

## 1. INTRODUCCION.

### (1.1) El problema de n cuerpos.

En el espacio euclideo de dimensión tres se considera el movimiento de  $n$  puntos materiales  $M_1, M_2, \dots, M_n$  de masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , sometidos tan solo a las fuerzas de gravitación newtoniana que se ejercen mutuamente. Si  $x_k$  denota el vector posición del punto  $M_k$ , para  $k = 1 \div n$ , las ecuaciones diferenciales del movimiento en un sistema de referencia galileano son:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq k}} m_l \frac{x_l - x_k}{|x_l - x_k|^3}, \quad k = 1 \div n,$$

donde  $|x_l - x_k|$  es la distancia euclidea entre el punto  $M_l$  y el  $M_k$ . El problema de  $n$  cuerpos consiste en estudiar las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales.

Desde un punto de vista físico éste es un modelo idealizado. Por un lado los cuerpos celestes no son puntuales, y por el otro las fuerzas en juego pueden ser de otro tipo distinto al newtoniano.

Este problema fué formulado por primera vez hacia 1687, año de la publicación de los "Principia" de Newton. Durante los tres siglos que han pasado desde entonces ha servido de piedra de toque a generaciones sucesivas de matemáticos, poniendo a prueba sus nuevos métodos.

Aunque las soluciones de este problema se conocen para  $n=2$ , se sabe muy poco para  $n \geq 3$ . Es por esto que el problema de 3 cuerpos es objeto de un gran número de simplificaciones. Así se estudian los problemas restringidos de 3 cuerpos; esto es, los problemas en que una de las masas es infinitesimal de manera que su influen-

cía sobre las otras dos es despreciable. Por lo tanto, el movimiento de estas es el de un problema de 2 cuerpos, y el problema restringido de 3 cuerpos consiste en describir el movimiento del cuerpo de masa infinitesimal.

### (1.2) Evoluciones finales del problema de 3 cuerpos.

Los métodos cuantitativos, ya sean analíticos o numéricos, empleados en el estudio de sistemas diferenciales no integrables, no dan generalmente información suficientemente precisa fuera de un intervalo de tiempo finito a excepción de las órbitas periódicas. Por el contrario, los métodos cualitativos se esfuerzan en obtener resultados precisos, aunque sean parciales.

En el problema de  $n$  cuerpos los métodos cualitativos dan resultados muy fructíferos en el estudio de las evoluciones finales, en especial para el problema de 3 cuerpos.

Se llama evolución final de un movimiento en el problema de 3 cuerpos, al comportamiento de los 3 cuerpos cuando el tiempo tiende a  $+\infty$  ó a  $-\infty$ .

El conocimiento de la evolución final, dado un estado del sistema, tiene interés para poder determinar la estabilidad del mismo, o la edad y proceso de formación, etc.

El estudio de las evoluciones finales se remonta a Chazy [8, 9, 10], quién en 1922 da una clasificación de las posibles evoluciones finales para el problema de 3 cuerpos. Su trabajo ha sido el punto de partida para el estudio de las evoluciones finales.

Si designamos mediante  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ , respectivamente, a las distancias de  $M_2$  a  $M_3$ , de  $M_3$  a  $M_1$  y de  $M_1$  a  $M_2$ , Chazy clasificó las evoluciones finales del problema de 3 cuerpos cuando  $t \rightarrow \infty$  en siete tipos:

1) Movimiento hiperbólico (H) en que las distancias mutuas  $r_i$  son de la forma  $O(t)$ .

2) Movimiento hiperbólico-parabólico ( $HP_i$ ). El cuerpo  $i$  se aleja hiperbólicamente de los otros dos, y éstos se encuentran en movimiento parabólico; esto es:  $r_j = O(t)$  para  $j \neq i$ , y  $r_i = O(t^{2/3})$ .

3) Movimiento parabólico (P) en que  $r_i = O(t^{2/3})$  para todo  $i$ .

4) Movimiento hiperbólico-elíptico ( $HE_i$ ). Análogo a  $HP_i$  pero encontrándose los dos cuerpos restantes en movimiento elíptico; esto es,  $r_j = O(t)$  para  $j \neq i$ , y  $r_i$  permanece acotado.

5) Movimiento parabólico-elíptico ( $PE_i$ ). El cuerpo  $i$  se aleja parabólicamente de los otros dos, y éstos se encuentran en movimiento elíptico; esto es,  $r_j = O(t^{2/3})$  para  $j \neq i$ , y  $r_i$  permanece acotado.

6) Movimiento oscilatorio ( $OS_i$ ), en que  $r_i$  permanece acotado, y para  $j \neq i$ ,  $r_j$  toma valores tan grandes como se quiera, sin tender a infinito. Esto es,

$$\overline{\lim}_{j \neq i} \sup(r_j) = +\infty, \quad \underline{\lim}_{j \neq i} \sup(r_j) < +\infty.$$

7) Movimiento estable en el sentido de Lagrange (L), cuando  $r_j$  permanece acotado para todo  $i$ .

El tipo de movimiento final oscilatorio es quizá el más sorprendente, y su estudio será básicamente el objetivo de este trabajo. Un ejemplo de evolución final oscilatoria corresponde a dos cuerpos en movimiento casi kepleriano del uno respecto del otro (\*). Y el tercer cuerpo oscila, pasando de un entorno de los dos primeros a distancias de los mismos no acotadas. Movimientos finales tanto o más sorprendentes que éstos son las expansiones superhiperbólicas, pero éstas se dan en movimientos de cuatro o más cuerpos [20], [18].

Chazy al dar su clasificación no tenía ningún ejemplo de movimiento oscilatorio. El primer ejemplo fué dado por Sitnikov [30] en 1959. Ultimamente en 1977, Marchal [19] dió un segundo ejemplo de movimiento oscilatorio en las velocidades en lugar de las posiciones.

Las definiciones que se han dado para los siete tipos de evolución final cuando  $t \rightarrow +\infty$ , se extienden de manera natural al caso en que  $t \rightarrow -\infty$ . Al tener en cuenta los dos casos se introduce una subdivisión de los movimientos según el infinito de tiempo que se considere. Por ejemplo,  $H^-$  designará un movimiento de tipo hiperbólico para  $t \rightarrow -\infty$ .

Chazy creía que las evoluciones finales para una misma órbita del problema de 3 cuerpos eran idénticas para  $t \rightarrow -\infty$  y para  $t \rightarrow +\infty$ . Ha sido demostrado después, y aquí se darán ejemplos, de que esto no es cierto. Por lo tanto, hay que considerar todos los casos posibles de evolución final para  $t \rightarrow -\infty$  y  $t \rightarrow +\infty$ . Así, por ejemplo, se denota por  $HE_i^- \cap L^+$  a una órbita en que la evolución final es hiperbólica-elíptica cuando  $t \rightarrow -\infty$  y lagrangiana cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

La existencia de movimientos para todos los casos de evolución final teniendo en cuenta las dos evoluciones extremas era un problema abierto. El estudio del problema de Sitnikov hecho por Alekseev [1]-

(\*) El problema de 2 cuerpos se reduce al problema de Kepler; y es por esto que al hacer referencia a su movimiento, se habla a menudo del movimiento kepleriano.

[2] en 1968-1970, lo ha resuelto, probando la existencia de movimientos para todos los tipos de evolución final de los que no se tenían ejemplos. Estos eran:

- 1) Captura parcial:  $H^- \cap HE_j^+$ .
- 2) Captura completa:  $HE_i^- \cap L^+$ .
- 3) Cambio:  $HE_i^- \cap HE_j^+$ .
- 4) Desintegración parcial:  $L^- \cap HE_i^+$  (simétrico del 2) ).
- 5) Desintegración completa:  $HE_j^- \cap H^+$  (simétrico del 1) ).
- 6) Todos los tipos de evolución final en los que aparece el comportamiento oscilatorio  $OS^-$  u  $OS^+$ , como  $HE_i^- \cap OS_i^+$ , etc.

