -1, per la fórmula (4) aplicada a φ, $a = -1$ i $n-1$, és

$$|\varphi(x)| \leq (x+1)^n \|\varphi^{(n)}\|_1 \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = (x+1)^n \frac{\|\varphi^{(n)}\|_1}{n!} .$$

Com que $\varphi(0) = 1$, trobem $1 \leq \dfrac{\|\varphi^{(n)}\|_1}{n!}$, és a dir $\|\varphi^{(n)}\|_1 \geqslant n!$.

Aleshores,

$$p_{1,\varepsilon d}(\varphi) = \sup_n \frac{\|\varphi^{(n)}\|_1}{(d\varepsilon)^n M_n} \geqslant \sup_n \frac{n!}{(d\varepsilon)^n M_n} = \lambda_N(\varepsilon^{-1} d^{-1})$$

Aquesta relació ens mostra com es dispara $p_{1,\varepsilon d}(\varphi)$ quan d es fa petit. Al mateix temps ens fa veure que el nostre problema és en certa forma un problema d'optimització puix mentres que per un costat necessitem que $p_{1,\varepsilon d}(\varphi)$ no creixi més ràpidament que $\lambda_N(d^{-1})$ pel altre hem vist que no pot créixer més a poc a poc. En altres paraules, si hem vist que

$$\inf_{\varphi \text{ complint } (7)} p_{1,\varepsilon d}(\varphi) \geq \lambda_N(\varepsilon^{-1} d^{-1}) ,$$

hem de veure també que val essencialment la desigualtat contrària.

En l'apartat següent traduïm (7) en termes de la transformada de Fourier de $\hat{\varphi}$.

4.3.- Caracterització de $\hat{D}_M$ i de (7).

Si $\varphi \in D_M$, la seva transformada de Fourier, com a element de E'_M, és la funció entera

$$(8) \qquad \hat{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \exp(itz)\, dt .$$

(4.3.1.) Teorema.- Una funció entera F és la transformada de Fourier d'una $\varphi \in D_M$, amb suport dins $[-r,r]$ si i només si

(a) $|F(z)| = O(\exp r|z|), \quad z \in \mathbb{C}$

(b) $|F(x)| = O(\lambda_M^{-1}(\frac{|x|}{\varepsilon})) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Demostració.- És estàndard . Integrant per parts (8) hom veu que $\widehat{\varphi^{(n)}}(z) = (-iz)^n \hat{\varphi}(z)$. Si supt $\varphi \subset [-r,r]$

$$|z|^n |\hat{\varphi}(z)| = |\widehat{\varphi^{(n)}}(z)| \leq \int_{-r}^{r} |\varphi^{(n)}(t)| \exp(-t \operatorname{Im} z)\, dt \leq p_{\varepsilon}(\varphi) \varepsilon^n M_n \, 2r \exp r|\operatorname{Im} z| .$$

Per tant, per a $z \neq 0$

$$\left|\hat{\varphi}(z)\right| \leq C(\varepsilon)\ \exp r\left|\operatorname{Im} z\right| \inf_n \frac{\varepsilon^n M_n}{|z|^n} = C(\varepsilon)\ \exp r\left|\operatorname{Im} z\right| \lambda_M^{-1}\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right),$$

que implica (a) i (b) . Reciprocament, suposem que F satisfà (a) i (b); (b) implica que la restricció de F al eix real és de $L^2(\mathbb{R})$ (pensem per exemple que $\lambda_M(|x|)$ domina $1+|x|^2$). Per un dels teoremes de Paley-Wiener (veure [42]), això i (a) impliquen que

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\ \exp(-itx)\, dx ,$$

la cotransformada de Fourier de $F_{|\mathbb{R}}$, és una funció amb suport a $[-r,r]$; (b) demostra també que $x^n F(x)$ és integrable $\forall n$, de forma que $\varphi \in D$. Ara,

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^n\ F(x)\ \exp(-itx)\, dx,$$

$$\left\|\varphi^{(n)}\right\|_r \leq C \sup_x |x|^n F(x)\ (1+x^2) .$$

Per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha $\delta > 0$ tal que $(1+x^2)\,\lambda_M(\frac{x}{\varepsilon}) \leq \lambda_M(\frac{x}{\delta})$. Ara, per b

$$\left\|\varphi^{(n)}\right\|_r \leq C(\delta) \sup_x \frac{|x|^n\ (1+x^2)}{\lambda_M(\frac{|x|}{\delta})} \leq C(\delta) \sup_x \frac{|x|^n}{\lambda_M(\frac{|x|}{\varepsilon})} =$$

$$= C(\delta)\ \varepsilon^n M_n$$

(utilitzant (7) del Cap. O), és a dir, $\varphi \in D_M$.//

Aquest teorema és anàleg al de D, on la condició (b) es sustitueix per $|F(x)| = O(1 + |x|^m)$ $\forall m \in N$. Val a dir que hom podria donar una demostració del Teorema de Denjoy-Carleman utilitzant (4.3.1.) ([42] ho fa per a les classes clàssiques).

Ara volem traduir la condició (7). Suposem que $\varphi \in D$ i que $\operatorname{supt}\varphi \subset [-1, 1]$. Té una transformada de Fourier complexa definida per (8). Per altra banda podem pensar φ com a funció periòdica i en la seva transformada discreta, que en aquest cas seria

$$\hat{\varphi}_o(n) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, e^{i\pi n t}\, dt \quad .$$

Veiem que la relació entre ambdues és que $\hat{\varphi}(\pi n) = 2\, \hat{\varphi}_o(n)$. Com que $\varphi(t) = \sum_{n \in Z} \hat{\varphi}_o(n)\, e^{-i\pi n t}$, és

$$\varphi(t) + \varphi(t-1) = \sum_{n \in Z} \hat{\varphi}_o(n)\,(1 + (-1)^n)\, e^{-i\pi n t} \qquad ,$$

de manera que $\varphi(t) + \varphi(t-1) = 1$ per a $0 \leq t \leq 1$ (o com a funció periòdica $\forall t$) és equivalent al fet que $\hat{\varphi}_o(n) = 0$ per a n par diferent de zero i $\hat{\varphi}_o(0) = \frac{1}{2}$. Això i l'observació anterior porten a la

(4.3.2.) Proposició.- Sigui $\varphi \in D$ amb $\operatorname{supt}\varphi \subset [-1, 1]$ i $F = \hat{\varphi}$. Llavors, $\varphi(t) + \varphi(t-1) = 1$ per a $0 \leq t \leq 1$ si i només si $F(0) = 1$ i $F(2\pi n) = 0$ per a $n \neq 0$. //

4.4.- Construcció de les particions de la unitat.

Introduirem ara la hipòtesi que ens permetrà de construir les particions de la unitat que necessitem, o el que és el mateix, les

φ complint (7) adequades.

Es defineix (veure [30]) , si $m_n = M_n / M_{n-1}$ per a $n \geq 1$,

$n(r)$ = nombre de m_n que són $\leq r$.

Aleshores tenim

(8) " A $\lambda_M(r) = \sup_n \dfrac{r^n}{M_n}$, el suprem s'agafa a $n = n(r)$. "

Això és conseqüència del fet que $\dfrac{r^n}{M_n} \Big/ \dfrac{r^{n-1}}{M_{n-1}} = r\, m_n^{-1}$ és ≤ 1 per a $n \leq n(r)$ i > 1 per a $n > n(r)$. La hipòtesi de no quasi-analiticitat $\sum_n m_n^{-1} < \infty$ implica ([30]) que

(9) $$n(r) = o\,(r)\,.$$

Doncs bé, la hipòtesi que necessitem és

(10) " existeix $C > 0$ tal que $\displaystyle\sum_{n \geq n(r)} \frac{M_n}{M_{n+1}} \leq C\, \frac{n(r)}{r}$. "

(és a dir, és una hipòtesi sobre la velocitat amb la qual decreixen els rests de $\sum_n m_n^{-1}$).

La successió $M_n = (n!)^\alpha$ amb $\alpha > 1$ satisfà (10); en aquest cas, $m_n = n^\alpha$ i si $n^\alpha \leq r < (n+1)^\alpha$ és $n(r) = n$; aleshores $n(r)$ és , llevat de constants, $n(r) = r^{1/\alpha}$. Per altre costat, pel criteri integral, $\sum_{n \geq n_o} (n+1)^{-\alpha}$ és, llevat de constants, $n_o^{1-\alpha}$, de manera que $\sum_{n \geq n(r)} \dfrac{M_n}{M_{n+1}}$ és del mateix ordre que $(r^{1/\alpha})^{1-\alpha} = r^{1/\alpha - 1}$, que és del mateix ordre que $n(r)/r$.

(4.4.1.) Lema.- Suposem certa (10) i fixem $\varepsilon>0$; per a cada $r>0$ posem $d_r(\varepsilon)=16\,C\,n(r)/\varepsilon r$. Per a cada $r>0$, hi ha una successió $(P_n^{(r)})$ de nombres positius tals que:

(a) $$\sum_n \frac{P_n^{(r)}}{P_{n+1}^{(r)}} \leq \frac{1}{4}.$$

(b) $$\lim_n \left(\frac{P_n^{(r)}}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

(c) $$P_n^{(r)} \leq \lambda_N(1/K\varepsilon d_r(\varepsilon))\,\varepsilon^n d_r(\varepsilon)^n M_n.$$

on K és una constant independent de r,ε.

Demostració.- Sigui $Q_n = d_r(\varepsilon)^n \varepsilon^n M_n$ de manera que, per (10)

$$\sum_{n\geq n(r)} \frac{Q_n}{Q_{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon d_r(\varepsilon)} \sum_{n\geq n(r)} \frac{M_n}{M_{n+1}} \leq \frac{C\,n(r)}{r\varepsilon d_r(\varepsilon)} = \frac{1}{16}.$$

Posem $p_1 = n(r)$; després sigui $p_2 \in N$ t.q.

$$\sum_{n\geq p_2} \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leq \frac{1}{4\,2\,2^3},$$

i en general sigui $p_k \in N$ t.q.

$$\sum_{n\geq p_k} \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leq \frac{1}{4k\,2^{k+1}}.$$

Podem suposar que (p_k) és creixent. Si $p_k \leq n < p_{k+1}$, definim $P_n^{(r)}=k^{-n} Q_n$, de manera que

$$\left(\frac{P_n^{(r)}}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon\, d_r(\varepsilon)\, k^{-1} \qquad \text{si} \quad p_k \leq n < p_{k+1} \quad ,$$

i es compleix (b). També,

$$\sum_{n \geq p_1} \frac{P_n^{(r)}}{P_{n+1}^{(r)}} = \sum_{k \geq 1} \sum_{n=p_k}^{p_{k+1}-1} \frac{P_n^{(r)}}{P_{n+1}^{(r)}} \leq \sum_{k \geq 1} k \sum_{p_k}^{p_{k+1}-1} \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leq$$

$$\sum_{k \geq 1} k \sum_{p_k}^{\infty} \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4\, 2^{k+1}} = \frac{1}{8} \; .$$

Per a $n < p_1 = n(r)$ definim $P_n^{(r)} = (8\, n(r))^n$. Així,

$$\sum_{n < p_1} \frac{P_n^{(r)}}{P_{n+1}^{(r)}} = \frac{1}{8}$$

i amb la d'abans, tenim (a). Ara,

$$\sup_n \frac{P_n^{(r)}}{Q_n} = \max_{n \leq n(r)} \frac{P_n^{(r)}}{Q_n} \quad ,$$

perquè $P_n^{(r)} \leq Q_n$ per a $n > n(r)$. Així,

$$\sup_n \frac{P_n^{(r)}}{Q_n} \leq \max_{n \leq n(r)} \frac{(8\, n(r))^n}{d_r(\varepsilon)^n\, \varepsilon^n\, M_n} = \max_{n \leq n(r)} \frac{r^n}{(2C)^n\, M_n} \leq$$

$$\leq \max_{n \leq n(r)} \frac{r^n}{M_n} = \frac{r^{n(r)}}{M_{n(r)}} \quad ,$$

on hem suposat sense pèrdua de generalitat que $C > \frac{1}{2}$ i hem utilitzat (8).

Ara,

$$\sup_n \frac{P_n^{(r)}}{Q_n} \leq \frac{r^{n(r)}}{M_{n(r)}} = \left(\frac{16\, C\, n(r)}{\varepsilon\, d_r(\varepsilon)} \right)^{n(r)} \frac{1}{M_{n(r)}} \leq$$

$$\leq \sup_n \frac{(16\, C\, n)^n}{(\varepsilon d_r(\varepsilon))^n} \frac{1}{M_n} \leq \sup_n \frac{(16\, C\, 3)^n\, n!}{(\varepsilon d_r(\varepsilon))^n M_n} = \lambda_N(1/K \varepsilon d_r(\varepsilon))$$

que és (c). //

<u>(4. 4. 2.) Lema.</u>- Suposem certa (10), fixem $\varepsilon > 0$ i per a cada $r > 0$ sigui $d_r(\varepsilon)$ com a (4. 4. 1.). Per a cada $r > 0$ existeix $\varphi_r \in D_M$ t. q.

(a) supt $\varphi_r \subset [-1, 1]$.

(b) $\varphi_r(t) + \varphi_r(t-1) = 1$ per a $0 \leq t \leq 1$.

(c) $p'_{1, \varepsilon d_r(\varepsilon)}(\varphi_r) \leq C\ \lambda_N(1/K \varepsilon d_r(\varepsilon))$.

on C, K són constants independents de r, ε .

<u>Demostració.</u>- Per a cada $r > 0$ sigui $P_n^{(r)}$ la successió del lema (4. 4. 1.). Definim (la construcció que segueix és en part inspirada en [42])

$$(11) \qquad F_r(z) = \frac{\sin(z/2)}{z/2} \left(\frac{\sin(z/8)}{z/8} \right)^2 \prod_{k=1} \frac{\sin \lambda_k z}{\lambda_k z} \qquad ,$$

on $\lambda_k = P_{k-1}^{(r)} / P_k^{(r)}$ per a $k \geq 1$. És

$$\left| 1 - \frac{\sin z}{z} \right| \leq B\,|z| \qquad ,$$

per a $|z| \leq 1$ i per tant

$$\left| 1-\frac{\sin \lambda_k z}{\lambda_k z} \right| \leq B\lambda_k |z| \quad \text{per a } |z| \leq 1/\lambda_k .$$

Com que $\sum_k \lambda_k < \infty$ per (a) de (4.4.1.), la sèrie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1-\frac{\sin \lambda_k z}{\lambda_k z} \right|$$

convergeix uniformement sobre tot compacte. Això significa que el producte de (11) convergeix i que F_r és una funció entera . A més a més, utilitzant la desigualtat $|\sin z / z| \leq \exp|z|$ i (a) de (4.4.1.), és

$$|F_r(z)| \leq \exp\left(\frac{|z|}{2}\right)\left(\exp\frac{|z|}{8}\right)^2 \prod_{k=1}^{\infty} \exp \lambda_k |z| =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right)|z| \leq \exp|z| \quad ,$$

és a dir, F satisfà (a) de (4.3.1.).