### (1.3) El problema de Sitnikov.

Se tienen dos masas puntuales e iguales,  $m_1$  y  $m_2$ , moviéndose según la ley de la gravitación de Newton en órbitas elípticas con su centro de masas en reposo. Se considera una tercera masa puntual e infinitesimal  $m_3$ , moviéndose sobre la recta  $R$  perpendicular al plano determinado por las trayectorias de los dos primeros cuerpos en su centro de masas (véase la figura 1.1). El movimiento de las dos primeras masas no está afectado por la tercera y la simetría de la situación nos dice que la tercera masa permanece sobre la recta considerada. Sitnikov demostró [30] que bajo ciertas condiciones iniciales cuando  $t \rightarrow +\infty$ , la distancia entre las dos primeras masas y la tercera no está acotada, y no tiende a infinito.

La demostración que dió Sitnikov de su movimiento pone tan sólo de manifiesto la naturaleza oscilatoria de la evolución final. Alekseev, hizo un estudio mucho más rico del movimiento de Sitnikov dentro de un contexto más general, no limitándose al caso  $m_1 = m_2$ ,  $m_3 = 0$ ; sino que demostró que el comportamiento oscilatorio sigue dándose cuando  $m_1 \neq m_2$ , y  $m_3 > 0$ . La idea esencial de Alekseev consiste en asociar a cada órbita una sucesión de enteros. La generalidad de los resultados obtenidos le permitieron demostrar no tan sólo la existencia de movimientos oscilatorios sino probar,

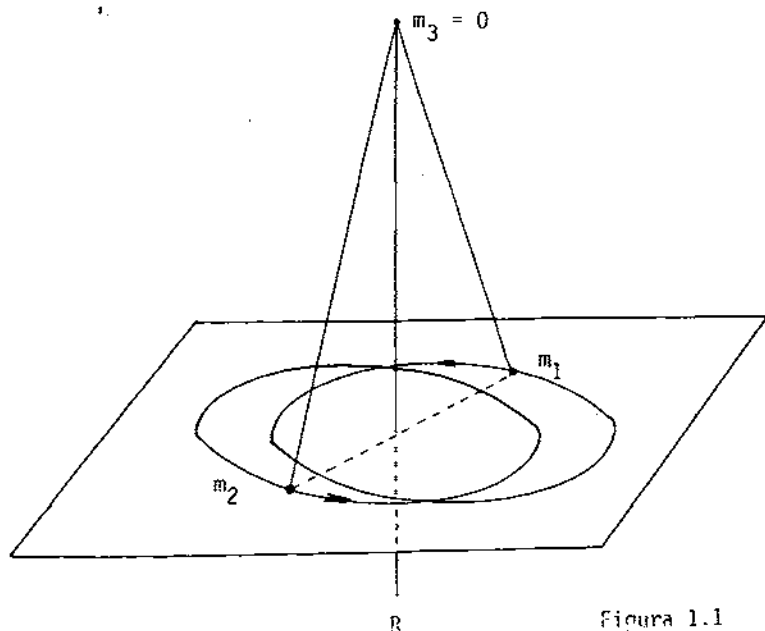


Figura 1.1

por un lado la existencia de todos los tipos de evolución final del problema de 3 cuerpos (como se ha especificado en la sección (1.2)) y por otro, poner en evidencia la noción de movimiento quasialeatorio, muy sorprendente y fecunda.

La idea de caracterizar las órbitas por una sucesión de enteros tiene una larga historia. Hadamard, Birkhoff [5]-[6], Morse y Hedlund [29] las introdujeron en el estudio de las geodésicas sobre las superficies de curvatura negativa. Cartwright, Littlewood y Levinson [14] las consideran en el caso de circuitos eléctricos que satisfacen ecuaciones de Van der Pol periódicamente excitadas. Estas son dos situaciones en las que la solución tiene que pasar por unos valores una infinidad de veces en el tiempo, obteniendo así una descripción de la solución mediante una sucesión de enteros 0 ó 1. Esta técnica se conoce con el nombre de dinámica simbólica (véase [23]). Más recientemente Smale [28] ha dado una interpretación geométrica de esta idea con la introducción del llamado difeomorfismo de la herradura y usando el shift de Bernoulli, Moser [24] en 1970-73 dió una nueva exposición, más simplificada, del estudio del movimiento hecho por Alekseev.

La sucesión de enteros  $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$  que Alekseev asocia a cada órbita del tercer cuerpo, es aquella en que  $a_n$  mide el número de vueltas enteras que han dado  $m_1$  y  $m_2$ , entre el paso número  $n$  y el paso siguiente de  $m_3$  por el plano del movimiento. El resultado principal se puede expresar así:

Teorema A: *Dada una excentricidad  $e > 0$  suficientemente pequeña para el movimiento elíptico de  $m_1$  y  $m_2$ , existe un entero  $a = a(e)$  tal que, cualquier sucesión de enteros  $(a_n)$  con  $a_n \geq a$ , corresponde a una órbita del tercer cuerpo.*

Se observa que los términos  $a_n$  de la sucesión se pueden elegir arbitrariamente, con la única restricción de que sean mayores que  $a$ .

#### (1.4) Movimientos quasi-aleatorios.

Los llamados movimientos quasi-aleatorios son fenómenos que se dan en ciertos problemas de la mecánica. Presentamos a continuación dos ejemplos ilustrativos. En ambos la sensibilidad de la solución respecto de las condiciones iniciales es tal, que el conocimiento de la misma para ciertas condiciones iniciales no permite deducir lo que pasará en unas condiciones próximas. Este hecho se pone de manifiesto en:

a) El problema de Sitnikov. A partir de un tiempo determinado, se observa el número de vueltas que dan  $m_1$  y  $m_2$  entre dos pasos consecutivos del tercer cuerpo por el plano del movimiento. Aunque se hagan tantas observaciones como se quiera nunca podrá llegarse a decir cual será el número de vueltas en la siguiente observación.

b) En ciertos problemas de la mecánica hay partículas que pueden estar animadas de movimientos tan irregulares que su órbita es densa en todo el espacio donde ellas se mueven, o en ciertas regiones de este espacio. La descripción de este fenómeno necesita recurrir a procedimientos estadísticos, y para su estudio se introducen nociones como las de ergodicidad y de "mixing". Para más detalles véase Arnold-Avez [3], y Hénon [13].

La noción de movimiento quasi-aleatorio que se estudiará es la del primer tipo, que rigurosamente se define de la siguiente manera: Un movimiento es quasi-aleatorio si el sistema dinámico que define tiene el shift de Bernoulli como subsistema. Para una interpretación física véase la exposición de Ornstein en [25].

Que el shift de Bernoulli sea un subsistema del problema de Sitnikov puede dar la impresión de que la aparición de éste como subsistema sea un fenómeno relativamente raro. De hecho, lo contrario es lo cierto (véase [11]).

### (1.5) Resultados principales.

Hasta ahora se conocen en el problema de 3 cuerpos dos ejemplos de movimientos quasi-aleatorios, debidos a Sitnikov y a Marchal. De hecho, este último ha estudiado un comportamiento de tipo oscilatorio en las velocidades de los 3 cuerpos en lugar de las posiciones, sin detallar la inclusión del shift de Bernoulli como subsistema.

En esta memoria se estudian dos nuevos ejemplos de movimientos quasi-aleatorios en el problema de 3 cuerpos.

a) El problema restringido, elíptico y rectilíneo de 3 cuerpos en el que dos masas  $m_1$  y  $m_2$  van colisionando elípticamente en el tiempo. Una tercera masa infinitesimal,  $m_3$ , se mueve sobre la recta determinada por la órbita de las otras dos (véase la figura 1.2), sometida a la atracción gravitatoria de aquellas.

b) El problema restringido, circular y plano de 3 cuerpos en el que dos masas  $m_1$  y  $m_2$  recorren circunferencias alrededor del centro de masas común. Una tercera masa infinitesimal,  $m_3$ , se mueve sobre el plano determinado por la órbita de las otras dos, bajo su atracción gravitatoria.