És evident que $F_r(0)=1$ i que $F_r(2\pi n)=0$ per a $n \neq 0$. Per a x real, $|\sin x| \leq |x|$ i $|\sin x| \leq 1$. Per tant,

$$\left|x^n F_r(x)\right| \leq |x|^n \left(\frac{\sin(x/8)}{x/8}\right)^2 \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{\sin \lambda_k x}{\lambda_k x}\right| \leq$$

(12)

$$\leq \left(\frac{\sin(x/8)}{x/8}\right)^2 (\lambda_1 \cdots \lambda_k)^{-1} = P_n^{(r)} \left(\frac{\sin(x/8)}{x/8}\right)^2 .$$

Ara utilitzant (b) de (4.4.1.) veiem que F_r satisfà també la condició (b) de (4.3.1.). Per tant, $F_r = \hat{\varphi}_r$ amb

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp(-itx)\, dx \quad ,$$

i supt $\varphi_r \subset [-1,1]$. Així ja tenim (a). Com que $F_r(0)=1$ i $F_r(2\pi n)=0$ per a $n \neq 0$, (4.3.2.) ens diu que φ_r satisfà (b). Ara,

$$\varphi_r^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^n F(x) \exp(-itx)\, dx \ ,$$

i amb (12),

$$\|\varphi_r^{(n)}\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} P_n^{(r)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x/8)}{x/8}\right)^2 dx = C\, P_n^{(r)} \ .$$

Si ara utilitzem (c) de (4.4.1.),

$$\|\varphi_r^{(n)}\|_1 \leq C \ \lambda_N(1/K\varepsilon d_r(\varepsilon))\, \varepsilon^n \, d_r(\varepsilon)^n \, M_n \quad ,$$

és a dir,

$$p_{1,\varepsilon d_r(\varepsilon)}(\varphi_r) \leq C \ \lambda_N(1/K\varepsilon d_r(\varepsilon))$$

que és (c). //

Això ja és el que ens havíem proposat a la fi de l'apartat 4.2.. Desfent el camí, i fixant-nos que per (19) i la definició de $d_r(\varepsilon)$, $d_r(\varepsilon)$ tendeix a zero quan $r \longrightarrow \infty$, podem enunciar:

<u>(4.4.3.) Teorema.</u>- Suposem certa (10). Fixem $\varepsilon > 0$. Per a cada $d > 0$ és posible de trobar una partició de la unitat $(\varphi_{n,d})$ per funcions $\varphi_{n,d}$ (no necessariament positives) de D_M subordinada al recobriment format pels intervals $K_{n,d} = [(n-1)d, (n+1)d]$ i de manera que

$$(13) \qquad \sum_n |\varphi_{n,d}^{(k)}(t)| \leq C \ \lambda_N(1/K\varepsilon d) \ \varepsilon^k M_k \quad ,$$

pera tot t, tot $k \in N$, on C i K són constants independents de d, ε . //

4.5.- El teorema de la síntesi espectral.

Demostrarem ara el teorema de la síntesi espectral, inspirats en [31]. Abans cal demostrar un lema, sempre amb les hipòtesi (5), (10).

<u>(4.5.1.) Lema.-</u> Sigui I un ideal de E_M i $f \in \bigcap_x I + P(x)$, és a dir, per a tot x hi ha $g_x \in I$ tal que $f-g_x$ és plana a x. Fixem r, ε i sigui $L \subset K_r$ t.q.

$$\text{(14)} \qquad \sup_{x \in L} p_{r, B\varepsilon}(f-g_x) < \infty$$

(aquesta B és la de (4.1.1.)). Aleshores, per a tot $\delta > 0$ existeix $g \in I$ i $\phi \in E_M$ que val 1 en un obert que conté L i tal que

$$p_{r,\varepsilon}(\phi f-g) \leq \delta .$$

<u>Demostració.-</u> Com que $f-g_a$ és plana a a tenim (6). Empran (14) tindrem, per a $|x| \leq r$

$$\text{(15)} \qquad \left|(f-g_a)^{(k)}(x)\right| \leq C(\varepsilon)\varepsilon^k M_k |x-a| \lambda_N^{-1}(1/\varepsilon\, H|x-a|),$$

on $C(\varepsilon)$ és independent del punt $a \in L$.

Per a cada $d > 0$ sigui $(\varphi_{n,d})$ una partició com a (4.4.3.) subordinada a $\{K_{n,d}\}$. Posem $P = \{n \in Z / K_{n,d} \cap L \neq \emptyset\}$; com que $L \subset K_r$, P és un conjunt finit. Per a cada $n \in P$, sigui $a_n \in K_{n,d} \cap L$. Definim, posant $g_n = g_{a_n}$

$$\phi = \sum_{n \in P} \varphi_{n,d} , \quad g = \sum_{n \in P} \varphi_{n,d}\, g_n ,$$

de manera que $g \in I$; L no talla $\bigcup_{n \notin P} K_{n,d}$ que és un tancat, i ϕ val 1 al complementari d'aquest tancat. Això demostra que ϕ val 1 en un entorn obert de L . Avaluem ara $p_{r,\varepsilon}(\phi f-g)$:

$$\phi f-g = \sum_{n \in P} \varphi_{n,d}(f-g_n) .$$

Per a $|x| \leq r$, $m \in N$

$$\left|(\phi f-g)^{(m)}(x)\right| \leq \sum_{n \in P} \left|(\varphi_{n,d}(f-g_n))^{(m)}(x)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n \in P} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left|\varphi_{n,d}^{(k)}(x)\right| \left|(f-g_n)^{(m-k)}(x)\right| .$$

Ara, per a cada n, i degut a la presència de $\varphi_{n,d}^{(k)}$, només conten els x t.q. $|x-a_n| \leq 2d$. Utilitzant (15) amb $a = a_n$ i el fet $|x-a_n| \leq 2d$, arribem a

$$\left|(\phi f-g)^{(m)}(x)\right| \leq C(\varepsilon)\, d\, \lambda_N^{-1}(1/2\, \varepsilon H d) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \varepsilon^{m-k} M_{m-k} \sum_{n \in P} \left|\varphi_{n,d}^{(k)}(x)\right| .$$

Podem pensar que la H de (15) i la K de (13) són tals que $2H = K$, perquè sinó empraríem (15) amb $\varepsilon K/2H$ es lloc de ε i aleshores ara estaríem avaluant $p_{r,c\varepsilon}(\phi f-g)$ per a una certa constant c , cosa que no afecta el resultat final. Aceptat això, si ara utilitzem (13) es produeix la "cancelació" que esmentàvem a la introducció .

$$\left|(\phi f-g)^{(m)}(x)\right| \leq C(\varepsilon)\, d \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \varepsilon^{m-k} M_{m-k}\, \varepsilon^{k} M_k \leq C(\varepsilon)\, d\, \varepsilon^{m} M_m\, 2^{m} .$$

Això val qualsevol que sigui $|x| \leq r$, $m \in N$. Per tant

(16) $$p_{r,2\varepsilon}(\phi f-g) \leq C(\varepsilon)\ d\,.$$

Així per a cada $d>0$ hem construit ϕ i $g\in I$ tal que (16) val <u>amb $C(\varepsilon)$ independent de d.</u> Per tant, a fi de cloure la demostració del lema és suficient de prendre d prou petit. //

<u>(4.5.2.) Teorema (de la síntesi espectral).-</u> Per a tot ideal tancat I de E_M,

$$I = \bigcap_x I + P(x)\ ,$$

on $P(x)$ és l'ideal de les funcions planes a x. És a dir, si una funció f pertany puntualment a I en el sentit que el seu desenvolupament de Taylor en tot punt coincideix amb el d'una funció de I, aleshores $f\in I$.

<u>Demostració.-</u> Per a cada x sigui $g_x\in I$ tal que $f-g_x$ és plana a x. Volem veure que $f\in I$ (la inclusió contrària es evident). Com que I és tancat, és suficient de veure que donats r,ε,δ, existeix $g\in I$ tal que $p_{r,\varepsilon}(f-g)\leq\delta$. Definim per a $p\geq p_o$,

$$B_p = \left\{ x/|x|\leq r \ \text{ i } \ p_{r,B\varepsilon/2}(f-g_x)<p \right\}$$

on B és la de (4.1.1.) i p_o és el primer t.q. $B_{p_o}\neq\emptyset$. Demostrarem per inducció l'enunciat següent, per a $p\geq p_o$:

H_p : "donat $\delta>0$, existeixen $\phi_p\in E_M$ i $g_p\in I$ tals que $\phi_p = 1$ en un obert U_p que conté B_p i $p_{r,\varepsilon}(\phi_p f-g_p)\leq\delta$. A més a més, $\phi_p(x)=1$ si $\phi_{p-1}(x)=1$, per a $p>p_o$"

Per a $p = p_o$ és el lema (4.5.1.) puix $p_{r,B\varepsilon} \leq p_{r,B\varepsilon/2}$.
Suposem-ho per a $p-1$: donat $\delta > 0$ existeixen $\phi_{p-1} \in E_M$ i $g_{p-1} \in I$ tals que $\phi_{p-1} = 1$ en un obert $U_{p-1} \supset B_{p-1}$ i

$$p_{r,\varepsilon}(\phi_{p-1} f - g_{p-1}) \leq \delta/2 .$$

Sigui $L' = B_p \cap \text{supt}\,(1-\phi_{p-1})$. La funció $(1-\phi_{p-1})\,f$ pertany a $\bigcap\limits_x I + P(x)$ i $(1-\phi_{p-1})\,f - (1-\phi_{p-1})\,g_x = (1-\phi_{p-1})\,(f-g_x)$ és també plana a x. Com que

$$p_{r,B\varepsilon}(\,(1-\phi_{p-1})\,f - (1-\phi_{p-1})\,g_x) \leq p_{r,B\varepsilon/2}(\,(1-\phi_{p-1})\,f)\,p_{r,B\varepsilon/2}(f-g_x),$$

roman acabat per a $x \in L' \subset B_p$, estem sota les condicions del lema (4.5.1.) de manera que existeix $g \in I$ i $\phi \in E_M$ que val 1 en un entorn obert U de L' tal que

$$p_{r,\varepsilon}(\phi\,(1-\phi_{p-1})\,f - g) \leq \delta/2 .$$

Definim ϕ_p, g_p per $1-\phi_p = (1-\phi)\,(1-\phi_{p-1})$ i $g_p = g + g_{p-1}$; és clar que $\phi_p = 1$ a l'obert U (puix $\phi = 1$ a U) i també que $\phi_p = 1$ fora de supt $(1-\phi_{p-1})$; per tant $\phi_p = 1$ a la unió d'aquests dos oberts, que és un entorn de B_p. Així, $\phi_p = 1$ a un obert que conté B_p. També

$$p_{r,\varepsilon}(\phi_p f - g_p) = p_{r,\varepsilon}(\,(\phi_{p-1} + \phi\,(1-\phi_{p-1})\,)\,f - g - g_{p-1}\,) \leq$$

$$\leq p_{r,\varepsilon}(\phi_{p-1}\,f - g_{p-1}) + p_{r,\varepsilon}(\phi\,(1-\phi_{p-1})\,f - g) \leq \delta.$$

Que $\phi_p(x) = 1$ si $\phi_{p-1}(x) = 1$ és conseqüència de la definició de ϕ_p.

D'aquesta forma H_p és cert $\forall\, p \geq p_o$. Aleshores, serà $K_r \subset U_{p_1} \cup \cdots \cup U_{p_m}$ per a uns certs $p_1, \dots, p_m \geq p_o$. Sigui $p = \max(p_1 \dots p_m)$; com que tot $x \in K_r$ està a un dels U_{p_i}, és $\phi_{p_i}(x) = 1$ per a un i i aleshores també $\phi_p(x) = 1$. Això vol dir que $\phi_p = 1$ a K_r i per tant

$$p_{r,\varepsilon}(f-g_p) = p_{r,\varepsilon}(\phi_p f-g_p) \leq \delta$$

és a dir, g_p és la que buscàvem, per a aquest p. //

Per exemple, a les classes de Gevrey val la síntesi espectral.

És costum de posar $1_x = I + P(x)$ i dir-ne <u>la component primària</u> de I al punt x. Al darrer apartat del Capítol 6 veurem com són les components primàries d'un ideal i precisarem el teorema de la síntesi espectral, en el cas que E_M sigui l. m-convexa.

CAPÍTOL 5

LA SÍNTESI ESPECTRAL A LA CLASSE DE LES FUNCIONS PERIÒDIQUES EN MITJANA.

5.0.- Introducció.

Hom diu que una funció $f \in E$ és periòdica en mitjana si satisfà al menys una equació de convolució homogènia

$$(1) \qquad T * f = 0 \; ,$$

on $T \in E'$, és a dir, T és una distribució amb suport compacte. Dos exemples d'equacions com la (1) són : (a) $T = P(D)$, un operador diferencial amb coeficients constants; aleshores $T * f = 0$ és el mateix que $P(D)f = 0$; (b) $T = \delta_p - \delta$ i aleshores (1) significa que $f(x+p)-f(x) = 0 \;\; \forall x$, és a dir, f és periòdica amb període p.

En ambdós exemples hi ha teoremes clàssics de representació de les solucions de (1). Al primer, per a cada $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $P(\alpha) = 0$ hi ha un polinomi $C_\alpha(x)$ de grau més petit que la multiplicitat de α a P i t.q.

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{P(\alpha) = 0} C_\alpha(x) \; e^{-ix\alpha} .$$

El segon és el cas de les sèries de Fourier

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \; e^{-\frac{2\pi n i}{P} x} \; .$$

La sèrie a (3) és convergent a l'espai E. Fixem-nos que els dos exemples tenen en comú dues coses :

(a) tota solució de (1) s'expressa com a límit en un cert sentit de combinacions lineals de <u>monomis exponencials</u>, és a dir, expressions del tipus $x^m \exp(ix\alpha)$, <u>que són també solucions de (1)</u>.

(b) les freqüències d'aquests monomis exponencials, solucions de (1), són els zeros de $\hat{T}$, la transformada de Fourier de T.

L. Schwartz ([44]) generalitzà això al cas que T fos qualsevulla. Així, si f satisfà una equació com la (1), f és límit de combinacions lineals de monomis exponencials

$$f(x) = \sum_{\hat{T}(\alpha)=0} C_\alpha(x)\, e^{-ix\alpha} \quad . \tag{4}$$

Una qüestió natural que es presenta és: com depenen els coeficients i les freqüències a (4) de f ?. Per exemple, si

$$T_1 * f = T_2 * f = \text{-------} = T_n * f = 0 \ ,$$

quines freqüències serveixen ?. El natural fóra que fossin les comuns, és a dir, aquells α t.q. $\hat{T}_1(\alpha) = \text{---} = \hat{T}_n(\alpha) = 0$. En particular, quan no hi hagi zeros en comú f tindria que ser 0. Aquest és el <u>teorema de la síntesi espectral</u> demostrat per Schwartz ([44]) :

Teorema de la síntesi espectral. Si $f \in E$ satisfà

$T_i * f = 0, \; i = 1, ---, n$ i $\left\{ \alpha \,\middle|\, \hat{T}_i(\alpha) = 0 \quad i = 1, ---, n \right\} = \emptyset$,

aleshores $f = 0$.

El propòsit d'aquest capítol és demostrar això mateix per a E_M.

El cas periòdic es pot tractar directament, doncs en aquest cas hom té una fórmula pels c_n de (3). Fent-ho només per a $p = 2\pi$, a fi que (3) sigui convergència per E_M, per a una $f \in E_M$ periòdica, és suficient segons (0.1.1.) que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| \, p_{r,\varepsilon}(e^{-inx}) < \infty ,$$

per a tot r, ε (és a dir que les sumes parcials de (3) formin un conjunt acotat a E_M). Integrant per parts, és immediat que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(m)}(x) \; e^{inx} \, dx = \frac{(-in)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \; e^{inx} \, dx = (-in)^m \, c_n .$$

Aleshores,

$$|c_n| \, n^m \leq \| f^{(m)} \|_{2\pi} \leq p_{2\pi,\delta}(f) \, \delta^m M_m$$

$$|c_n| \leq p_{2\pi,\delta}(f) \; \inf_m \; \frac{\delta^m M_m}{n^m} = p_{2\pi,\delta}(f) \, \lambda_M^{-1}\left(\frac{n}{\delta}\right) .$$

Donats r, ε , hi ha $\delta > 0$ t.q. $t^2 \lambda_M(\frac{t}{\varepsilon}) \leq C' \lambda_M(\frac{t}{\delta})$ per a una certa constant $C > 0$. Llavors,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| \, p_{r,\varepsilon}(e^{-inx}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| \, \lambda_M(\tfrac{n}{\varepsilon}) \leq$$

$$\leq p_{2\pi,\delta}(f) \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_M^{-1}(\tfrac{n}{\delta}) \, \lambda_M(\tfrac{n}{\varepsilon}) \leq C \;\; p_{2\pi,\delta}(f) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

El problema es pot plantejar d'una forma més general : pel teorema de Hahn-Banach, i la definició de convolució, (1) és equivalent al fet que el subespai tancat V generat per les trasladades de f és propi i $T \in V^{\circ}$. Un subespai tancat propi de E_M invariant per traslacions n'hi direm <u>una varietat</u>, V. Els problemes a resoldre són : a) Hi ha al menys una exponencial en tota varietat V ? . b) Està tota varietat determinada pels polinomis exponencials que conté ?. És a dir, si $f \in V$, és límit de polinomis exponencials de V ?. c) Relacionar els polinomis exponencials de V amb els zeros de les funcions enteres $\hat{T}$, amb $T \in V^{\circ}$.

Seguirem un mètode que redueix aquestes qüestions a qüestions sobre els ideals de E'_M, quan E'_M sigui una àlgebra de convolució (veure [12], [47]). Primer hem de veure quan E'_M és una àlgebra de convolució.

5.1.- L'àlgebra de convolució E'_M.

Recordem la representació (19) del Cap. 0, per a una $f \in E_M$:

$$(5) \qquad f(x) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(ixz)}{k(z)} \, d\mu(z) \quad .$$

A (5), μ és una mesura acotada i k(z) domina totes les $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp r\,|\operatorname{Im} z|$. Més en general, és $\forall\; T \in E'_M$,

$$T(f) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\hat{T}(z)}{k(z)}\, d\mu(z) \quad .$$

Per a $f \in E_M$ i $T \in E'_M$, es defineix llur convolució per

$$(T * f)(x) = T(y \longmapsto f(x-y)) .$$

$T * f$ és doncs una funció. El que farem ara, que és veure que $T * f$ és diferenciable i estudiar quan $T * f \in E_M$, es pot fer directament tal com es fa en el cas clàssic, però ací ho farem utilitzant (5). Tenim

$$f(x-y) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(ixz)\exp(-iyz)}{k(z)}\, d\mu(z) \quad .$$

Ara fem actuar T sobre la variable y i obtenim

$$(6) \qquad (T * f)(x) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(ixz)\ \hat{T}(-z)}{k(z)}\, d\mu(z) \ .$$

La integral de (6) té sentit doncs $\hat{T} \in H_M$. Com que les potencies $|z|^n$ són absorbibles als $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})$ i k domina tota $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp r\,|\operatorname{Im} z|$, podem diferenciar sota el signe integral, $T * f$ és diferenciable i

$$(T * f)^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(ixz)\ (iz)^n\ \hat{T}(-z)}{k(z)}\, d\mu(z) \quad .$$

Estudiem ara quan $T \ast f \in E_M$. Si $|\hat{T}(z)| \leq C\, \lambda_M(\frac{|z|}{\delta}) \exp r|\mathrm{Im}\, z|$, tenim per a $|x| \leq s$,

$$\left|(T \ast f)^{(n)}(x)\right| \leq C\ \|\mu\| \sup_z \frac{|z|^n\ \lambda_M(\frac{|z|}{\delta})\ \exp\,(r+s)\ |\mathrm{Im}\, z|}{k(z)} .$$

Suposem que es compleix la propietat (5) del Cap. 2, és a dir,

$$(7) \qquad \lambda_M(At)\, \lambda_M(Bt) = O\,(\lambda_M(Ot)),\quad \forall\, A, B > 0 .$$

Aleshores, k domina totes les $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})\, \lambda_M(\frac{|z|}{\delta}) \exp r\, |\mathrm{Im}\, z|$ i així

$$\left|(T \ast f)^{(n)}(x)\right| \leq C(\varepsilon, s)\ \sup_z \frac{|z|^n}{\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})} = C(\varepsilon, s)\ \varepsilon^n M_n,\quad \forall n,\ |x| \leq s$$

és a dir, $T \ast f \in E_M$.

L'aplicació lineal $f \longmapsto T \ast f$ és continua perquè té gràfica tancada : si $f_n \longrightarrow f$ a E_M i $T \ast f_n \longrightarrow g$ a E_M, per a un x fixe és

$$g(x) = \lim_n\ T\,(y \longmapsto f_n\,(x-y)) .$$

Com que evidentment l'operació de trasladar és contínua a E_M, les aplicacions $y \longmapsto f_n(x-y)$ tendeixen quan $n \longrightarrow \infty$ a l'aplicació $y \longmapsto f(x-y)$ per la topologia de E_M. Llavors

$$g(x) = T(y \longmapsto f(x-y)) = (T \ast f)\,(x)$$

i $g = T \ast f$. Resumint,

(5.1.1.) Proposició.- Si es compleix la condició (7), (que és equivalent a $\lambda_M^2(t) = O(\lambda_M(Ot))$, $t > 0$), per a cada $T \in E'_M$ $T * f \in E_M$ $\forall f \in E_M$ i $f \longmapsto T*f$ és continua. //

Recordem (Cap. 2) que la condició (7) és equivalent a $\sup_n \left(\frac{M_{2n}}{M_n^2}\right)^{1/n} < \infty$. Per a les classes corresponents a $M_n = n^{\alpha n}$,

$$\left(\frac{M_{2n}}{M_n^2}\right)^{1/n} = \frac{(2n)^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} = 4^{\alpha},$$

de manera que (5.1.1.) és cert per a aquestes classes (de fet, $\lambda_M(t) = \exp t^{1/\alpha}$). A l'apartat 2.1. vam veure que és cert per a $(n\log n)^n$.

Fixem $T_1 \in E'_M$. Per a $f \in E_M$, posem $\check{f}(x) = f(-x)$. És immediat que $f \longmapsto \check{f}$ és una operació contínua a E_M; aleshores, segons (5.1.1.), també $f \longmapsto (T_1 * \check{f})^{\vee}$ és continua. Aquesta tindrà una trasposta contínua $E'_M \longrightarrow E'_M$. A la imatge d'una $T_2 \in E'_M$ per aquesta trasposta n'hi diem $T_2 * T_1$. Així,

$$(T_2 * T_1)(f) = T_2((T_1 * \check{f})^{\vee}), \quad \forall f \in E_M.$$

Calculem $(T_2 * T_1)\hat{}(z)$. $(T_1 * \check{e}_z)(x) = (T_1 * e_{-z})(x) = T_1(y \longmapsto e_{-z}(x-y)) =$
$= e_{-z}(x)\, T_1(y \longmapsto e_{-z}(-y)) = e_z(-x)\, T_1(y \longmapsto e_z(y)) = e_z(-x)\, \hat{T}_1(z)$.
Per tant, $(T_1 * \check{e}_z)^{\vee}(x) = e_z(x)\, \hat{T}_1(z)$, és a dir, $(T_1 * \check{e}_z)^{\vee} = e_z \hat{T}_1(z)$.
Aleshores,

$$(8) \qquad (T_2 * T_1)\hat{}(z) = (T_2 * T_1)(e_z) = T_2((T_1 * \check{e}_z)^{\vee}) = \hat{T}_1(z)\, \hat{T}_2(z).$$

Utilitzant (8) i el fet que $T \longmapsto \hat{T}$ ês un isomorfirme (teorema (0.3.2.)), veiem que $T_2 * T_1 = T_1 * T_2$ i de la mateixa manera totes les propietats que fan que E'_M esdevingui <u>una àlgebra per la convolució</u>. Llavors

$$H_M = \left\{ F \in H \,/\, |F(z)| = C\,(\lambda_M(O|z|)\exp O|\mathrm{Im}\, z|) \right\},$$

la imatge de E'_M per la transformació de Fourier, és, segons (8), una àlgebra amb el producte ordinari, cosa que també hom veu amb (7).

Finalment comprovem la relació necessària més endavant

$$(9) \qquad (T_1 * T_2) * f = T_1 * (T_2 * f), \quad T_1,\, T_2 \in E'_M,\ f \in E_M.$$

Aquesta és conseqüència de (6) i (8) ja que ambdós membres resulten ésser iguals a la funció de x,

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\exp(ixz)\,\hat{T}_1(-z)\,\hat{T}_2(-z)}{k(z)}\, d\mu(z)$$

A partir d'ara suposarem certa la hipòtesi (7).

5.2.- Plantejament i solució del problema a H_M.

<u>(5.2.1.) Lema.-</u> Sigui V un subespai tancat de E_M. V és una varietat si i només si V^o ês un ideal de E'_M (per la convolució).

<u>Demostració.-</u> Si V ês una varietat, és el mateix dir, per a $T \in E'_M$, $T(f) = 0\ \forall f \in V$ que $T * f = 0\ \forall f \in V$. Així,

$V^{\circ} = \left\{ T \;/\; T * f = 0 \quad \forall f \in V \right\}$. Aleshores, (9) demostra que V° és un ideal.

Suposem ara que V° és un ideal i sigui $f \in V$. Fixem y i volem veure que $f_y(x) = f(x-y)$ és a V; ara bé, $f_y = \delta_y * f = (\delta_{-y} * \check{f})^{\vee}$ i si $T \in V^{\circ}$, $T(f_y) = T((\delta_{-y} * \check{f})^{\vee}) = (T * \delta_{-y})(f) = 0$ doncs $T * \delta_{-y} \in V^{\circ}$. Per tant, $f_y \in V^{\circ\circ} = V$. //

Aleshores $I = (V^{\circ})^{\wedge}$ serà un ideal de H_M.

<u>(5.2.2.) Lema.-</u> $x^n \exp(ix\alpha) \in V$ si i només si tota $F \in I$ s'anul·la al menys n vegades a α.

<u>Demostració.-</u> És conseqüència del fet que $x^j \exp(ix\alpha) \in V$ per a $j \leq n$ (és combinació lineal de trasladades de $x^n \exp(ix\alpha)$) i de la fórmula

$$\hat{T}^{(n)}(z) = T\left(x \longmapsto (ix)^n \exp(ixz)\right) \;. // \tag{10}$$

Posem amb les mateixes notacions que als apartats 2.2, 3.7., $h(I)$ pel conjunt de zeros de I i $kh(I) = \left\{ F \in H_M / F(z) = 0 \quad \forall z \in h(I) \right\}$ (contant multiplicitats).

<u>(5.2.3.) Lema.-</u> Sigui V una varietat i $V_o \subset V$ el subespai tancat que engendren els monomis exponencials de V. Sigui $I = (V^{\circ})^{\wedge}$; aleshores $V_o = V$ equival a $kh(I) = I$.

<u>Desmotració.-</u> És suficient de demostrar que $kh(I) = (V_o^{\circ})^{\wedge}$ i això és conseqüència del lema (5.2.2.) i de (10). //

El lema (5.2.2.) respon la qüestió 3) plantejada a la fi de la introducció : $x^n \exp(ix\alpha) \in V$ si i només si α apareix a $h(I)$

amb multiplicitat $\geq n$. La qüestió a) és ara

A) té tot ideal tancat I de H_M un zero ? . Equivalentment, $h(I) = \emptyset$ implica I dens ?

i la qüestió b) és

B) és $I = kh(I)$ per a tot ideal tancat I de H_M ?