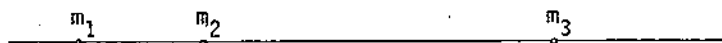


Figura 1.2

Como en todo problema restringido de 3 cuerpos, en ambos, se estudia el movimiento de la masa infinitesimal. En el problema a) el espacio de fases o espacio de posiciones y velocidades tiene dimensión 2 al igual que el problema de Sitnikov. Por lo tanto, las técnicas desarrolladas por Moser para probar la existencia de movimientos quasi-aleatorios pueden aplicarse a este caso. No obstante, res-



pecto del de Sitnikov, este problema tiene la dificultad adicional de tener singularidades debidas a colisiones binarias y triples.

En el problema b) el espacio de fases tiene dimensión 4. La existencia de una integral primera reduce el problema a un espacio de dimensión 3 donde las técnicas de Moser para dimensión 2 no son aplicables. Por este motivo, se generalizan a dimensión 3.

Para ambos problemas se demuestran teoremas análogos al teorema A. Así, para el problema a) se asocia a cada órbita la sucesión de enteros  $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ , donde  $a_n$  mide el número de colisiones de  $m_1$  y  $m_2$ , entre las colisiones número  $n$  y  $n+1$  de  $m_2$  y  $m_3$ . Entonces se puede enunciar:

Teorema B: Si la masa  $m_1$  es suficientemente pequeña, existe un entero  $a = a(m_1)$  tal que, cualquier sucesión de enteros  $(a_n)$  con  $a_n \geq a$  corresponde a una órbita del tercer cuerpo.

Para el problema b) se asocia a cada órbita la sucesión de enteros  $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ , donde  $a_n$  mide el número de vueltas enteras que han dado  $m_1$  y  $m_2$ , entre el paso número  $n$  y el paso siguiente de  $m_3$  por una semirrecta fija situada en el plano del movimiento, y cuyo extremo está en el centro de masas.

Teorema C: Para cualquier valor de  $m_1$  y  $m_2$  positivos, existe un entero  $a = a(m_1, m_2)$  tal que cualquier sucesión de enteros  $(a_n)$  con  $a_n \geq a$  corresponde a una órbita del tercer cuerpo.

Estos teoremas permitirán establecer la existencia de todos los tipos posibles de evolución final en el problema respectivo.

Como se verá tanto para el problema a) como para el b), el conjunto de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) constituye la variedad invariante estable (inestable) de una órbita periódica parabólica en el infinito. El hecho de que estas varie-

dades se corten pero no coincidan, pone de manifiesto la existencia de puntos homoclínicos. La definición de punto homoclínico y una breve historia de este concepto se encuentra en el libro de Moser [24, pag.99-107] y en el artículo [22] de McGehee y Meyer.

Los puntos homoclínicos corresponden a órbitas parabólicas para  $t \rightarrow \pm\infty$ . El estudio cualitativo del flujo en el <sup>externo</sup> sistema de estos puntos es la clave para la demostración de los teoremas B y C.

En los capítulos II y III se estudia el problema a), mientras que el estudio del problema b) se hace en el capítulo IV.

En el apéndice I se demuestra, para el problema restringido, plano y circular de 3 cuerpos, que el conjunto de las órbitas con evolución final del tipo  $PE^- \cap HE^+$  y  $HE^- \cap PE^+$  es homeomorfo a una reunión numerable de intervalos abiertos, que  $PE^-$  y  $PE^+$  es homeomorfo a  $S^1$  y que  $HE^-$  y  $HE^+$  es homeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

En el apéndice II se generalizan los resultados del apéndice I al problema restringido, espacial y circular de 3 cuerpos. En el apéndice III se detalla un cálculo numérico necesario para el teorema 4.2.

Agradezco al Dr. Carles Simó su eficaz dirección y valiosa ayuda en la realización del presente trabajo. Mi agradecimiento para los restantes miembros de la Sección de Matemáticas por su constante interés en la buena marcha de este trabajo.

## II. EL PROBLEMA RESTRINGIDO RECTILINEO Y ELIPTICO DE 3 CUERPOS.

### (2.1) Formulación del problema.

Se tienen dos cuerpos (llamados primarios) de masa puntual  $m_1$  y  $m_2$ , moviéndose según la ley de la gravitación de Newton en una órbita de colisión elíptica. Se considera un tercer cuerpo de masa infinitesimal y puntual  $m_3$ , moviéndose sobre la recta determinada por el movimiento de los dos primarios, dejándolos a un mismo lado de la recta. Como que  $m_3 \approx 0$ , admitimos que el movimiento de las dos primeras masas no es afectado por la tercera, y la simetría del problema nos dice que la tercera masa permanece sobre la recta considerada. El problema consiste en describir el movimiento del cuerpo de masa infinitesimal.

### (2.2) La ecuación diferencial del movimiento.

Para simplificar la notación se elige la unidad de longitud de manera que la constante de la gravitación sea 1; la unidad de tiempo de modo que el período de la colisión elíptica valga  $2\pi$ ; la unidad de masa de manera que la masa total del sistema sea 1; esto es,  $m_1 = m$  y  $m_2 = 1-m$ , con  $0 < m < 1$ . El centro de masas se toma como origen de coordenadas.

Sean  $-x_1$ ,  $x_2$  y  $x$  las coordenadas que dan las posiciones de las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  respectivamente (véase la figura 2.1), y  $t$  el parámetro tiempo. Se tienen:

$$x_1 = (1-m)(1-\cos E),$$

$$x_2 = m(1-\cos E),$$

con

$$t = E - \sin E;$$

donde el parámetro  $E$  es la anomalía excéntrica. Se ha tomado el eje de

la órbita elíptica de colisión igual a 2, y el origen del tiempo de manera que las colisiones entre  $m_1$  y  $m_2$  tengan lugar cuando el tiempo  $t$  sea tal que  $t = 0(\text{mód. } 2\pi)$ .

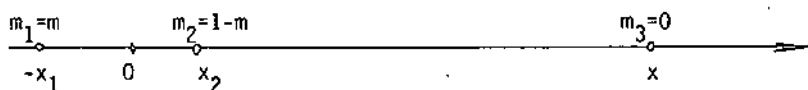


Figura 2.1

La ecuación diferencial del movimiento del tercer cuerpo es:

$$d^2x/dt^2 = -(1-m)/(x-x_2)^2 - m/(x+x_1)^2. \quad (2.1)$$

Esta ecuación diferencial presenta dos singularidades, una para los valores de  $x = x_2$ , y la otra cuando  $x = x_1 = x_2 = 0$ . La primera corresponde a una colisión binaria entre las masas  $m_2$  y  $m_3$ ; y la segunda una colisión triple. Se hará un cambio de variables que regularice las colisiones binarias. Como se sabe las colisiones triples colineales no pueden en general regularizarse. Por ello, se excluyen de nuestro espacio de configuración las órbitas que conducen a colisión triple. Por consiguiente, la variable tomará siempre valores acotados inferiormente si  $m > 0$ .

Como es habitual, se define la energía  $h_{123}$  del sistema de la siguiente manera:

$$h_{123} = \dot{x}^2/2 - (1-m)/(x-x_2) - m/(x+x_1),$$

y la energía  $h_{23}$  del sistema formado por el segundo y el tercer cuerpo como:

$$h_{23} = (\dot{x}-\dot{x}_2)^2/2 - (1-m)/(x-x_2).$$

Por ser el sistema no autónomo, la energía  $h_{123}$  no es una integral primera. Se define una nueva variable  $h$  como:

$$h = (x^r - x_2^r)h_{123}/x^r - x_2^r h_{23}/x^r, \quad (2.2)$$

con  $r \geq 1$ .