A una àlgebra topològica A de funcions enteres amb la propietat

$$\text{"si } F \in A \text{ i } F(\alpha) = 0 , \quad F(z)/z-\alpha \in A\text{"}$$

és fàcil de veure que A) $\Rightarrow$ B) (observació deguda a Rubel), pel mateix mètode amb el qual a l'apartat 2.2. varem veure que (2.2.1.) implica (2.2.3.) . És clar que H_M compleix aquesta propietat, ja que a fi que una funció entera estigui a H_M només depèn del seu comportament per a z de mòdul gran i per a $|z-\alpha| \geq 1$,

$$\left| \frac{F(z)}{z-\alpha} \right| \leq F(z) \quad .$$

Així només ens falta demostrar A) . En el cas analític, $H_M = H_M(0)$ és l'àlgebra de les F t.q.

$$|F(z)| = O\,(\lambda_M(O|z|))$$

és a dir, és l'àlgebra de funcions enteres de tipus normal respecte el pes λ_M i així A) és cert ([26], [27], [47]) i per tant B) . Però podem donar una demostració en el cas general. El lema següent és demostrat a [44] :

(5.2.4.) Lema.- Si $F(z)$ és una funció entera de tipus exponencial i ràpidament decreixent en el eix real (és a dir, dominada per $|x|^{-n}$ $\forall n$) (equivalentment, $F = \hat{\varphi}$ amb $\varphi \in D$), aleshores

$$(11) \qquad F'(z) = P(z)F(z) + \sum_n \left(F(z)\frac{p_n}{z-z_n} + P_n(z)F(z)\right),$$

on z_n són els zeros de F, p_n llurs multiplicitats, $P(z), P_n(z)$ són polinomis i la sèrie és t.q. la seva restricció al eix real és convergent a $L^1(\mathbb{R})$. //

Sigui I un ideal de H_M sense zeros i $F \in I$; podem suposar que $F = \hat{\varphi}$ amb $\varphi \in D_M$ (sinó, la multipliquem per una de $\hat{D}_M$), de manera que tindrem (11); sigui $G_n(z)$ el rest d'ordre n de la sèrie de (11). Totes les G_n tenen el mateix tipus r i per tant, segons (4.3.1.), les

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_n(x)\exp(-ixt)\,dt$$

totes tenen suport dins un interval fixe $[-r, r]$. Per a $f \in E_M$,

$$|(G_n, f)| = \left|\int_{-r}^{r} \varphi_n(t) f(t)\,dt\right| \leq 2r \,\|f\|_r \,\|\varphi_n\|_{\mathbb{R}} \leq 2r\,\|f\|_r\,\|G_n\|_{L^1}.$$

Segons el lema, $\|G_n\|_{L^1} \longrightarrow 0$; per tant, $(G_n, f) \longrightarrow 0$ $\forall f \in E_M$, és a dir, $G_n \longrightarrow 0$ dèbilment a H_M; com que aquest és de Montel, $G_n \longrightarrow 0$ a H_M. Per tant, la sèrie de (11) és convergent per la topologia de H_M. Com que $F \in I$, $F(z_n) = 0$ i I no té zeros, la funció $\frac{F(z)}{z-z_n}$ pertany a I (veure /2.2.2.)); aleshores (11) demostra que $F' \in I$. D'aquesta forma hem vist que si $F \in I \cap \hat{D}_M$, aleshores $F' \in I$, i reiterant $P(\frac{d}{dz})\, F \in I \ \ \forall P$. Per un altre resultat de [44], al menys una exponencial és límit de $P(\frac{d}{dz})\, F$ per la topologia de E' ; com que $E' \hookrightarrow E'_M$ és contínua, concluïm que una exponencial és límit d'elements de I i aleshores, tota exponencial és límit d'elements de I, puix que I és un ideal . Com que les exponencials són denses a H_M (les δ_x trivialment ho són a E'_M i $\hat{\delta}_x(z) = \exp(ixz)$), I és dens a H_M . Així, A) és certa i podem enunciar, dualitzant A) i B) :

<u>(5. 2. 5.) Teorema.-</u> Suposem que és certa (7) i que V és una varietat (propia) de E_M. Aleshores V conté al menys un monomi exponencial i tota $f \in V$ és límit, a E_M, de polinomis exponencials de V. Els monomis exponencials de V són determinats per $h(I)$ (contant multiplicitats) on $I = (V^o)^\wedge$, segons (5. 2. 2.) . //

<u>5. 3. - Les funcions de H_M periòdiques en mitjana.</u>

Hem deduit un resultat sobre varietats de E_M d'un resultat sobre ideals de H_M, mitjançant els lemas (5. 2. 1.), (5. 2. 2.), (5. 2. 3.). Però de la mateixa forma resultats sobre ideals de E_M esdevenen resultats sobre varietats de H_M. Començarem per donar els lemas corresponents als del apartat 5. 2. :

<u>(5. 3. 1.) Lema.-</u> Sigui I un subespai tancat de E_M i $V = (I^o)^\wedge$. Aleshores I és un ideal si i només si V és una varietat.

Demostració.- Posem (f,F) per designar l'acció de F sobre f, com a element de E'_M, via transformació de Fourier. D'acord amb la definició de $\hat{T}$, fixem-nos que $(e_z,F)=F(z)$. Si $F_w(z)=F(z-w)$, és

(12) $$(f,F_w)=(e_{-w}f,F),$$

$\forall f\in E_M$. En efecte: és suficient de fer-ho per a $f=e_z$ doncs aquestes són totals i en aquest cas

$$(e_z,F_w)=F_w(z)=F(z-w)=(e_{z-w},F)=(e_{-w}e_z,F).$$

Per tant (12) és cert $\forall f\in E_M$, $\forall F\in H_M$ i $\forall w$. De (12), veiem que V és una varietat si i només si $e_w I\subset I$ per a tot w; com que les e_w són totals i I és tancat, això és el mateix que dir que I és un ideal. //

(5.3.2.) Lema.- $z^n\exp(iz\alpha)\in V$ si i només si tota $f\in I$ s'anul·la al menys n vegades a α (ací $\alpha\in\mathbb{R}$).

Demostració.- Considerem $\delta_\alpha^{(n)}(f)=f^{(n)}(\alpha)$. Com que $(\delta_\alpha^{(n)})\hat{}(z)=(iz)^n\exp(i\alpha z)$, podem escriure $(f,(iz)^n\exp(i\alpha z))=f^{(n)}(\alpha)$, i això demostra el lema doncs si $z^n\exp(i\alpha z)$ està a V també hi és $z^j\exp(i\alpha z)$ amb $j\leq n$, que és combinació lineal de trasladades d'aquesta. //

És clar que en el cas analític el mateix resultat és cert aceptant valors complexes de α. Tal com a l'apartat 5.2. hom deduiria, en el cas quasi-analític (que és quan podem parlar propiament de $h(I)$, $kh(I)$), el següent lema.

(5.3.3.) Lema.- Sigui V una varietat de H_M i $V_o\subset V$ el subespai tancat que engendren els polinomis exponencials de V (amb freqüències α reals en el cas general, amb freqüències complexes en el cas analític). Sigui $I = V^{o}$, mòdul transformació de Fourier. Aleshores, $V_o = V$ equival a $kh(I)=I$ (zeros reals en el cas general, zeros complexes en el cas analític i sempre contant multiplicitats). //

Per tant, quan les qüestions A) i B) tinguin respostes afirmatives per a ideals de E_M tindrem l'anàleg del teorema (5.2.5.) per a varietats de H_M. Aquest és el cas dels teoremes (2.2.1.)-(2.2.3.) i (3.7.1.). D'aquesta forma tindrem:

<u>(5.3.4.) Teorema.-</u> Suposem que E_M és analítica(i que compleix les restriccions del Capítol 3) o bé que és quasi-analítica invertible, i sigui V una varietat de H_M. Aleshores, V conté al menys un monomi exponencial (amb freqüència complexa al primer cas, real al segon) i tota $F \in V$ és límit, a H_M, de polinomis exponencials. Els monomis exponencials de V són determinats pels zeros de $I = V^{o}$, contant multiplicitats, segons (5.3.2.). //

Per a $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $\alpha \leq 1$ val el teorema (5.3.4.). En aquest cas, $\lambda_M(t) = \exp t^{1/\alpha}$ (ho veuriem de la mateixa forma que a l'exemple de l'apartat 3.4.) i $H_M = H_M(0)$ és <u>l'espai de les funcions enteres d'ordre $\leq \alpha^{-1}$ i tipus normal.</u> A [47] hi ha més exemples d'àlgebres definides per condicions radials a les quals val (5.3.4.).

També és cert per a $M_n = (n \log n)^n$ ja que aquesta dóna lloc a una classe quasi-analítica invertible (apartat 2.2.). Calculem què val $\lambda_M(t)$ en aquest cas, per identificar H_M. Amb les notacions de 4.4., ací és

$$m_n = \frac{(n \log n)^n}{((n-1)\log(n-1))^{n-1}} = n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \log n \left(\frac{\log n}{\log(n-1)}\right)^{n-1} .$$

Les successions $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ i $\left(\frac{\log n}{\log(n-1)}\right)^{n-1}$ tendeixen respectivament a e i 1 i per tant el sustituir m_n per $n\,e \log n$ significa sustituir $M_n = m_1 \ldots m_n$ per una successió equivalent, de manera que suposarem que $m_n = e\,n \log n$. Així ara, seguint amb les notacions de 4.4. i per (8) del Capítol 4, és

$$\text{" si } e\,n \log n \leq t \leq e(n+1)\log(n+1),\ n(t)=n \text{ i } \quad \lambda_M(t) = \frac{t^n}{(n \log n)^n} \text{ "}$$

La primera desigualtat ens mostra que $\log n(t)$ i $\log t$ són del mateix ordre, i que $n(t)$ és del mateix ordre que $n'(u)$ on n' és la funció n que correspon a $n!$ i $u = t / \log t$. Per tant,

$$\lambda_M(t) = \frac{t^{n(t)}}{(n(t) \log n(t))^{n(t)}}$$

és del mateix ordre que

$$\frac{u^{n'(u)}}{n'(u)^{n'(u)}}$$

que, com ja savem, és del mateix ordre que $\exp u$. En resum, per a $M_n = (n \log n)^n$ $\lambda_M(t)$ és del mateix ordre que $\exp(t / \log t)$. Observem que això és congruent amb la condició (c) del teorema de Denjoy-Carleman (0.4.1.) doncs

$$\int_0^\infty \frac{\log \lambda_M(t)}{1+t^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{t}{\log t\ (1+t^2)}\,dt$$

és divergent a ∞. Així, en aquest cas H_M és l'espai de les funcions enteres tals que

$$\left|F(z)\right| = O\left(\exp \frac{O\,|z|}{\log O|z|} \exp O|\mathrm{Im}\, z| \right)$$

i per a aquest espai val el teorema (5. 3. 4.) amb freqüències reals.

Veurem que també és cert el teorema (5. 3. 4.) quan E_M és no quasi-analítica, l. m. -convexa i satisfà les hipòtesis del capítol anterior (és a dir, quan valgui la síntesi espectral). Això ho farem al darrer apartat del Capítol 6.

CAPÍTOL 6

LA IMATGE LOCAL I PUNTUAL DE LES CLASSES E_M

En aquest capítol estudiem la imatge local i puntual de les classes E_M. Per imatge local de E_M entenem l'àlgebra restricció de E_M a l'interval $[-1,1]$ i així es tracta d'estudiar quan

$$\begin{aligned} r_1 : E_M &\longrightarrow E_M(1) \\ f &\longmapsto f_{|[-1,1]} \end{aligned}$$

és exhaustiva. Per imatge puntual s'enten el conjunt de successions $(f^{(n)}(0))$ amb $f \in E_M$. L'espai de successions involucrat és el que ja va aparèixer en el Cap. 3 (veure 3.1.), és a dir, l'espai

$$E_M(0) = \left\{ a = (a_n) \;/\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, C(\varepsilon) \text{ t.q. } |a_n| \leq C(\varepsilon)\varepsilon^n M_n \right\}$$

Així es tracta d'estudiar quan l'aplicació

$$\begin{aligned} r_o : E_M &\longrightarrow E_M(0) \\ f &\longmapsto (f^{(n)}(0))_n \end{aligned}$$

és exhaustiva (és a dir, l'anàleg del teorema de Borel). Hi han diversos treballs on es demostra l'exhaustivitat de r_o en casos concrets (veure [10], [35]) o bé es donen condicions suficients sobre una successió $a = (a_n)$ a fi que $a \in \operatorname{Im} r_o$ (veure [20]). Ehrenpreis ([11], darrera secció), amb petites restriccions, arriba a una condició necessària i suficient per a que r_1 i r_o siguin exhaustives. Ací arribarem a condicions semblants d'una forma que considerem més senzilla. Al darrer apartat precisem la síntesi espectral del Cap. 4.

Només considerem el cas q. a. no analític i el cas n. q. a., ja que el cas analític l'hem tractat ja als apartats 3. 2., 3. 3. .

<u>6. 1. - Les imatges local i puntual en el cas quasi-analític, no analític.</u>

En aquest apartat es tracta d'estudiar si les aplicacions

$$r_1 : E_M \longrightarrow E_M(1)$$

$$r_o : E_M \longrightarrow E_M(0)$$

definides per $r_1(f) = f_{|[-1,1]}$, $r_o(f) = (f^{(n)}(0))_n$, són exhaustives en el cas quasi-analític, no analític (en el capìtol 3, apartats 3. 2., 3. 3., s'ha tractat el cas analític i (3. 2. 1.) dóna una condició necessària i suficient, per a que r_o sigui exhaustiva). En el cas quasi-analític, no analític, la resposta és radicalment oposada, puix r_1, r_o no són mai exhaustives (aquesta afirmació, per a r_o, és a la tesi d'en Bang i demostrada per altres mètodes).

<u>(6. 1. 1.) Teorema.-</u> Si E_M és quasi-analítica i no analítica, és a dir,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty \quad , \quad \sup_n \left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \infty$$

r_1 i r_o no són exhaustives.

Demostració.- Veiem primer r_1. Si r_1 fos exhaustiva, seria bijectiva ja que és injectiva al ésser E_M quasi-analítica. Aleshores seria un isomorfisme topològic i E_M, $E_M(1)$ serien àlgebres topològiques isomorfes. Però el teorema (1.1.1.) ens diu que tenen espectres diferents. Així r_1 no pot ser exhaustiva.

Per a r_o valdria una demostració semblant si haguéssim tractat $E_M(0)$ com a àlgebra i vist que el seu espectre està reduït a un punt. Però podem donar altres demostracions:

1.- Igual que abans, si r_o fos exhaustiva seria un isomorfisme topològic. Aleshores, per a cada x, l'aplicació

$$(f^{(n)}(0)) \longmapsto f(x)$$

seria una forma lineal contínua a $E_M(0)$. Tenint en compte com és el dual de $E_M(0)$ (apartat 3.1.), hi ha una successió $b_n(x)$ t.q.

$$\sup_n \left(|b_n(x)| M_n \right)^{1/n} < \infty \ , \quad f(x) = \sum_n f^{(n)}(0)\ b_n(x) \quad \forall f \in E_M \ .$$

Si especialitzem a $f(x) = x^n$ trobem que $b_n(x) = x^n/n!$. Llavors, la primera relació anterior dóna que

$$x \sup_n \frac{M_n}{n!} < \infty \qquad ,$$

que contradiu la segona hipòtesi.

2.- El teorema (3.2.1.) és també vàlid en el cas quasi-analític general, de manera que

$$\lambda_M(t) \exp t = A \left(\lambda_M(Bt) \right)$$

és una condició necessària per a que r_o sigui exhaustiva. Veurem que això implica que la classe és analítica i haurem acabat: utilitzant (3.10.3.), podem escriure

$$\lambda_M(Bt) \leq \lambda_M(t) \quad \lambda_M(Ct)$$

per a una constant C. Aleshores deduïm que

$$\exp t \leq A \quad \lambda_M(Ct),$$

i per (0.2.1.), E_M és analítica.

Així r_o tampoc pot ser exhaustiva. //

El teorema (6.1.1.) planteja el problema de caracteritzar d'alguna forma $\mathrm{Im}\, r_o$ en el cas q.a. no analític : com ha d'ésser una successió $a=(a_n)$ de $E_M(0)$ per a que existeixi una $f \in E_M$ t.q. $f^{(n)}(0)= a_n$?. sembla ser que Beurling (no publicat) va resoldre aquesta qüestió pel cas $M_n= (n \log n)^n$ (veure [11]) però no hem pogut trobar el seu resultat ni molt menys esbrinar els seus mètodes. A part de les òbvies condicions necessàries que (2.1.1.) proveeix, només podem donar una condició que no és, tanmateix, una solució satisfactòria del problema ([20] també conté un resultat en aquest sentit).