Es claro que sobre cada órbita solución de la ecuación (2.1)  $h$  está definido, ya que cuando  $x - x_2 \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow h_{23}$ . En efecto como que  $(x-x_2)\dot{x}^2 + 2(1-m)$  cuando  $x-x_2 \rightarrow 0$  (véase Siegel-Moser [29-p30]), resulta que  $(x-x_2)h_{123} \rightarrow 0$  cuando  $x-x_2 \rightarrow 0$ . Nótese que,  $r \geq 1$  es condición necesaria y suficiente para que  $h$  esté bien definido. Además,  $h \rightarrow h_{123}$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

Si se hace el cambio

$$dt = (x-x_2)(1-\cos E) ds, \quad (2.3)$$

el sistema diferencial (2.1) puede escribirse:

$$\frac{dx}{ds} = \left\{ \frac{x_2^r \dot{x}_2}{x^r} + \left[ \left( \frac{x_2^r \dot{x}_2}{x^r} \right)^2 + 2 \left( \frac{x^r - x_2^r}{x^r} \frac{m}{x+x_1} + \frac{1-m}{x-x_2} + h - \frac{x_2^r \dot{x}_2^2}{2x^r} \right) \right]^{1/2} \right\} \frac{dt}{ds},$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{x^r - x_2^r}{x^r} \frac{dh_{123}}{ds} + \frac{x_2^r}{x^r} \frac{dh_{23}}{ds} - (h_{23} - h_{123}) \frac{d}{ds} \left( \frac{x_2^r}{x^r} \right), \quad (2.4)$$

$$\frac{dt}{ds} = (x-x_2)(1-\cos E),$$

siendo:

$$dh_{123}/ds = (m\dot{x}_1/(x+x_1)^2 - (1-m)\dot{x}_2/(x-x_2)^2) \cdot dt/ds,$$

$$dh_{23}/ds = (\dot{x} - \dot{x}_2)(-m/(x+x_1)^2 - \ddot{x}_2) \cdot dt/ds,$$

$$d/ds (x_2/x)^r = r x_2^{r-1} (\dot{x}_2 x - x_2 \dot{x}) / x^{r+1} \cdot dt/ds,$$

$$h_{23} - h_{123} = -\dot{x}\dot{x}_2 - \dot{x}_2^2/2 - m/(x+x_1),$$

$$\dot{x}_1 = (1-m)\sin E / (1-\cos E),$$

$$\dot{x}_2 = m \sin E / (1-\cos E),$$

$$\ddot{x}_1 = -(1-m)/(1-\cos E)^2,$$

$$\ddot{x}_2 = -m/(1-\cos E)^2.$$

Se observa que es suficiente tomar  $r = 1$  para que  $dx/ds$  y  $x^{-r} \cdot (x^r - x_2^r) dh_{123}/ds$  no presenten singularidades. Mientras que, el mínimo valor de  $r$  que elimina las singularidades de las expresiones:

$$x_2^r/x^r \cdot dh_{23}/ds , \\ (h_{23} - h_{123})d/ds(x_2/x)^r ,$$

es 2 y 3 respectivamente. Por consiguiente, el valor mínimo de  $r$  que regulariza el sistema diferencial (2.4) es 3. A partir de ahora  $r$  será 3.

El cambio dado por (2.3) regulariza las colisiones binarias tal como se observa en (2.4). La idea de esta regularización se debe a Levi-Civita (véase Stieffel-Scheifell [31 -p20]).

### (2.3) Las órbitas como punto de un cilindro.

Las órbitas  $x(s)$  del tercer cuerpo quedan determinadas por las condiciones iniciales:

$$s = s_0 , \quad (x - x_2)(s_0) = 0 , \quad h(s_0) = h_0 , \quad t(s_0) = t_0 ;$$

tal como se deduce del sistema diferencial (2.4). Como que el tiempo en dicho sistema aparece siempre a través de la variable  $E$ , dar unas condiciones iniciales en las que  $t$  sea igual a  $t_0$ , equivale a dar  $t = t_0 (\text{mód. } 2\pi)$ . El valor de  $s = s_0$  es arbitrario para la determinación del movimiento físico del tercer cuerpo; tomaremos  $s_0 = 0$ . En definitiva, una órbita del tercer cuerpo puede darse con las condiciones iniciales

$$h(0) = h_0 , \quad y \quad t(0) = t_0 (\text{mód. } 2\pi) ;$$

sobre entendiendo las restantes condiciones  $(x - x_2)(0) = 0$ , y que  $t_0 \neq 0 (\text{mód. } 2\pi)$ , ya que si  $t_0$  es múltiplo de  $2\pi$  habría una colisión triple.

A partir de ahora como que el tiempo  $t$  se puede poner en función de la anomalía excéntrica  $E$ , una órbita del tercer cuerpo vendrá dada por

$$h(E_0) = h_0 , \quad y \quad E = E_0 (\text{mód. } 2\pi) .$$

Identificando la órbita del tercer cuerpo dada por  $(h_0, E_0)$  con el punto del cilindro que en coordenadas cilíndricas tiene altura  $h_0$  y ángulo  $E_0$  (véase la figura 2.2), se puede enunciar la siguiente:

Proposición 2.1: Las órbitas del tercer cuerpo se corresponden con los puntos de un cilindro, al que le falta una generatriz. Dicha generatriz correspondería a una condiciones iniciales de colisión triple. Nótese que a una misma órbita le puede corresponder más de un punto del cilindro.

A partir de ahora siempre que se hable del cilindro se supondrá que se le ha suprimido la generatriz  $E_0 = 0$ .

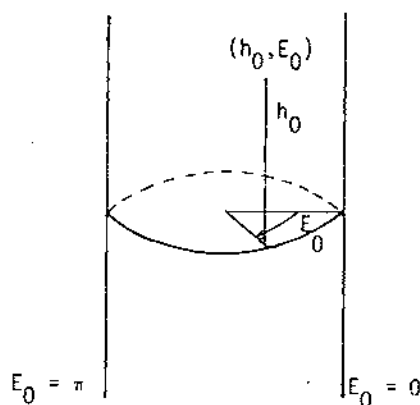


Figura 2.2

#### (2.4) El cilindro para $m = 0$ .

Para  $m = 0$  el problema restringido rectilíneo y elíptico de tres cuerpos da lugar a dos problemas de 2 cuerpos independientes con un cuerpo de masa igual a la unidad situado en el origen de coordenadas, y los otros de masa infinitesimal colisionando con él, uno por la derecha y el otro por la izquierda. Para  $m = 0$  la energía  $h = h_{123} = h_{23}$  es constante para cada órbita, y las soluciones tales que para un cierto  $E_0$  verifican  $(x-x_2)(E_0) = 0$ , corresponden a órbitas de colisión elíptica, parabólica, hiperbólica, según que la energía  $h$  sea negativa, nula o positiva. Por lo tanto, se tiene:

Proposición 2.2: Para  $m = 0$  el cilindro de las órbitas del tercer cuerpo queda partido por la circunferencia  $h_0 = 0$  en dos regiones, la que corresponden a las órbitas elípticas ( $h_0 < 0$ ) y la que corresponde a las hiperbólicas ( $h_0 > 0$ ). La circunferencia  $h_0 = 0$  corresponde a las órbitas parabólicas (véase la figura 2.3).

Se verá que una situación análoga a la establecida en esta proposición para  $m = 0$ , será también para valores de  $0 < m < 1$ .

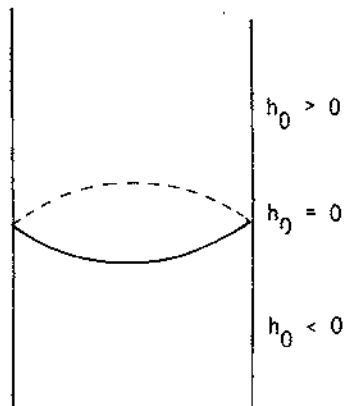


Figura 2.3

#### (2.5) El cilindro para $0 < m < 1$ , y la aplicación $f$ .

Se define una aplicación  $f$  de una región del cilindro en sí mismo de la siguiente manera: Dado un punto  $(h_0, E_0)$  del cilindro y por lo tanto la órbita  $x(E)$  del tercer cuerpo tal que  $(x-x_2)(E) = 0$ , y  $h(E_0) = h_0$ ; sea  $E_1$  el siguiente cero de  $(x-x_2)(E) = 0$  con  $E_1 > E_0$ , si existe; esto es si  $E_1 < +\infty$ . En este caso, si  $h_1 = h(E_1)$ , la aplicación  $f$  envía por definición  $(h_0, E_0)$  a  $(h_1, E_1)$ .

Se denota por  $D_0$  el dominio de definición de la aplicación  $f$ . Así,  $D_0$  representa el conjunto de las órbitas del tercer cuerpo que vuelven a colisionar con el segundo. Por lo tanto, se dirá que las órbitas de  $D_0$  son elípticas para tiempos crecientes. Nótese que  $E$



crece o decrece con el tiempo  $t$ . De la continuidad de las soluciones de una ecuación diferencial respecto de las condiciones iniciales se obtiene que  $D_0$  es un abierto.

Se estudia el complementario de  $D_0$ . Sea  $x(t)$  una solución que verifica  $(x-x_2)(t_0) = 0$ , y  $t_1 = +\infty$ , siendo  $t_k = E_k - \text{sen} E_k$  para  $k = 0, 1$ . Ya que  $\ddot{x}(t) < 0$  para todo  $t > t_0$ , la función  $\dot{x}(t) > 0$  es monótona decreciente. Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \dot{x}(+\infty),$$

existe y es mayor o igual que cero. Además como que  $x(t)$  es monótona creciente para todo  $t > t_0$ , se tiene que  $x(t) \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Se dice que una órbita del complementario de  $D_0$  es hiperbólica para  $t \rightarrow +\infty$  si  $\dot{x}(+\infty) > 0$ , y parabólica para  $t \rightarrow +\infty$  si  $\dot{x}(+\infty) = 0$ . El conjunto de puntos del cilindro que da lugar a órbitas parabólicas (hiperbólicas) para  $t \rightarrow +\infty$  se designa por  $P_0$  ( $H_0$ ). Por la continuidad de las soluciones de una ecuación diferencial respecto de las condiciones iniciales se tiene  $H_0$  es un abierto.

Teorema 2.1: El conjunto  $P_0$  de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  es una curva cerrada y simple (si al cilindro no le faltase una generatriz), que separa el cilindro en dos componentes; una formada por las órbitas elípticas  $D_0$ , y la otra por las hiperbólicas  $H_0$ .

La demostración de este teorema se dará en la sección (2.7).

## (2.6) Estudio del movimiento en el entorno del infinito

Es de esperar por la definición del conjunto  $P_0$  que éste de alguna manera separe las órbitas que se escapan al infinito de las que no llegan a escaparse. Por lo tanto, conviene estudiar el movimiento del tercer cuerpo cerca del infinito, y para ello se hace el cambio de coordenadas

$$x = 2/q^2, \quad \dot{x} = -p, \quad dt = 4/q^3 \cdot dw,$$

con  $0 < q < +\infty$ . Ahora  $q \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Este cambio de coordenadas se debe a McGehee [21]. Lo utiliza para probar que el conjunto de condiciones iniciales que da lugar a órbitas parabólicas, en ciertos problemas restringidos de 3 cuerpos diferentes al nuestro, tiene estructura de variedad analítica.

En las nuevas variables la ecuación diferencial a que da lugar el movimiento del tercer cuerpo, toma la forma:

$$\begin{aligned} dq/dw &= p, \\ dp/dw &= [(1-m)/(1-q^2 x_2/2)^2 + m/(1+q^2 x_1/2)^2]q, \\ dt/dw &= 4/q^3. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Basta limitarse al recinto  $\{(q,p,t) \in \mathbb{R}^3 \mid q > 0\}$ .

Si en el espacio  $(q,p,t)$  se fija  $t$  el punto  $q = 0$ ,  $p = 0$ , que corresponde a una órbita parabólica, es un punto hiperbólico del sistema diferencial (2.5), ya que su parte lineal

$$\begin{aligned} dq/dw &= p, \\ dp/dw &= q, \end{aligned}$$

tiene los valores propios  $\pm 1$ , y como direcciones propias las bisectrices de los ejes de coordenadas (véase la figura 2.4).

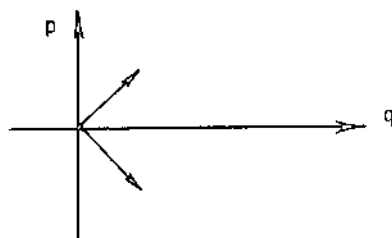


Figura 2.4

Las funciones  $x_1$  y  $x_2$  son  $2\pi$ -periódicas en  $t$ ; por consiguiente, en el espacio  $(q,p,t)$  la órbita  $q = 0$ ,  $p = 0$ , es  $2\pi$ -periódica. No puede usarse directamente el teorema de la variedad estable o de Hartman [12 - p245-246] para probar la existencia de dos variedades invariantes que pasan por  $q = 0$ ,  $p = 0$ , una estable y la otra inestable, debido a que la parte lineal del sistema (2.5) es nula. McGehee en [21] nos garantiza la existencia de dichas variedades invariantes.

La invariancia del sistema diferencial (2.5) respecto de la simetría  $(q,p,t,w) \rightarrow (q,-p,-t,-w)$  hace que si una variedad invariante tiene por ecuación

$$q = F(p,t) ,$$

la ecuación de la otra sea

$$q = F(-p,-t) .$$

No es difícil verificar que

$$F(p,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)p^n , \quad (2.6)$$

con

$$a_0(t) = a_2(t) = a_3(t) = a_4(t) = a_6(t) = 0 ,$$

$$a_1(t) = 1 ,$$

$$a_5(t) = -5m(1-m)/16 ,$$

$$a_7(t) = 35m(1-m)(1-2m)/128 ,$$

$$a_8(t) = -3m(1-m)(-5t/2 + \int_0^t (1-\cos E)^2 dt)/16 ,$$

...

Los cálculos se hacen desarrollando en serie de Fourier los coeficientes  $a_n(t)$ , derivando respecto de  $t$  la ecuación  $q = F(p,t)$ , y substituyendo en dicha ecuación  $\dot{q}$  y  $\dot{p}$  por su expresión en serie de potencias de  $p$ , obtenida a partir del sistema diferencial (2.5). Así se tiene un sistema diferencial con infinitas ecuaciones  $\dot{a}_n(t) = f_n(t)$ , cuya resolución se puede obtener por recurrencia.

Nótese que la función  $q = F(p,t)$  no es analítica en  $t$ .

Se hace un cambio de coordenadas que lleve las direcciones propias del punto hiperbólico a los ejes de coordenadas:

$$u = (q - F(-p,-t))/4 = (q + p)/4 + O_9 ,$$

$$v = (q - F(p,t))/4 = (q - p)/4 + O_9 .$$

Aquí  $O_n$  significa para una función  $f(q,p,t)$  de clase  $C^\infty$  en  $(q,p)$ , y  $2\pi$ -periódica en  $t$ , que la cantidad

$$f(kq, kp, t)/k^n,$$

está uniformemente acotada en  $t$  cuando  $k \rightarrow 0$  para valores de  $k$  positivos.

En las nuevas coordenadas el sistema diferencial es

$$\begin{aligned} du/dr &= u + O_9, \\ dv/dr &= -v + O_9, \\ dt/dr &= 1/[2(u+v)^3 + O_{11}], \end{aligned} \quad (2.7)$$

sobre el recinto  $\{(u,v,t) \mid q = 2(u+v) + O_9 > 0\}$ .

Si se elimina la variable  $r$ , el sistema diferencial toma la forma

$$\begin{aligned} u &= 2u(u+v)^3 + O_{12}, \\ v &= -2v(u+v)^3 + O_{12}, \end{aligned}$$

en el recinto  $\{(u,v) \mid q = 2(u+v) + O_9 > 0\}$ .

Lema 2.1: El sistema diferencial

$$\begin{aligned} u &= 2u(u+v)^3, \\ v &= -2v(u+v)^3, \end{aligned}$$

en el recinto  $R = \{(u,v) \in R^2 \mid u+v > 0\}$ , es tal que:

(i) La familia de curvas  $uv = C$  de  $R$ , es una integral primera del sistema.