Podem pensar que el dual de $E_M(0)$ és el subespai $H_M(0)$ de H_M de les F t.q. $|F(z)| = O(\lambda_M(O|z|))$. Una successió $a=(a_n)$ de $E_M(0)$ és un funcional

$$\begin{aligned} H_M(0) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ F(z)=\sum b_n (iz)^n &\longmapsto \sum a_n b_n \end{aligned}$$

Com que E_M és reflexiu, $a \in \mathrm{Im}\, r_o$ si i només si aquest funcional es pot estendre contínuament a H_M i com que $H_M(0)$ és dens a H_M al contenir els polinomis (estem en el cas q. a.), si i només si aquest funcional és continu quan $H_M(0)$ porta la topologia induïda per H_M. Per tant han d'existir $C>0$ i k que domina tota $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp r|\operatorname{Im} z|$ t. q.

$$\left| \sum a_n b_n \right| \leq C \sup_z \frac{|F(z)|}{k(z)} \quad ,$$

per a $F(z)=\sum b_n (iz)^n$ de $H_M(0)$. Fins i tot, com que els polinomis són densos, és suficient d'imposar això als polinomis.

<u>(6. 1. 2.) Proposició</u>. - Una successió $a=(a_n)$ és a la imatge de r_o si i només si existeix k(z) que domina totes les $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp r|\operatorname{Im} z|$ i existeix $C>0$ tals que per a tot polinomi $P(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (iz)^k$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \right| \leq C \sup_z \frac{|P(z)|}{k(z)} \quad . \; //$$

Fixem-nos que aquesta condició, per a $P(z)= z^k$, és equivalent al fet $a \in E_M(0)$.

<u>6. 2. - Les imatges local i puntual en el cas no quasi-analític.</u>

El problema és el mateix que en l'apartat anterior, però en el cas n. q. a. . Trobarem condicions suficients, necessàries per a que les aplicacions r_1, r_o siguin exhaustives. Les condicions que trobem són molt semblants a les obtingudes per Ehrenpreis (secció XIII. 3 de [11]) però creiem que d'una demostració molt més clara.

(6.2.1.) Proposició.- r_o exhaustiva $\Rightarrow r_1$ exhaustiva.

Demostració.- Si $f \in E_M(1)$, hi ha $f_- \in E_M$ t.q. $f_-^{(n)}(-1)=f^{(n)}(-1)$ i $f_+ \in E_M$ t.q. $f_+^{(n)}(1)=f^{(n)}(1)$. Aleshores, la funció que és igual a f_- per a $t \leq -1$, a f_+ per a $t \geq 1$ i a f per a $-1 \leq t \leq 1$ exten f. //

El següent criteri és una altra forma d'escriure un conegut teorema sobre epimorfismes d'espais de Fréchet:

Proposició.- Siguin E, F espais de Fréchet i $u: E \longrightarrow F$ lineal contínua. u és exhaustiva si i només si $\mathrm{Im}\, u$ és densa i $(\ker u)^o \subset \mathrm{Im}\, u^t$.

Demostració.- u és exhaustiva si i només si $\mathrm{Im}\, u$ és densa i $\mathrm{Im}\, u^t$ és dèbilment tancada a E' (veure [48]). Com que $\mathrm{Im}\, u^t$ és dèbilment dens a $(\ker u)^o$ i aquest és dèbilment tancat, dir que $\mathrm{Im}\, u^t$ és dèbilment tancada és equivalent a dir que $\mathrm{Im}\, u^t = (\ker u)^o$. //

En el nostre cas, és clar que $\mathrm{Im}\, r_1, \mathrm{Im}\, r_o$ són densos (ja que $\mathrm{Im}\, r_1$ conté els polinomis i $\mathrm{Im}\, r_o$ les successions quasi-nul·les). Així tenim

" r_1 exhaustiva equival a $(\ker r_1)^o \subset \mathrm{Im}\, r_1^t$."

" r_o exhaustiva equival a $(\ker r_o)^o \subset \mathrm{Im}\, r_o^t$ ".

$\mathrm{Im}\, r_1^t$ és $E'_M(1)$ pensat com a subespai de E'_M i el mateix podem dir de $\mathrm{Im}\, r_o^t$. $T \in (\ker r_o)^o$ si $T(f)=0$ sempre que $f^{(n)}(0)=0$ $\forall n$; utilitzant (4.0.2.), veiem que $(\ker r_o)^o$ consta de les ultradistribucions T tals que $\mathrm{supt}\, T=\{0\}$ (és a dir, si $\mathrm{supt}\, T=\{0\}$, T és límit a E'_M de combinacions lineals de $\delta^{(n)}$, sense que això contradigui la nota al Teorema 4 de [40]). De la mateixa forma, $(\ker r_1)^o$ és l'espai de les ultradistribucions T amb suport a $[-1,1]$.

Calcularem les imatges per la transformació de Fourier d'aquests subespais de E'_M de manera que poguem treballar amb espais de funcions enteres.

Per a $\operatorname{Im} r_1^t$, $\operatorname{Im} r_o^t$ és immediat: es transformen, respectivament, en $H_M(1), H_M(0)$

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
H_M(1) &= \left\{ F \in H / |F(z)| = O(\lambda_M(O|z|) \exp|\operatorname{Im} z|) \right\} \\
H_M(0) &= \left\{ F \in H / |F(z)| = O(\lambda_M(O|z|)) \right\} .
\end{aligned}
$$

Per a $(\ker r_1)^o$ cal saber expressar en termes de $\hat{T}$ el fet que supt $T \subset [-1,1]$. Suposem doncs que $T \in E'_M$ i que supt $T \subset [-1,1]$. És

$$|T(f)| \le C\, p_{r,\varepsilon}(f) \qquad , \; f \in E_M$$

per a uns certs C, r, ε. Per a cada $\delta > 0$ sigui $h_\delta \in E_M$ tal que $h_\delta = 0$ per a $|x| \geq 1+\delta$ i $h_\delta = 1$ en un entorn de $[-1,1]$. Aleshores, com que $f = fh_\delta$ en un entorn de $[-1,1]$,

$$|T(f)| = |T(f\, h_\delta)| \le C\, p_{r,\varepsilon}(f h_\delta) .$$

Ara, $fh_\delta = 0$ per a $|x| \geq 1+\delta$ i $p_{r,\varepsilon}(fh_\delta) \le p_{1+\delta,\varepsilon}(fh_\delta) \le p_{1+\delta,\varepsilon/2}(f)\, p_{1+\delta,\varepsilon/2}(h_\delta)$.
D'aquesta forma, si supt $T \subset [-1,1]$ existeix $\varepsilon > 0$ i per a cada $\delta > 0$ hi ha $C(\delta) > 0$ t.q.

$$|T(f)| \le C(\delta)\; p_{1+\delta,\varepsilon}(f) \;, \quad f \in E_M .$$

Recíprocament, si aquesta és certa i $[-1,1] \cap \text{supt } f = \emptyset$, agafant $\delta < d([-1,1], \text{supt } f)$, hom troba que $T(f) = 0$. Això ens diu que supt $T \subset [-1,1]$ si i només si $T \in E'_M(1+\delta)$ per a tot $\delta > 0$ (amb la precisió que

ε no depèn de δ). Tenint en compte la caracterització de $\hat{E}'_M(1+\delta)$ com $H_M(1+\delta)$ (teorema (0.3.1.)), tindrem:

<u>(6.2.2.) Proposició.</u> - Una $T \in E'_M$ té suport a $[-1, 1]$ si i només si hi ha $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $\delta > 0$ és

$$(2) \qquad \left|\hat{T}(z)\right| = O\left(\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp (1+\delta) |\mathrm{Im}\, z| \right) , \quad z \in \mathbb{C}$$

i té suport $\{0\}$ si i només si hi ha $\varepsilon > 0$ t.q. per a tot $\delta > 0$ és

$$(3) \qquad \left|\hat{T}(z)\right| = O\left(\lambda_M\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) \exp \delta |\mathrm{Im}\, z| \right) , \quad z \in \mathbb{C} \; . \; //$$

Definim $h_M(1)$, $h_M(0)$ com els espais de funcions enteres que satisfan respectivament (2), (3). El nostre problema queda ara plantejat de la forma següent:

(4)
" r_1 exhaustiva equival a $h_M(1) \subset H_M(1)$ "

" r_o exhaustiva equival a $h_M(0) \subset H_M(0)$ "

amb els espais definits per (1), (2), (3).

Il·lustra pensar en un cas semblant, el de E : el paper que per a E_M fan els pesos $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})$ variant $\varepsilon > 0$ ho fan per a E els pesos $(1+|z|)^m$ variant $m \in \mathbb{N}$. Per exemple, el problema de si r_o és exhaustiva (el teorema de Borel) és equivalent al problema: donada una funció entera F t.q. per a un m és

$$|F(z)| = O\left((1+|z|)^m \exp \delta |\mathrm{Im}\, z| \right)$$

$\forall \delta$, és $|F(z)| = O\left((1+|z|)^m \right)$, és a dir, és F un polinomi ?. Això és [5] (6.2.13.). Doncs igual que aquest resultat de Boas, ens basarem en estimacions fines de la creixença de les funcions enteres que apareixen.

6.3.- Nova descripció de $h_M(1)$ i $h_M(0)$.

El que volem fer és obtenir una descripció de $h_M(1)$ i $h_M(0)$ en termes similars als que tenim descrits $H_M(1)$ i $H_M(0)$, és a dir, en termes d'un únic pes (fent fora els δ a la definició de $h_M(1)$, $h_M(0)$). Comencem per definir aquesta "funció pes".

La funció $\log \lambda_M(|t|)$ és una funció contínua de t i és $dt/1+t^2$ - integrable segons la condició (c) del teorema (0.4.1.) de Denjoy-Carleman. Podem considerar doncs la seva integral de Poisson

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y|\log\lambda_M(|t|)}{(t-x)^2+y^2}\,dt \quad , z=x+iy\ ,\ y\neq 0,$$

que és una funció harmònica de z a ambdós semiplans i té valors frontera $\log \lambda_M(|t|)$. Definim, per a $y\neq 0$,

$$\alpha_M(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y|\log\lambda_M(|t|)}{(t-x)^2+y^2}\,dt\right\} \quad , z=x+iy, \tag{5}$$

i la considerem estesa a $\mathbb{R}$ per $\alpha_M(t)=\lambda_M(|t|)$. Així α_M és una funció contínua al pla complex que extén $\lambda_M(|t|)$ i t.q. $\alpha_M(\bar z)=\alpha_M(z)$. També, és immediat de comprovar que $\alpha_M(-z)=\alpha_M(z)$, és a dir, α_M queda determinada en el quadrant $x\geq 0, y\geq 0$. Necessitarem les estimacions contingudes als lemas següents.

Lema.- (acotació de λ_M).- Per a tot $\delta>0$,

$$\alpha_M(z)=O\left(\lambda_M(2|x|)\exp\delta|y|\right),\ z=x+iy, y\neq 0. \tag{6}$$

Demostració.- És suficient de fer-ho per a $x\geq 0,\ y\geq 0$.

Fent el canvi $t=x+u$ a (5),

$$\log \alpha_M(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \lambda_M(|x+u|)}{u^2+y^2}\, du \leq$$

$$\leq \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \lambda_M(|x|+|u|)}{u^2+y^2}\, du \leq \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \lambda_M(2|x|)+\log \lambda_M(2|u|)}{u^2+y^2}\, du ,$$

on hem fet servir la relació $\lambda_M(s+t) \leq \lambda_M(2s)\,\lambda_M(2t)$ (veure (3. 10. 3.)).

$$\log \alpha_M(z) \leq \log \lambda_M(2|x|)\, \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+y^2} + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \lambda_M(2|u|)}{u^2+y^2}\, du =$$

$$= \log \lambda_M(2|x|) + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \lambda_M(2|u|)}{u^2+y^2}\, du .$$

Llavors és suficient de veure que $\forall \delta > 0$,

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \lambda_M(2|t|)}{t^2+y^2}\, dt = O(1) + \delta\, y .$$

El terme de l'esquerra és el valor en el punt $z=(0,y)$ de la integral de Poisson de la funció contínua $\log \lambda_M(2|t|)$. Hi ha una acotació ([29] pg. 232 lema 3) que diu que si v és la transformada de Poisson d'una funció contínua u , aleshores per a cada $\delta > 0$,

$$|v(z)| = O(1) + \delta\, \frac{|z|^2}{y} .$$

En el nostre cas $z= (0,y)$ i així acabem la demostració del lema. //

<u>Lema (acotació de λ_M).</u>- Per a tot $\varepsilon > 0$ tenim

(7) $$\lambda_M(t) = O(\exp \varepsilon t).$$

Demostració. - És conseqüència de la relació

$$\lim \left(\frac{n!}{M_n}\right)^{1/n} = 0$$

vàlida en el cas n.q.a., que vàrem demostrar a la nota posterior a (1.2.3.). //

Necessitarem també el teorema següent, degut a Nevanlinna (teorema 6.5.4. de [5] o teorema 5 pg. 40 de [29]) :

(6.3.1.) Teorema.- Si $F(z)$ és una funció holomorfa al semiplà $y>0$, contínua al semiplà tancat $y \geq 0$, els zeros (z_n) de F al semiplà obert no tenen punt d'acumulació finit i

(8) $$\alpha = \liminf_{r \to \infty} r^{-1} \log M(r) < \infty$$

(9) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^{+}|F(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty$$

(ací $M(r) = \sup\left\{ |F(z)|;\ |z|=r,\ \operatorname{Im} z \geq 0 \right\}$), aleshores

(10) $$\log|F(z)| = \log\left|\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-z/z_n}{1-z/\bar{z}_n}\right| + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|F(t)|}{(t-x)^2+y^2}\, dt + cy,\ z=x+iy,\ y>0$$

on $c = \lim_{r \to \infty} \left(\frac{2}{\pi}\right) r^{-1} \int_0^{\pi} \log\left|F(re^{i\theta})\right| \sin\theta \, d\theta$. També, $c \leq 4\alpha/\pi$.

(l'existència de c i la convergència del producte i la integral formen part de les conclusions del teorema). //

Ara ja podem donar la nova descripció de $h_M(1)$, $h_M(0)$:

(6.3.2.) Proposició.- Una funció entera pertany a $h_M(1)$ si i només si hi ha $\varepsilon > 0$ tal que

$$(11) \qquad |F(z)| = O(\alpha_M(\frac{z}{\varepsilon}) \exp |\mathrm{Im}\, z|)\ , \quad z \in \mathbb{C}$$

i pertany a $h_M(0)$ si i només si

$$(12) \qquad F(z) = O(\alpha_M(\frac{z}{\varepsilon}))$$

per a un $\varepsilon > 0$.