(ii) Su flujo es el dado por la figura 2.5, donde el sentido de avance se corresponde con el del tiempo.

(iii) El flujo en el segundo (cuarto) cuadrante tiende a la frontera de  $R$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ).

La demostración de este lema no ofrece ninguna dificultad.

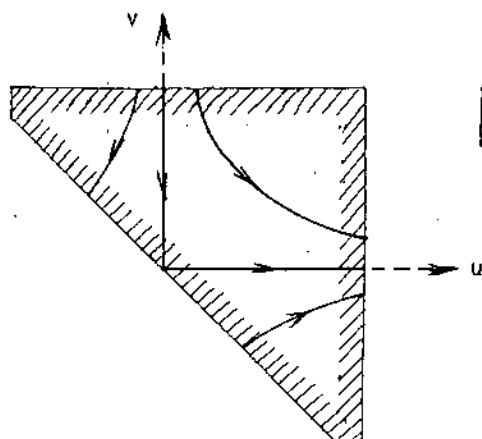


Figura 2.5

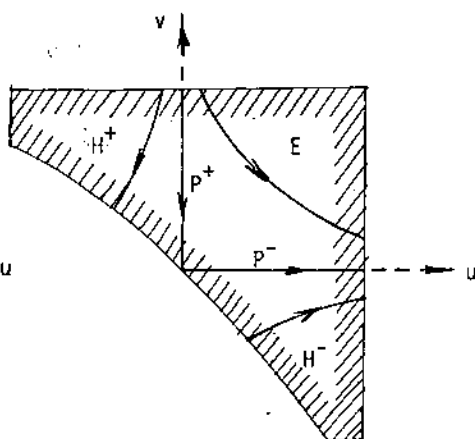


Figura 2.6

El lema 2.1 da el estudio del sistema diferencial (2.7) en el entorno del punto  $u = 0$ ,  $v = 0$ . Así, en el segundo cuadrante el flujo tiende a la frontera  $q = 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Además, como que  $u = (q+p)/4 + O_9 < 0$ , se tiene que  $p$  tiende a un valor negativo o 0 cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Por lo tanto, como que  $x = 2/q^2$ , y  $\dot{x} = -p$ , para los puntos del conjunto  $\{(u,v) \mid u < 0, v > 0, q > 0\}$  se tiene que  $x(+\infty) = 0$ , y  $\dot{x}(+\infty) > 0$ . Es decir, corresponden a órbitas hiperbólicas para  $t \rightarrow +\infty$ . Por otro lado, los puntos del conjunto  $\{(u,v) \mid u = 0, v > 0\}$  son tales que  $x(+\infty) = 0$ , y  $\dot{x}(+\infty) = 0$ . Por lo tanto, corresponden a órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$ . De este modo se puede hacer un estudio completo de la naturaleza de las órbitas del tercer cuerpo en el entorno del infinito obteniéndose la figura 2.6.

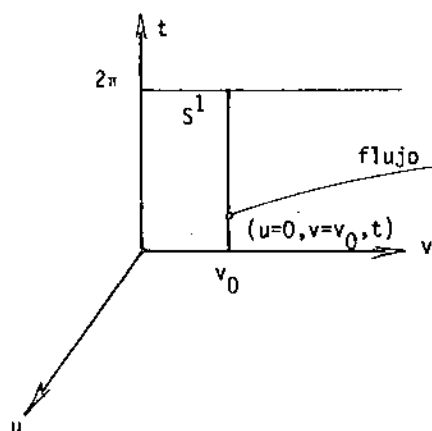


Figura 2.7

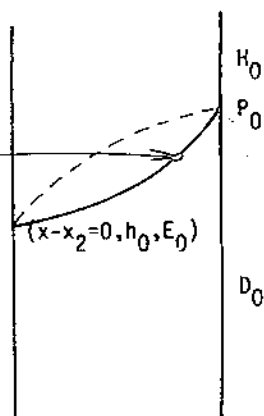


Figura 2.8

### (2.7) Demostración del teorema 2.1.

Se quiere demostrar que las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  corresponden a una curva cerrada y simple (si al cilindro no le faltase una generatriz), que separa el cilindro en dos componentes, una formada por las órbitas elípticas y la otra por las hiperbólicas.

Según la sección anterior las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  vienen dadas en un entorno del infinito por el conjunto  $\{(u, v, t) \mid u = 0, v > 0\}$ . Por ser  $t$  una variable angular, la intersección de este conjunto con el plano  $v = v_0 > 0$ , siendo  $v_0$  suficientemente pequeño, da lugar a una curva cerrada y simple (véase la figura 2.7). Esta intersección es transversal; en caso contrario  $\dot{v} = 0$  en el plano  $v = v_0$ , y la órbita parabólica no podría alcanzar el infinito. La intersección de cualquier órbita con el cilindro  $x - x_2 = 0$  tiene localmente un único punto de contacto. Por lo tanto, la aplicación

$$(u = 0, v = v_0, t) \rightarrow (x - x_2 = 0, h_0, E_0),$$

definida por el flujo cuando el tiempo decrece está bien definida. El teorema de unicidad y de dependencia de las condiciones iniciales para las soluciones de ecuaciones diferenciales nos dice que es un difeomorfismo, y

que  $(u=0, v=v_0, t+2\pi)$  se aplica en  $(x-x_2=0, h_0, E_0+2\pi)$ . Por lo tanto, la familia de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  es un cilindro que corta al cilindro  $x-x_2=0$ , en una curva cerrada y simple (véase la figura 2.8).

Sea  $h_0 = g(E_0, m)$  la ecuación de la curva  $P_0$ . Veamos que existe la derivada

$$\left. \frac{\partial g}{\partial E_0} \right|_{E_0=\pi} \quad (2.8)$$

para valores de  $m$  suficientemente pequeños. En efecto, sea  $\tau$  la variable que parametriza a la circunferencia  $S^1 = \{(u, v, t) \mid u=0, v=v_0\}$ . Por ser diferenciable el flujo que lleva  $S^1$  a  $P_0$ ; resulta que la curva  $h_0 = g(E_0, m)$  es diferenciable respecto de  $\tau$ . Además dicha curva es analítica respecto de  $m$ , y como que para  $m=0$ , es la circunferencia  $h_0=0$ ; se tiene que existe la derivada (2.8) para valores de  $m$  suficientemente pequeños.

## (2.8) La aplicación $f^{-1}$ .

Dado un punto  $(h_0, E_0)$  del cilindro, y por lo tanto la órbita  $x(E)$  del tercer cuerpo tal que  $(x-x_2)(E_0)=0$ , y  $h(E_0)=h_0$ , se define  $E_{-1}$  como el cero de  $(x-x_2)(E)=0$  más próximo a  $E_0$  con  $E_{-1} < E_0$ , si existe, esto es si  $E_{-1} > -\infty$ . En este caso, si  $h_{-1} = h(E_{-1})$ , es claro que  $f^{-1}(h_0, E_0) = (h_{-1}, E_{-1})$ . Si  $D_1$  es el dominio de definición de  $f^{-1}$ , se tiene que  $D_1 = f(D_0)$ . Como que  $D_1$  es el conjunto de las órbitas del tercer cuerpo que han colisionado anteriormente con el segundo, se dice que las órbitas de  $D_1$  son elípticas para tiempos decrecientes.

Un estudio similar al realizado en la sección (2.5) para la aplicación  $f$  nos diría ahora para la aplicación  $f^{-1}$  que las órbitas  $x(t)$  del complementario de  $D_1$  son tales que

$$\dot{x}(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{x}(t) \geq 0$$

Por lo tanto, una órbita del complementario de  $D_1$  es hiperbólica para  $t \rightarrow -\infty$ , si  $\dot{x}(-\infty) > 0$ , y parabólica para  $t \rightarrow -\infty$ , si  $\dot{x}(-\infty) = 0$ . El conjunto de puntos del cilindro que da lugar a órbitas hiperbólicas (parabólicas) para  $t \rightarrow -\infty$  se designa por  $H_1$  ( $P_1$ ).