Demostració.- Comparant (11) i (12) amb (2) i (3) veiem que la suficiència és conseqüència de l'acotació (6). Vegem ara la necessitat (ho fem només per a $h_M(1)$ éssent igual per a $h_M(0)$). Sigui $F \in h_M(1)$, és a dir, existeix $\varepsilon > 0$ t.q. $\forall \delta > 0$,

$$(13) \qquad |F(z)| = O(\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp (1+\delta)|\mathrm{Im}\, z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Segons (7), $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) = O(\exp\delta|z|)$ $\forall \delta > 0$, de manera que

$$|F(z)| = O(\exp\delta|z| \exp (1+\delta) |\mathrm{Im}\, z|),$$

per a tot $\delta > 0$. Aplicarem el teorema (6.3.1.) a la funció $G(z) = F(z) \exp iz$. Per a $\mathrm{Im}\, z > 0$,

$$|G(z)| = |F(z)| \exp -|\mathrm{Im}\, z| = O(\exp\delta|z| \exp\delta|\mathrm{Im}\, z|).$$

Per tant, $|G(z)| = O(\exp 2\delta|z|)$ per a tot $\delta > 0$ a $\mathrm{Im}\, z > 0$. Això significa que G és de tipus exponencial zero i que satisfà per tant (8) amb $\alpha \leq 0$. Per a $t \in \mathbb{R}$, (13) dóna

$$(14) \qquad |G(t)| = |F(t)| = O(\lambda_M(\frac{|t|}{\varepsilon}))$$

i G també satisfà (9) (estem en el cas n.q.a.). Per tant, per a $y>0$,

$$\log|F(z)|-y=\log|G(z)|=\log\left|\prod_{n=1} \frac{1-z/z_n}{1-z/\bar{z}_n}\right|+\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|F(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt+c\,y\,.$$

Ara bé, $c\leq 4\alpha/\pi\leq 0$ i $\left|\dfrac{1-z/z_n}{1-z/\bar{z}_n}\right|=\dfrac{|z-z_n|}{|z-\bar{z}_n|}<1$ si $\operatorname{Im} z,\ \operatorname{Im} z_n>0$. Concluim

doncs que, per a $y>0$,

$$\log|F(z)|\leq\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|F(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt+y\ .$$

Si fem el mateix amb la funció $F(-z)$, trobem que per a $y<0$,

$$\log|F(z)|\leq\frac{-y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|F(-t)|}{(t+x)^2+y^2}\,dt-\ y$$

i amb el canvi $-t=u$ trobem que en general, per a $y\neq 0$,

$$\log|F(z)|\leq\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|F(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt\ +|y|\ . \tag{15}$$

Ara, per (14), $|F(t)|\leq C\ \lambda_M(\frac{|t|}{\varepsilon})$ i (fent el canvi $t=\varepsilon u$ a la integral)

$$\log|F(z)|\leq\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log C+\log\lambda_M(\frac{|t|}{\varepsilon})}{(t-x)^2+y^2}\,dt+|y|\ =\log C+|y|\ +$$

$$+\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log\lambda_M(|u|)}{(\varepsilon u-x)^2+y^2}\ du=\log C+|y|+\frac{|y/\varepsilon|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log\ \lambda_M(|u|)}{(u-\frac{x}{\varepsilon})^2+(\frac{y}{\varepsilon})^2}\ du$$

és a dir,

$$\left|F(z)\right| \leq C \quad \alpha_M\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \exp \left|\operatorname{Im} z\right| \quad ,$$

per a $y \neq 0$. Per a $y=0$ això ja és inclós a (13) puix $\alpha_M(t) = \lambda_M(|t|)$.
Per tant, F satisfà (11) i la demostració és així completa. //

El problema original ha quedat reduït, mitjançant (4) i la proposició (6.3.2.) al següent: tenim

$$(16) \qquad \begin{aligned} H_M(1) &= \left\{F \in H / |F(z)| = O(\lambda_M(O|z|) \exp|\operatorname{Im} z|)\right\} \\ H_M(0) &= \left\{F \in H / |F(z)| = O(\lambda_M(O|z|))\right\} \\ h_M(1) &= \left\{F \in H / |F(z)| = O(\alpha_M(Oz) \exp|\operatorname{Im} z|)\right\} \\ h_M(0) &= \left\{F \in H / |F(z)| = O(\alpha_M(Oz))\right\} \end{aligned}$$

i busquem condicions necessàries i suficients per a que valguin les inclusions $h_M(1) \subset H_M(1)$ i $h_M(0) \subset H_M(0)$.

6.4.- Una condició suficient.

A la vista de (16) és immediat el resultat següent:

<u>(6.4.1.) Teorema.</u>- Una condició suficient per a que

$$r_1 : E_M \longrightarrow E_M(1) \quad , \quad r_o : E_M \longrightarrow E_M(0)$$

definides per $r_1(f) = f_{|[-1,1]}$, $r_o(f) = (f^{(n)}(0))$ siguin exhaustives és que

$$(17) \qquad \alpha_M(z) = O(\lambda_M(O|z|)) \quad ,$$

on α_M està definida per (5). //

Més endavant analitzarem si aquesta condició es compleix en els exemples més importants.

6.5.- Condicions necessàries.

El que segueix està fet per a r_1, però el mateix mètode val per a r_o (fins i tot es simplifica en alguns punts)

Suposem doncs que $h_M(1) \subset H_M(1)$, és a dir, $h_M(1) = H_M(1)$. Aleshores, aquest és un espai de funcions enteres en el qual hi podem posar dues topologies : la inductiva de les

$$\|F\|_\varepsilon^1 = \sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp|\mathrm{Im}\, z|} ,$$

i la inductiva de les

$$\|F\|_\varepsilon^2 = \sup \frac{|F(z)|}{\alpha_M(\frac{z}{\varepsilon}) \exp|\mathrm{Im}\, z|} .$$

Posem $h_M^1(1)$, $h_M^2(1)$ per designar l'espai vectorial topològic corresponent. Posem també, per a $i=1,2$

$$h_M^i(1,\varepsilon) = \{ F \in H / \|F\|_\varepsilon^i < \infty \} .$$

Cada $h_M^i(1,\varepsilon)$ és un espai de Banach i per tant les dues topologies són topologies LF. També les dues són més fines que la topologia de la convergència puntual. Fent servir una vegada més el resultat de Grothendieck ([15]) segons el qual sobre un determinat espai de funcions només hi ha una topologia LF més fina que la de la convergència puntual, concluïm que $h_M^1(1) = h_M^2(1)$ com a espais vectorials topològics. En particular,

$$h_M^2(1) \xrightarrow{\text{id}} h_M^1(1)$$

és contínua, és a dir,

$$h_M^2(1,\delta) \hookrightarrow h_M^1(1)$$

és contínua per a tot $\delta > 0$. Per un altre teorema de Grothendieck ([15] pg. 148) hi ha $\varepsilon > 0$ tal que $h_M^2(1,\delta) \subset h_M^1(1,\varepsilon)$ i

$$h_M^2(1,\delta) \hookrightarrow h_M^1(1,\varepsilon)$$

és contínua (com a espais de Banach). Així, per a tot $\delta > 0$ hi ha $\varepsilon > 0$ i $C > 0$ tals que

$$\sup_z \frac{|F(z)|}{\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp|\operatorname{Im} z|} \leq C \sup_z \frac{|F(z)|}{\alpha_M(\frac{z}{\delta}) \exp|\operatorname{Im} z|} \tag{18}$$

sempre que el membre de la dreta sigui finit. Això ja es va semblant a la condició (17); si existís una funció entera F t. q. $|F(z)| = \alpha_M(z) \exp|\operatorname{Im} z|$ aleshores (18) per a $\delta = 1$ i aquesta F ens donaria que la condició suficient (17) és també necessària. És clar que una funció com aquesta no existirà sempre. Ara bé, cada F que trobem ben adaptada a (18) ens donarà una condició necessària.

Suposem que tenim una funció entera F tal que:

(a) $|F(t)| = O(\lambda_M(O|t|))$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) F és de tipus exponencial zero, és a dir, $|F(z)| = O(\exp\varepsilon|z|)$ $\forall \varepsilon > 0$.

F estarà a les condicions del teorema (6.3.1.) doncs (a) implica (9) i (b) implica (8) també amb $\alpha \leq 0$. Així, (10) és vàlid per a F i $\mathrm{Im}\, z > 0$. Definim

$$\rho_F(z) = \exp\left\{ \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |F(t)|}{(t-x)^2 + y^2} \, dt \right\} \text{ per a } \mathrm{Im}\, z \neq 0$$

$$\rho_F(t) = |F(t)|.$$

De la mateixa forma que hem obtingut (15) a la proposició (6.3.2.) (utilitzant que $c \leq 0$ i que $|z-z_n| < |z-\bar{z}_n|$ per a $\mathrm{Im}\, z, \mathrm{Im}\, z_n > 0$ tant per a $F(z)$ com per a $F(-z)$) obtenim que

$$(19) \qquad |F(z)| \leq \rho_F(z)$$

per a $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ (hom pot també obtenir això utilitzant un principi de Phragmén-Lindelбf). Després, (a) implica , igual que al darrer pas de la proposició (6.3.2.), que

$$(20) \qquad \rho_F(z) = O(\alpha_M(Oz)).$$

Analitzant la demostració del teorema de Nevanlinna (6.3.1.), hom veu que la convergència del producte

$$\phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - z/\bar{z}_n}{1 - z/z_n}$$

l'assegura la convergència de la sèrie $\sum_n |\mathrm{Im}\, 1/z_n|$. Ara bé, això implica no sols la convergència del producte al semiplà $y > 0$, sinó la convergència uniforme de $\phi(z)$ sobre tot compacte que no contingui cap z_n. Això ens permet de definir una nova funció entera

$$w_F(z) = F(z)\ \phi(z)\ \exp icz\ \exp -iz\ ,$$

(aquesta c és la de (10)), de manera que

$$|w_F(z)| = |F(z)||\phi(z)| \exp -cy \exp y\ .$$

Si $\operatorname{Im} z > 0$, com que (10) s'escriu ara $|F(z)| = \rho_F(z)\, |\phi^{-1}(z)| \exp cy$, tenim

$$|w_F(z)| = \rho_F(z)\ \exp y.$$

Si $\operatorname{Im} z < 0$, és $|\phi(z)| < 1$ puix $|z-\bar{z}_n| < |z-z_n|$ i també $\exp -cy \leq 1$ dones $c < 0, y < 0$. Aleshores, $|w_F(z)| \leq |F(z)| \exp y$ i amb (19)

$$|w_F(z)| \leq \rho_F(z) \exp y.$$

Finalment, si $\operatorname{Im} z = 0$,

$$|w_F(t)| = |F(t)| = \rho_F(t)$$

En resum, w_F és una funció entera tal que

(21) $$|w_F(z)| \leq \rho_F(z) \exp y, \quad \forall z \in \mathbb{C}\ ,$$

(22) $$|w_F(z)| = \rho_F(z) \exp y \quad \text{si } \operatorname{Im} z > 0.$$

Per (20), $\rho_F(z) \leq A\ \alpha_M(Bz)$ i aleshores (21) diu que (18) per a $\delta = 1/B$ i w_F té el membre de la dreta més petit que A. Per tant,

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|w_F(z)|}{\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp|\mathrm{Im}\, z|} \leq C A$$

per a uns certs C, ε , és a dir,

$$|w_F(z)| \leq C \ \lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \ \exp|\mathrm{Im}\, z| \quad , \forall z .$$

Si especifiquem a $\mathrm{Im}\, z > 0$, per (22)

$$\rho_F(z) \leq C \ \lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \ ,$$

per a $\mathrm{Im}\, z > 0$ i com que $\rho_F(\bar{z}) = \rho_F(z)$, per a tot z. Resumint, hem vist que si una funció entera satisfà (a) i (b) , aleshores $\rho_F(z) = O(\lambda_M(O|z|))$.

Comencem ara a aplicar això a F concretes. Primer ho apliquem a $F(z) = \mu_M(z) = \sum_n z^n / M_n$. Que μ_M satisfà (a) és immediat (μ_M i λ_M són del mateix ordre) i (b) és conseqüència de la desigualtat $|\mu_M(z)| \leq \mu_M(|z|)$, del fet que μ_M i λ_M són del mateix ordre i de (7). Hem arribat a

<u>(6.5.1.) Teorema.</u>- Una condició necessària per a que r_1 i r_o siguin exhaustives és que

$$\exp\left\{\frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|\mu_M(t)|}{(t-x)^2 + y^2}\, dt\right\} = O(\lambda_M(O|z|)), \tag{23}$$

on $\mu_M(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{M_n}$ .//

També es pot agafar qualsevol funció obtinguda de μ_M suprimint termes. Per exemple, si $\gamma_M(z) = \mu_M(z) + \mu_M(-z)$, obtenim:

(6.5.2.) Teorema.- Una condició necessària per a que r_1 i r_0 siguin exhaustives és que

(24) $$\exp\left\{\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log \gamma_M(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt\right\} = O(\lambda_M(O|z|)),$$

on $\gamma_M(t) = \sum_{n\geq 0}\frac{t^{2n}}{M_{2n}}$. //

Les condicions (23),(24) són més fluixes que la condició suficient (17). Això es veu mitjançant la definició (5) i les relacions

(25) $$\begin{aligned} |\mu_M(t)| &\leq \mu_M(|t|) \leq 2\ \lambda_M(2|t|) \\ \gamma_M(t) &\leq 4\ \lambda_M(2|t|) \ . \end{aligned}$$

6.6.- Condicions necessàries i suficients.

Quan alguna de les relacions (25) sigui certa en sentit contrari tindrem una condició necessària i suficient. Per exemple, aquest és el cas amb la presència de la condició (5) del Capítol 2. Aquesta era equivalent a

(26) $$\sup_n \left(\frac{M_{2n}}{M_n^2}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$$

i aleshores, si $M_{2n} \leq H^n M_n^2$, de $\lambda_M(t) \geq 1$,

$$\lambda_M(|t|) \leq \lambda_M^2(|t|) = \sup_n \frac{t^{2n}}{M_n^2} \leq \sup_n \frac{(\sqrt{H}\ t)^{2n}}{M_{2n}} \leq \gamma_M(\sqrt{H}\ t) \ .$$

Així, si val (26) és $\lambda_M(|t|) = O(\gamma_M(Ot))$, és a dir, la segona de les (25) es pot "girar". Per tant, podem enunciar:

<u>(6.6.1.) Teorema.</u>- Si es compleix (5) del Capítol 2 o equivalentment (26), les conditions següents són equivalents:

(a) r_o és exhaustiva.

(b) r_1 és exhaustiva.

(c)

$$(17) \qquad \alpha_M(z) = \exp\left\{\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log \lambda_M(|t|)}{(t-x)^2+y^2}\,dt\right\} = O(\lambda_M(O|z|)),\ z\in\mathbb{C}.\ //$$

<u>Nota.-</u> Demostrarem ara la següent relació

$$\lambda_M(|z|) = \alpha_M(|z|) \leq \alpha_M(z) \leq \alpha_M(i|z|).$$

La primera (que per altra banda demostra les inclusions $H_M(0) \subset h_M(0)$ i $H_M(1) \subset h_M(1)$ directament) voldrà dir que (17) és de fet imposar que $\lambda_M(|z|)$ i $\alpha_M(z)$ siguin del mateix ordre. La segona demostra que (17) equival a $\alpha_M(ir) = O(\lambda_M(Or))$, és a dir, a

$$(27) \qquad \exp\left\{\frac{2r}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\log \lambda_M(t)}{t^2+r^2}\,dt\right\} = O(\lambda_M(Or)).$$

Per demostrar les anteriors desigualtats només cal observar que és suficient de fer-ho per a $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, que

$$\alpha_M(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \lambda_M(|t|)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt = \frac{y}{\pi} \left(\int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{0} \right) =$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \log \lambda_M(t) \left\{ \frac{1}{(t-x)^2+y^2} + \frac{1}{(t+x)^2+y^2} \right\} dt$$

i que al posar $y=r\sin\theta$ $x=r\cos\theta$ al nucli $y\left\{ \frac{1}{(t-x)^2+y^2} + \frac{1}{(t+x)^2+y^2} \right\}$

hom troba una funció de θ que a l'interval $0 \leq \theta \leq \pi/2$ és creixent.

Al darrer apartat encara trobarem més condicions equivalents a (17)-(27) .

6.7.- Interpretació de la condició.

Aquest apartat intenta d'explicar com és que la condició (17) és suficient. El que ara segueix és alhora una nova demostració de la suficiència.

Ja s'ha vist que $H_M(0)$ és, mòdul la transformació de Fourier, el dual de $E_M(0)$ i que la topologia forta coincideix amb la inductiva dels espais de Banach $H_M(0,\varepsilon)$ (apartat 3.1.). Igual que per a H_M, aquesta topologia resulta ésser igual a la definida per les normes

$$\|F\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|F(z)|}{k(z)}$$

on $k(z)$ és una funció que domina totes les $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})$ ([11], [46]). Suposem que (17) és certa. Interpretem aquest fet així: tenim la família de funcions $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})$ i una transformació

$$\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}) \xrightarrow{P'} \alpha_M(\frac{z}{\varepsilon}) = \exp(P[\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})])$$

(P la transformació de Poisson); (17) vol dir que per a tota funció $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})$ de la família n'existeix una altra $\lambda_M(\frac{|z|}{\delta})$ tal que $P'(\lambda_M(\frac{|z|}{\delta})) = O(\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon}))$. Aleshores això mateix serà cert per a la família de funcions k que dominen $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})$ $\forall \varepsilon > 0$: per a tota k d'aquesta família n'existeix una altra $\bar{k}$ tal que

$$\exp\left\{\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log \bar{k}(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt\right\} = O(k(z)) \tag{28}$$

(podem pensar que (28) és una altra forma d'escriure (17)).

A $H_M(0)$ hi podem considerar també la topologia definida per les normes

$$\|F\|'_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|F(x)|}{k(x)} .$$

Evidentment que $\|F\|'_k \leq \|F\|_k$. Donada k, considerem $\bar{k}$ com a (28); per a $F\in H_M(0)$ tenim (igual com demostràrem (15) per a $F\in H_M(1)$) que

$$\log|F(z)| \leq \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|F(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt .$$

Per definició, $|F(t)| \leq \|F\|'_{\bar{k}}\ \bar{k}(t)$ i

$$\log|F(z)| \leq \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log\|F\|'_{\bar{k}} + \log \bar{k}(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt =$$

$$= \log \|F\|_{\bar{k}}' + \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \bar{k}(t)}{(t-x)^2+y^2}\, dt .$$

Això, utilitzant (28), vol dir que $\forall k \; \exists \bar{k}$ t. q. $\|F\|_k \leq C \|F\|_{\bar{k}}'$ per a tota $F \in H_M(0)$. En altres paraules, <u>la condició (17) significa que la topologia de $H_M(0)$ està definida per les normes</u> $\| \;\|_k'$ (en la terminologia d'Ehrenpreis, que $\mathbb{R}$ és un conjunt suficient), i, en certa forma, <u>concentrada en l'eix real.</u> Amb aquesta interpretació de (17) hom pot donar d'una forma més constructiva una demostració de la suficiència. Repetim l'argument emprat per a deduir la representació (19) del Capítol 0: una $a \in E_M(0)$ és un funcional lineal continu a $H_M(0)$ i per tant hi ha una funció $k(z)$ que domina totes les $\lambda_M(\frac{|z|}{\varepsilon})$ i una $C > 0$ t. q.

$$|(a,F)| \leq C \|F\|_k' \quad , \quad F \in H_M(0) .$$

Per Hahn-Banach, aquest funcional extén a l'espai de les funcions contínues $f(t)$ t. q. $|f(t)| = O(k(t))$ i per tant existeix una mesura acotada μ a $\mathbb{R}$ tal que

$$(a,F) = \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t)}{k(t)} \, d\mu(t) \quad ,$$

per a $F \in H_M(0)$. Si T_n és la forma lineal contínua que aplica $a = (a_n)$ sobre a_n, és $\hat{T}_n(z) = (iz)^n$. Així,

<u>(6.7.1.) Proposició.</u> - Si es compleix (17), per a tota successió $a=(a_n)$ de $E_M(0)$ existeix una mesura acotada μ a $\mathbb{R}$ i una

funció k(t) que domina $\lambda_M(\frac{|t|}{\varepsilon})$ $\forall \varepsilon > 0$ t.q.

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{(it)^n}{k(t)} \, d\mu(t) \qquad .//$$

Ara és fàcil de demostrar l'exhaustivitat de r_o : donada $a \in E_M(0)$ i si μ, k són com a la proposició anterior, definim

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(itx)}{k(t)} \, d\mu(t) .$$

Com que ara μ és una mesura acotada a $\mathbb{R}$, té sentit aquesta definició i $f \in E$. També (com després de la representació (19) del Capítol 0)

$$f^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(it)^n \exp(itx)}{k(t)} \, d\mu(t) \quad .$$

En particular, $f^{(n)}(0) = a_n$, $f^{(n)}$ està acotada a $\mathbb{R}$ i

$$\|f^{(n)}\|_{\mathbb{R}} \leq \|\mu\| \sup_t \frac{|t|^n}{k(t)}$$

Si $\lambda_M(\frac{|t|}{\varepsilon}) \leq C(\varepsilon)\; k(t)$,

$$\|f^{(n)}\|_{\mathbb{R}} \leq \|\mu\| \, \varepsilon^n \sup_t \frac{(|t|/\varepsilon)^n}{k(t)} \leq \|\mu\| C(\varepsilon) \varepsilon^n \sup_t \frac{(|t|/\varepsilon)^n}{\lambda_M(|t|/\varepsilon)} =$$

$$= \|\mu\| \; C(\varepsilon) \; \varepsilon^n \; M_n$$

demostren que $f \in E_M$.

6.8.- Exemples.

Abans de considerar exemples concrets cal una observació de caràcter general. I és que el fet que λ_M compleixi la condició (17) és equivalent al fet que una funció del mateix ordre que λ_M la compleixi (si a la fórmula (5) que defineix α_M sustituim λ_M per una del mateix ordre s'obté una funció del mateix ordre que α_M).

(a) Les classes de Gevrey. En aquest cas $\lambda_M(t)$ és del mateix ordre que $\exp t^{1/\alpha}$ (ho veuriem de la mateixa forma que a l'exemple de l'apartat 3.4.) i d'acord amb l'observació inicial podem pensar que $\lambda_M(t) = \exp\ t^{1/\alpha}$. (fixem-nos que això és congruent amb la condició (c) del teorema (0.4.1.)). Ara

$$\alpha_M(z) = \exp\left\{ \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^{1/\alpha}}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \right\}$$

i un càlcul per residus dóna que

$$\alpha_M(z) = \exp\left\{ r^{1/\alpha} \left(\cos \frac{\theta}{\alpha} + R_\alpha \operatorname{sen} \frac{\theta}{\alpha}\right) \right\}$$

on R_α és una constant i $z = r e^{i\theta}$ (fixem-nos que quan $\theta \to 0$ $\alpha_M(z) \longrightarrow \exp r^{1/\alpha} = \lambda_M(r)$ com ha d'ésser). Llavors

$$\alpha_M(z) \leq \exp\left\{ (1 + R_\alpha)\, r^{1/\alpha} \right\}$$

i com $\lambda_M(|z|) = \exp r^{1/\alpha}$ es compleix (17). Per tant, tenim el següent teorema (aquest és el resultat demostrat a [10], [35], per altres mètodes).

(6.8.1.) Teorema.- A les classes de Gevrey $M_n = (n!)^{\alpha}$ amb $\alpha > 1$ les aplicacions r_1 i r_0 són exhaustives. //

(b) $M_n = (n \log^2 n)^n$. Per a aquesta successió, (que dóna lloc a una classe n.q.a. doncs $\sum_n \frac{1}{M_n^{1/n}} = \sum_n \frac{1}{n \log^2 n} < \infty$), és

$$\left(\frac{M_{2n}}{M_n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(2n \log^2 2n)^2}{(n \log^2 n)^2} = 4 \frac{\log^4 2n}{\log^4 n}$$

i per tant es satisfà la condició (26), de manera que, segons (6.6.1) la condició (17) (o l'equivalent (27)), és necessària per a que r_1, r_0 siguin exhaustives. Amb un càlcul semblant al fet per a $M_n = (n \log n)^n$ al darrer apartat del Capítol 5, hom troba que

$$f(t) = \exp\left(\frac{t}{\log^2 t}\right)$$

és una funció del mateix ordre que $\lambda_M(t)$. Per no tenir problemes a $t = 1$, posem $f(t) = \exp\left(\frac{t}{1+\log^2 t}\right)$ que continua éssent del mateix ordre. La condició (27) amb aquesta f en lloc de λ_M s'escriu

$$\exp\left\{\frac{2r}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t}{(1+\log^2 t)}\frac{dt}{t^2+r^2}\right\} \leq A \exp\frac{Br}{1+\log^2 Br}$$

i prenent logaritmes

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{r\,t\,dt}{(1+\log^2 t)(t^2+r^2)} \leq C + \frac{Br}{1+\log^2 Br}$$

dividint per r :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(1+\log^2 t)(t^2+r^2)} \leq \frac{C}{r} + \frac{B}{1+\log^2 Br} \;;$$

fem el canvi $t = ru$ a la integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+\log^2 ru)(1+u^2)} \leq \frac{C}{r} + \frac{B}{1+\log^2 Br} \;;$$

multipliquem per $1+\log^2 Br$ (per r grans)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(1+t^2)\left(\dfrac{1+\log^2 rt}{1+\log^2 Br}\right)} \leq C\,\frac{1+\log^2 Br}{r} + B\,.$$

Les funcions $g_r(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)\left(\dfrac{1+\log^2 rt}{1+\log^2 Br}\right)}$ tendeixen puntualment a la funció $\dfrac{t}{1+t^2}$ quan $r \longrightarrow \infty$ i com que $\dfrac{1+\log^2 Br}{r} \xrightarrow[r]{} 0$, tenen integrals acotades. El lema de Fatou implica que $\dfrac{t}{1+t^2}$ és integrable i hem arribat a un absurd. Així, (17) no es pot complir en aquest cas i tenim:

<u>(6.8.2.) Teorema.-</u> Per a $M_n = (n\log^2 n)^n$, r_1 i r_o no són exhaustives. //

(el mateix seria cert per a $M_n = (n\log^p n)^n$ amb $p \geq 2$) .

6.9.- Precisions del teorema de síntesi espectral del Capítol 4.

En aquest apartat veurem que la hipòtesi (10) del Cap. 4 amb la qual hem demostrat la síntesi espectral implica (17); això ens permetrà de precisar el teorema de la síntesi espectral.

Recordem que $m_n = M_n/M_{n-1}$ per a $n \geqslant 1$ i que $n(r)$ és el nombre de m_n que són $\leq r$. Posem

$$M(r) = \log \lambda_M(r)$$

Aleshores, (veure [30] o [40])

$$M(r) = \sup_{n \geqslant 0} \sum_{q=1}^{n} \log r - \log \frac{M_q}{M_{q-1}} = \sup_{n \geqslant 0} \sum_{q=1}^{n} \log \frac{r}{m_q} ,$$

i el suprem s'agafa per a $n = n(r)$. Podem escriure doncs

$$M(r) = \sum_{q=1}^{n(r)} \log \frac{r}{m_q} = \int_0^r \log \frac{r}{u} \, d\, n(u) = \int_0^r \frac{n(u)}{u} \, du .$$

D'aquesta,

$$(29) \qquad M(er) \geqslant \int_r^{er} \frac{n(u)}{u} \, du \geqslant n(r) \int_r^{er} \frac{du}{u} = n(r)$$

i $\dfrac{dM}{dr} = \dfrac{n(r)}{r}$. Basant-se en aquesta última, hom pot veure ([30]) que la convergència en ∞ de $\displaystyle\int \frac{\log \lambda_M(t)}{t^2} \, dt = \int \frac{M(t)}{t^2} \, dt$ i

$\displaystyle\int \frac{n(t)}{t}\,dt$ són equivalents i impliquen que

$$(30) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = 0 = \lim_{t\to\infty} \frac{n(t)}{t}$$

Ja hem vist que (17) és equivalent a (27). Com que només importen a (27) valors grans de r la podem escriure, prenent logaritmes, sota la forma

$$(31) \qquad \int_0^\infty \frac{r\,M(t)}{t^2+r^2}\,dt = O(M(Or))$$

Ara bé,

$$\int_0^r \frac{r\,M(t)}{t^2+r^2}\,dt \le M(r)\int_0^r \frac{r}{t^2+r^2}\,dt = M(r)\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du$$

és a dir, $\displaystyle\int_0^r$ ja és $O(M(Or))$; per tant (31) és equivalent a

$$\int_r^\infty \frac{r\,M(t)}{t^2+r^2}\,dt = O(M(Or))$$

Finalment, com que $1 \le \dfrac{t^2+r^2}{t^2} \le 2$ per a $t \geq r$, aquesta és equivalent a

$$(32) \qquad \int_r^\infty \frac{r\,M(t)}{t^2}\,dt = O(M(Or)).$$

Ara calcularem explícitament la integral de (32). Integrant per parts, com que $\dfrac{dM}{dr} = \dfrac{n(r)}{r}$,

$$\int_r^\infty \frac{M(t)}{t^2}\,dt = -\frac{M(t)}{t}\Big|_r^\infty + \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^2}\,dt$$

i emprant (30),

$$\int_r^\infty \frac{M(t)}{t^2}\,dt = \frac{M(r)}{r} + \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^2}\,dt\ .$$

Posem $p = n(r)$; $m_p \leq r < m_{p+1}$. Ara

$$\int_r^\infty \frac{M(t)}{t^2}\,dt = \frac{M(r)}{r} + \int_r^{m_{p+1}} \frac{p}{t^2}\,dt + \sum_{k\geq p+1}\int_{m_k}^{m_{k+1}} \frac{k}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{M(r)}{r} + p\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{m_{p+1}}\right) + \sum_{k\geq p+1} k\left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{M(r)}{r} + \frac{n(r)}{r} - \frac{p}{m_{p+1}} + \sum_{k\geq p+1} k\left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{M(r)}{r} + \frac{n(r)}{r} + \sum_{k\geq p+1}\frac{1}{m_k} = \frac{M(r)}{r} + \frac{n(r)}{r} + \sum_{k>n(r)}\frac{M_k}{M_{k+1}}$$

Així $\displaystyle\int_r^\infty \frac{r\,M(t)}{t^2}\,dt = M(r) + n(r) + r\sum_{k>n(r)}\frac{M_k}{M_{k+1}}$, i utilizant (29),

arriben a que (17) és equivalent a

(33) $$r \sum_{k > n(r)} \frac{M_k}{M_{k+1}} = O\,(\,M(O\,r)\,)\,.$$

Per (29), la condició (10) del Capítol 4 implica (33) i per tant (17) i r_o és exhaustiva. Veurem quines conseqüències té això per a la síntesi espectral.