Teorema 2.2: El conjunto  $P_1$  de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow -\infty$  corresponde a una curva cerrada y simple (si al cilindro no le falta-se una generatriz), que separa el cilindro en dos componentes, una formada por las órbitas elípticas  $D_1$ , y la otra por las hiperbólicas  $H_1$ .

La demostración es simétrica a la dada para el teorema 2.1.

Para determinar el dominio de  $f^{-1}$  se observa que el sistema diferencial (2.1) es invariante por la simetría  $(x, \dot{x}, t) \rightarrow (x, -\dot{x}, -t)$ , y por consiguiente

$$x(-t; -\dot{x}_0, -t_0) = x(t; \dot{x}_0, t_0).$$

Así, si  $S$  es la simetría sobre el cilindro dada por  $(h_0, E_0) \rightarrow (h_0, 2\pi - E_0)$  se tiene que  $f^{-1} = S^{-1} \cdot f \cdot S$ , y por lo tanto  $D_1 = S(D_0)$ ,  $P_1 = S(P_0)$ ,  $H_1 = S(H_0)$ .

## (2.9) Un resultado fundamental para la existencia de movimientos quasi-aleatorios.

El teorema siguiente nos dirá que si la masa  $m$  es suficientemente pequeña, entonces  $D_1 \neq D_0$ , y este hecho, como se verá, es fundamental para que aparezcan movimientos quasi-aleatorios. Para  $m = 0$ , esto no pasa, es decir  $D_1 = D_0$ . En efecto, la aplicación  $f$  para  $m = 0$ , es:

$$f(h_0, E_0) = (h_1, E_1), \quad (2.9)$$

con

$$h_1 = h_0,$$

$$E_1 = E_0 + E(2\pi(-2h_0)^{-3/2}),$$

siendo  $E(t)$  la solución de la ecuación  $t = E - \text{sen} E$ .



La aplicación  $f$  está definida tan sólo para valores de  $h_0 < 0$  ya que para valores de  $h_0 \geq 0$  las órbitas son de escape. Por lo tanto, el dominio de definición de  $f$ ,  $D_0$ , es en este caso medio cilindro (véase la figura 2.3), y como que  $h_1 = h_0$ , resulta que  $D_1 = f(D_0) = D_0$ .

Teorema 2.3: Si la masa  $m > 0$  del primer cuerpo es suficientemente pequeña, las curvas  $P_0$  y  $P_1$  se cortan no tangencialmente sobre la generatriz  $E_0 = \pi$  del cilindro.

La ecuación de la curva  $P_0$  es  $h_0 = g(E_0, m)$ . Como que  $P_1 = S(P_0)$ , la curva  $P_1$  viene dada por  $h_0 = g(2\pi - E_0, m)$ . Por lo tanto, ambas curvas se cortan en  $E_0 = \pi$ . Para ver que no lo hacen tangencialmente basta con probar que la derivada (2.8) es distinta de cero.

Se demostrará que

$$\left. \frac{\partial^2 g}{\partial E_0^2 \partial m} \right|_{\substack{m=0 \\ E_0=\pi}} > 0, \quad (2.10)$$

y por consiguiente se tendrá para valores de  $m$  suficientemente pequeños que

$$\left. \frac{\partial g}{\partial E_0} \right|_{E_0=\pi} \neq 0. \quad (2.11)$$

De hecho como  $g$  es una función real y analítica en  $m$  se sigue que la desigualdad (2.11) dejará de ser cierta a lo sumo en un conjunto discreto de  $0 \leq m < \epsilon$ , con  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

Se considera la integral de

$$\frac{dh}{ds}(s; s_0, E_0, m),$$

a lo largo de la órbita parabólica  $x(s; s_0, E_0, m)$  para  $t \rightarrow +\infty$ , determinada por las condiciones iniciales  $(x - x_2)(s_0) = 0$ , y  $h(s_0) = g(E_0, m)$ , siendo  $s_0 = 0$ . Esto es:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dh}{ds}(s; E_0, m) ds.$$

Esta integral es convergente como se deduce de (2.4) ; y su valor es :

$$h(+\infty) - h(0) = -g(E_0, m) . \quad (2.12)$$

Sean las funciones

$$\begin{aligned} J_1 &= m(1-m) \operatorname{sen} E \left[ (x-x_2)^2 / (x+x_1)^2 - 1 \right] / x , \\ J_2 &= m^2(1-m) \operatorname{sen} E (1-\cos E) \left[ (x-x_2)^2 / (x+x_1)^2 - 1 \right] / x^2 , \\ J_3 &= m^3(1-m) \operatorname{sen} E (1-\cos E)^2 \left[ (x-x_2)^2 / (x+x_1)^2 - 1 \right] / x^3 , \\ J_4 &= m^4(1-\cos E)^2 (x-x_2)(\dot{x}-\dot{x}_2) \left[ 1 - (1-\cos E)^2 / (x+x_1)^2 \right] / x^3 , \\ J_5 &= -3m^4 \operatorname{sen}^2 E (1-\cos E)(x-x_2)^2(\dot{x}-\dot{x}_2) / x^4 , \\ J_6 &= -3m^5 \operatorname{sen}^3 E (x-x_2)^2 / 2x^4 , \\ J_7 &= 3m^4 \operatorname{sen} E (1-\cos E)^2 (x-x_2)^2 / x^4 (x+x_1) , \\ J_8 &= 3m^4 \operatorname{sen} E (1-\cos E)^3 (x-x_2)(\dot{x}-\dot{x}_2)^2 / x^4 , \\ J_9 &= 3m^5 \operatorname{sen}^2 E (1-\cos E)^2 (x-x_2)(\dot{x}-\dot{x}_2) / 2x^4 , \\ J_{10} &= -3m^4 (1-\cos E)^4 (x-x_2)(\dot{x}-\dot{x}_2) / x^4 (x+x_1) . \end{aligned}$$

De (2.4) resulta que

$$\frac{dh}{ds}(s; E_0, m) = \sum_{1 \leq i \leq 10} J_i .$$

Por consiguiente, si se define

$$I_i = \int_0^\infty J_i ds , \quad \text{para } i = 1 \div 10 ;$$

se tiene

$$\int_0^\infty \frac{dh}{ds}(s; E_0, m) ds = \sum_{1 \leq i \leq 10} I_i . \quad (2.13)$$

Es claro que  $J_i = J_i(s; E_0, m)$  , y  $I_i = I_i(E_0, m)$  .

Para cada  $i$  ,  $i = 1 \div 10$  , se descompone la integral  $I_i$  en dos :

$$I_i = I_i^0 + I_i^\infty ,$$

siendo

$$I_i^0 = \int_0^{\bar{s}} J_i ds , \quad y \quad I_i^\infty = \int_{\bar{s}}^{\infty} J_i ds .$$

La integral  $I_i^0$  corresponde a la integral de  $J_i$  en un entorno de  $s = 0$ ; esto es, en un entorno de la colisión binaria de  $m_2$  y  $m_3$ .

Sea  $F$  una función de las variables  $x$  y  $m$ . Se dice que  $F$  es de orden  $\alpha$  en  $m$  y se escribe  $O(F) = \alpha$ , si existen funciones acotadas  $G(x)$ , y  $H(x,m)$  tales que

$$F(x,m) = G(x)m^\alpha + H(x,m)m^\beta ,$$

con  $\alpha < \beta$ .