Abans observem, però, que (33) també implica (10) del Capítol 4 si M(r) i n(r) són funcions del mateix ordre. Una condició suficient per a això últim és

(34) $$M_{n+1}^{n} \leq C^{n} \; M_{n}^{n+1}$$

per a una certa constant C. En efecte: si $m_n \leq r < m_{n+1}$, és $n(r) = n$ i $M(r) = n \log r - \log M_n$ de manera que

$$\frac{M(r)}{n(r)} = \log r - \log \; M_n^{1/n} \leq \log \frac{m_{n+1}}{M_n^{1/n}} = \log \frac{M_{n+1}}{M_n^{n+1/n}}$$

roman acotat si (34) és certa. Per exemple, les $(n!)^{\alpha}$ amb $\alpha > 1$ satisfan (34). En certa forma, doncs, gairebé són equivalents (10) del Capítol 4 i (17).

Ara r_o és exhaustiva. Ens posem en el cas que E_M sigui l.m.-convexa (que és el cas que originalment ens havíem plantejat). Per exemple, les classes de Gevrey són l.m.-convexes. (apartat 1.2.)

$E_M(0)$ és una àlgebra amb el producte (que fa de r_o un morfisme) següent: si $a = (a_n)$ i $b = (b_n)$

$$(a.\,b)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \; a_k \; b_{n-k}$$

(6.9.1.) Proposició.- Si E_M és invertible (en el cas n.q.a. és equivalent a l.m.-convexa, apartat 1.3.), $E_M(0)$ és una àlgebra local, íntegra i amb ideal maximal $\mathfrak{M} = \{a/\ a_o = 0\}$ principal i $\bigcap_k \mathfrak{M}^k = \{0\}$.

Demostració.- Veurem que si $a_o \neq 0$, a és invertible. Sigui $f \in E_M$ t.q. $r_o(f) = a$, és a dir, $f^{(n)}(0) = a_n$. Com que $f(0) = a_o \neq 0$, f no s'anul·la en un interval $[-r, r]$. Aleshores, $g = f^{-1} \in E_M(r)$ ja que $E_M(r)$ és invertible (apartat 1.3.); ara, $b = (g^{(n)}(0))$ és un invers per a a. Això demostra que $E_M(0)$ és local amb ideal maximal $\mathfrak{M}$. Que $\bigcap_k \mathfrak{M}^k = \{0\}$ és immediat doncs $\mathfrak{M}^k = \{a/\ a_o = \ldots\ldots = a_{k-1} = 0.\}$. $\mathfrak{M}$ és la imatge de $\{f/\ f(0) = 0\}$ per r_o ; aquest és principal doncs si $f(0)=0$ és $f(x) = x\, g(x)$ amb

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx)\ dt \quad .$$

Per tant, $\mathfrak{M}$ és principal. Que $E_M(0)$ és íntegra és immediat doncs $E_M(0)$ és isomorfa a una subàlgebra de les sèries formals mitjançant $(a_k) \longmapsto (a_k / k!)$. //

Per un teorema general d'àlgebra commutativa (veure [1] problema 4 pg 99) $E_M(0)$ és un anell de valoració discreta i en particular tot ideal de $E_M(0)$ propi és un dels $\mathfrak{M}^k$.

Sigui I un ideal de E_M. Posem

$$\begin{aligned} r_x : E_M &\longrightarrow E_M(0) \\ f &\longmapsto f^{(n)}(x) \ . \end{aligned}$$

La component primària I_x de I a x és $r_x^{-1}\, r_x\,(I)$. Com que $r_x(I)$ és ara un ideal de $E_M(0)$ al ser r_x exhaustiva, hi ha $n \in \overline{N}$ (aceptem el valor ∞ per a n), t.q. $r_x(I) = \mathfrak{M}^n$ i aleshores

$$I_x = \left\{ f / f^{(k)}(x)=0,\ 0 \leq k \leq n \right\}$$

D'això en treurem unes conseqüències:

a) Cada I_x és tancat i $h(I_x) = \{x\}$. Així, I_x és un ideal tancat primari (és a dir, contingut només a un maximal). Suposem que J és un ideal tancat primari a x, és a dir, $h(J)=\{x\}$; com que $h(J) = \{x\}$ $J \supset P(x)$ perquè és el mínim. Ara $J \supset I$ i $J \supset P(x)$ donen $J \supset I_x$. Per tant podem enunciar el teorema de la síntesi espectral sota la forma:

<u>(6.9.2.) Teorema.</u>- Suposem que E_M és no quasi-analítica, l.m.-convexa i que satisfà les hipòtesis (5)(10) del Capítol 4. Aleshores, tot ideal tancat és la intersecció dels ideals tancats primaris que el contenen. //

b) Sigui I qualsevol. Tindrem $\bar{I} = \bigcap_x \bar{I} + P(x)$. Però $I + P(x) = r_x^{-1}\, r_x(I)$ és tancat i conté I ; per tant és $\bar{I} \subset I + P(x)$ i $\bar{I} + P(x) = I + P(x)$. Així,

<u>(6.9.3.) Corol·lari.</u>- Suposem que E_M és n.q.a., l.m.-convexa i que satisfà les hipòtesis (5)(10) del Capítol 4. Aleshores, si I és un ideal de E_M,

$$\bar{I} = \bigcap_x \ I + P(x)\ . //$$

c) Enunciarem d'una forma més suggestiva el teorema de la síntesi espectral. Donat un ideal tancat, agrupem els x t.q. $r_x(I) \subset \mathfrak{M}^p$:

$$h'_p(I) = \left\{ x / r_x(I) \subset \mathfrak{M}^p \right\} = \left\{ x / f^{(j)}(x)=0,\ j \leq p-1,\ \forall f \in I \right\},\ p \in \overline{N}.$$

$$h_p(I) = h'_p(I) - h'_{p+1}(I) \quad \text{per a } p \text{ finit}$$

$$h_\infty(I) = h'_\infty(I).$$

Anàlogament a $kh(I)$ definim per a cada $p \in \overline{N}$

$$(kh)_p(I) = \left\{ f \in E_M / f^{(j)}(0)=0, j \leq p-1, \forall x \in h_p(I) \right\}.$$

Fixem-nos que $(kh)_p(I) = \bigcap_{x \in h_p(I)} I_x$; així el teorema de la síntesi espectral s'escriu

$$I = \bigcap_p (kh)_p(I)$$

on $(kh)_p(I)$ és l'ideal de les funcions que s'anul·len al menys p vegades allà on totes les de I s'anul·len al menys p vegades.

d) Veurem ara que el teorema (5.3.4.) és també cert en aquest cas. La qüestió A) d'aquell Capítol té resposta afirmativa: si $h(I) = \emptyset$, I és dens (és un fet general a les àlgebres l.m.-convexes, [36]). Els lemas (5.3.1.) i (5.3.2.) continuen éssent certs en aquest cas. Amb les notacions del lema (5.3.3.), si $f \in E_M$ és ortogonal al subespai engendrat pels $z^n \exp(i\alpha z)$ que siguin a V, segons (5.3.2.) f s'anul·la al menys n vegades allà on totes les de I s'anul·len al menys n vegades (serà $n = \infty$ si $z^n \exp(i\alpha z) \in V \ \forall n$). Llavors, per c) f és de $I = V^{o}$. Això demostra per Hahn-Banach, que V_o és dens a V. Així,

<u>(6.9.4.) Teorema.</u>- Suposem que E_M és no quasi-analítica, l.m.-convexa i que satisfà (5)(10) del Capítol 4. Aleshores, tota varietat tancada V propia de H_M conté al menys un monomi exponencial (amb freqüència real) i tota $F \in V$ és límit a H_M de polinomis exponencials. //

REFERÈNCIES

[1] M.F. Atiyah-I.G.Macdonald. "Introduction to commutative algebra". Addison-Wesley series in Mathematics, London, 1969.

[2] Th. Bang. " Om quasi-analytiske funktioner" (thesis) Copenhagen, 1946.

[3] Th. Bang. Mathematica Scandinavica, 1, 137-152, 1953.

[4] C.A. Berenstein-M. Dostal. " Analytically uniform spaces and their applications to convolution equations ". Lecture Notes in Mathematics, 256, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[5] R.P. Boas. " Entire functions ". Mathematics in Science and Engineering, 5. Academic Press, New York, 1954.

[6] R.M. Brooks. " Partitions of unity in F-algebras " . Math. Ann. 177-4, 1968.

[7] J.L. Cerdà-J. Cufí. " Cuasianaliticidad en espacios localmente convexos y álgebras de funciones infinitamente diferenciables ". Collectanea Mathematica, Vol XXVIIL, Fasc 1º, 1977.

[8] Chin-Cheng-Chou. " La transformation de Fourier complexe et l'equation de convolution " Lecture Notes in Mathematics, 325. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[9] J. Cufí. " Sobre el álgebra de las funciones enteras de orden acotado " (tesis). Universidad de Barcelona.

[10] D. A. Dzanasija. " Carleman's problem for functions of the Gevrey class". Doklady Akademii Nauk SSSR 147 (1962) (Soviet Math. Dokl. 3 pp. 969–972).

[11] L. Ehrenpreis. " Fourier analysis in several complex variables " Pure and Applied Mathematics, 17. Wiley-Interscience, New York, 1970.

[12] L. Ehrenpreis. " Mean periodic functions ". Amer. J. Math. 77(1955) pp. 293–328.

[13] L. Ehrenpreis. " Theory of infinite derivatives ". Amer. J. Math. 81(1959) pp. 799–845.

[14] Gerretsen-Sansone. " Lectures on the theory of functions of a complex variable ". Nordhoff. Groningen, 1960.

[15] A. Grothendieck. " Topological vector spaces ". Notes in Mathematics and its applications. Gordon and Breach, New York, 1973.

[16] O. Helmer. " Divisibility properties of integral functions ". Duke Math. J. 6, 345–356 (1940).

[17] M. Henriksen. " On the ideal structure of the ring of entire functions ". Pacific J. Math. 2 (1952) pp. 179–184.

[18] L. Hörmander. " An introduction to complex analysis in several variables ". North-Holland Mathematical Library. Amsterdam, 1973.

[19] L. Hörmander. " Generators for some rings of analytic functions " Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) pp. 943–949.

[20] L. Hörmander. " Klasser ar oăndligt deriverbara funktioner" Mimeographed notes (no publicat).

[21] J. Horvâth. " Topological vector spaces and distributions ". Addison-Wesley Series in Mathematics, London, 1966.

[22] J. Kelleher-B. A. Taylor. " Closed ideals in locally convex algebras of analytic functions". J. reine und angew Math. 255(1972) pp. 190-209.

[23] J. Kelleher-B. A. Taylor. " An application of the corona theorem to some rings of entire functions ". Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) pp. 246-249.

[24] J. Kelleher-B. A. Taylor. " Finitely generated ideals in rings of analytic functions ". Math. Ann. 193 (1971), pp. 225-237.

[25] G. Köthe. " Topological vector spaces ". Grunlehren, Springer-Verlag. Berlin, 1969.

[26] I. F. Krasichkov. " Closed ideals in locally convex algebras of entire functions, I ". Math. URSS Izv. 1 (1967) pp. 35-55.

[27] I. F. Krasichkov. " Closed ideals in locally convex algebras of entire functions, II ". Math. URSS Izv. 32 (1968) pp. 979-986.

[28] I. F. Krasichkov. " Closed ideals in locally convex algebras of entire functions. Algebras of minimal type". Siberian Math. J. 9 (1968) pp. 59-71.

[29] B. Ja. Levin. " Distribution of zeros of entire functions". Traslations of Mathematical monographs, 5. Rhode Island, 1964.

[30] S. Mandelbrojt. " Séries adherentes, régularisation des suites, applications ". Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[31] B. Malgrange. " Ideals of differentiable functions ". Publications of the Tata Institute, Bombay, 1966.

[32] P. Malliavin. " Calcul symbolique et sous-algèbres de $L_1(G)$". Bull. Soc. Math. France, 87 (1959) pp. 181-186.

[33] A. Martineau. " Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borek". J. d'Analyse Math. 9 (1963) pp. 1-144.

[34] E. Michael. " Locally multiplicatively-convex topological algebras". Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[35] B. S. Mityagin. " An inde finitely differentiable function with the values of its derivatives given at a point". Doklady Akademii Nauk SSSR 138 (1961) pp. 289-292.

[36] J. Muñoz-J. M. Ortega. " Sobre las álgebras localmente convexas". Collectanea Mathematica, vol XX Fasc. 2º, 1969.

[37] M. Neymark. " On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions". Ark. Math. 7 (1969) pp. 577-594.

[38] P. K. Rasevskii. " Closed ideals in a countably normed algebra of analytic entire functions". Sov. Math. Dokl. 6, 715-719, 1965.

[39] C. Roumieu. " Ultradistributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables". J. d'Analyse Math. Jerusalem VolX (62/63) pp. 153-192.

[40] C. Roumieu. " Sur quelques extensions de la notion de distribution". Annal. Sc. Ecole Norm. Sup. Paris (1960) pp. 47-121.

[41] L. Rubel-B. A. Taylor. " A Fourier series method for meromorphic and entire functions". Bull. Soc. Math. France 96 (1968) pp. 53-96.

[42] W. Rudin. " Real and complex analysis". Mc Graw-Hill series in higher mathematics, New York, 1970.

[43] W. Rudin. " Division in algebras of infinitely differentiable functions". Journal of Math. and Mech. 11, 5 (1962) pp. 797-809.

[44] L. Schwartz. " Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques". Ann. Math. 48 (1947) pp. 857-929.

[45] B. A. Taylor. " Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions". Commun. Pure Appl. Math. 24 (1971), 39-51.

[46] B. A. Taylor. " A seminorm topology for some (DF)-spaces of entire functions". Duke J. Math. 38 (1971) 379-385.

[47] B. A. Taylor. " Some locally convex spaces of entire functions". Proc. Symp. Pure Math. 11. Entire functions and related parts of analysis, Amer. Math. Soc. 1968

[48] F. Treves. " Topological vector spaces, distributions and kernels". Academic Press, New York 1967 .

[49] H. Whitney. " On ideals of differentiable functions ". Amer. J. Math. 70 (1948) pp. 635-658.

[50] W. Zelazko. " Metric generalizations of Banach algebras ". Rozprawy Matematyzne, Vol. 47 . PWN- Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1965.