Lema 2.2: Si  $E_0$  está próximo a  $\pi$ , en el entorno de  $s = 0$ , se tiene:

$$(i) \quad x - x_2 = 2s^2 + O(\bar{h}s^4) + O(ms^2) ,$$

$$\text{siendo } \bar{h} = (\dot{x} - \dot{x}_2)^2 / 2 - (1-m) / (x - x_2) .$$

$$(ii) \quad \dot{x} - \dot{x}_2 = s^{-1} + O(\bar{h}s) + O(ms^{-1}) .$$

$$(iii) \quad E = E_0 + 2s^3/3 + O(\bar{h}s^5) + O(ms^3) .$$

$$(iv) \quad \text{sen} E = \text{sen} E_0 + 2\text{sen} E_0 \cdot s^3/3 + O(s^6) + O(\bar{h}s^5) + O(ms^3) .$$

$$(v) \quad 1 - \cos E = 1 - \cos E_0 + 2\text{sen} E_0 \cdot s^3/3 + O(s^6) + O(\bar{h}s^5) + O(ms^3) .$$

$$(vi) \quad (x - x_2)^2 / (x + x_1)^2 - 1 = -1 + s^4 + O(\bar{h}s^6) + O(ms^4) .$$

$$(vii) \quad 1 - (1 - \cos E)^2 / (x + x_1)^2 = (1 + \cos E_0) - (1 + \cos E_0)^2/4 + O(m) + O(s^2) .$$

Demostración: (i) En las nuevas variables  $u, v$  definidas mediante las igualdades

$$u^2 = x - x_2 ,$$

$$dt = u^2 dv = u^2 (1 - \cos E) ds ,$$

la ecuación diferencial del movimiento (2.1) se puede escribir como

$$u'' - \bar{h}u/2 = mu^3 \{-[u^2 + (1 - \cos E)]^{-2} + (1 - \cos E)^{-2}\} / 2 , \quad (2.14)$$

siendo

$$\bar{h} = \begin{cases} \frac{2u'^2 - (1-m)}{u^2} & \text{si } u \neq 0, \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u'^2 - (1-m)}{u^2} & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

Y este límite existe puesto que es la energía entre los cuerpos  $m_2$  y  $m_3$  en el instante en que colisionan. Se ha introducido la siguiente notación

$$u'' = \frac{d^2 u}{dv^2}, \quad \text{y} \quad u' = \frac{du}{dv}.$$

Integrando (2.14) por el método de Euler con las condiciones iniciales  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = [(1-m)/2]^{1/2}$  (si  $m = 0$ , la órbita que determinan estas condiciones iniciales es parabólica), se obtiene

$$u(v) = 2^{-1/2}v + O(\bar{h}v^3) + O(mv). \quad (2.15)$$

Deshaciendo los cambios (2.15) nos da (i). Donde se ha aproximado  $1 - \cos E_0$  por 2, ya que  $E_0$  está tan próximo a  $\pi$  como se quiera.

(ii) De (i) y de (2.3) resulta que

$$t = 4s^3/3 + \dots$$

Por consiguiente, (ii) se obtiene al derivar (i) respecto de  $t$ .

(iii) De la integral  $\int_0^s (x-x_2) ds = \int_{E_0}^E dE$ ,

y de (i), se deduce (iii).

(iv) Se considera

$$\sin E = \sin E_0 \cos(E-E_0) + \cos E_0 \sin(E-E_0),$$

y de (iii), resulta (iv).

(v) Es claro que

$$1 - \cos E = 1 - \cos E_0 \cos(E-E_0) + \sin E_0 \sin(E-E_0),$$

y de (iii), se obtiene (v).

(vi) De (i) y de las igualdades

$$\begin{aligned}x_1 &= (1-m)(1-\cos E), \\x_2 &= m(1-\cos E),\end{aligned}\tag{2.16}$$

se tiene (vi) .

(vii) De (i) , (v) y de (2.16) , resulta (vii) .

//

Lema 2.3: Si la masa  $m$  y  $E_0 - \pi$  son suficientemente pequeños, y  $\bar{s} = O(m^{1/4})$  , se tiene :

$$\begin{aligned}(i) \quad O(I_1^0) &= O(I_2^0) = O(I_3^0) = O(I_8^0) = 1/2, \\O(I_{10}^0) &= 1, \\O(I_4^0) &= O(I_5^0) = O(I_9^0) = 2, \\O(I_7^0) &= 5/2, \\O(I_6^0) &= 7/2.\end{aligned}$$

$$(ii) \quad \int_0^\infty (A_1 + A_2 + A_3 + A_8) ds = 0,$$

siendo  $A_i$  el término dominante de  $J_i$  , en el intervalo  $(0, \bar{s})$  ; esto es, el término de orden más pequeño en  $m$  .

$$(iii) \quad O(I_i^\infty) \geq O(I_i^0), \text{ para } i = 1 \div 10.$$

$$\begin{aligned}(iv) \quad O(I_1^0 - \int_0^{\bar{s}} A_1 ds) &> 1, \\O(I_i^0 - \int_0^{\bar{s}} A_i ds) &= 2, \text{ para } i = 2, 3, 8.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(v) \quad O(I_1^\infty - \int_{\bar{s}}^\infty A_1 ds) &= 1, \\O(I_i^\infty - \int_{\bar{s}}^\infty A_i ds) &> 1, \text{ para } i = 2, 3, 8.\end{aligned}$$

$$(vi) \quad O\left(\sum_{1 \leq i \leq 10} I_i\right) = O\left(I_1^\infty - \int_{\bar{s}}^\infty A_i ds + I_{10}^0\right) = 1.$$

Demostración: (i) En virtud del lema 2.2, siendo las integrales  $I_1^0$  sólo se tienen en cuenta los términos dominantes en  $m$  se tiene:

$$I_1^0 = - \frac{m \operatorname{sen} E_0}{2} \int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{m+s^2},$$

$$I_2^0 = \frac{m^2 \operatorname{sen} E_0}{2} \int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{(m+s^2)^2},$$

$$I_3^0 = - \frac{m^3 \operatorname{sen} E_0}{2} \int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{(m+s^2)^3},$$

$$I_4^0 = m^4 K(E_0) \int_0^{\bar{s}} \frac{s ds}{(m+s^2)^3},$$

$$I_5^0 = - \frac{3m^4 \operatorname{sen}^2 E_0}{2} \int_0^{\bar{s}} \frac{s^3 ds}{(m+s^2)^4},$$

$$I_6^0 = - \frac{3m^5 \operatorname{sen}^3 E_0}{2} \int_0^{\bar{s}} \frac{s^4 ds}{(m+s^2)^4},$$

$$I_7^0 = \frac{3m^4 \operatorname{sen} E_0}{2} \int_0^{\bar{s}} \frac{s^4 ds}{(m+s^2)^4},$$

$$I_8^0 = 3m^4 \operatorname{sen} E_0 \int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{(m+s^2)^4},$$

$$I_9^0 = \frac{3m^5 \operatorname{sen}^2 E_0}{4} \int_0^{\bar{s}} \frac{s ds}{(m+s^2)^4},$$

$$I_{10}^0 = - 3m^4 \int_0^{\bar{s}} \frac{s ds}{(m+s^2)^4}.$$

siendo

$$K(E_0) = (1 + \cos E_0) - (1 + \cos E_0)^2 / 4.$$

Si se hace el cambio

$$s = m^{1/2} t, \quad \bar{s} = m^{-1/2} \bar{t}, \quad (2.17)$$

resulta que

$$\begin{aligned}
I_1^0 &= - \frac{m^{1/2} \text{sen} E_0}{2} \int_0^{\bar{t}} \frac{dt}{1+t^2} = O(m^{1/2}) , \\
I_2^0 &= - \frac{m^{1/2} \text{sen} E_0}{2} \int_0^{\bar{t}} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = O(m^{1/2}) , \\
I_3^0 &= - \frac{m^{1/2} \text{sen} E_0}{2} \int_0^{\bar{t}} \frac{dt}{(1+t^2)^3} = O(m^{1/2}) , \\
I_4^0 &= m^2 K(E_0) \int_0^{\bar{t}} \frac{t dt}{(1+t^2)^3} = O(m^2) , \\
I_5^0 &= - \frac{3m^2 \text{sen}^2 E_0}{2} \int_0^{\bar{t}} \frac{t^3 dt}{(1+t^2)^4} = O(m^2) , \\
I_6^0 &= - \frac{3m^{7/2} \text{sen}^3 E_0}{8} \int_0^{\bar{t}} \frac{t^4 dt}{(1+t^2)^4} = O(m^{7/2}) , \\
I_7^0 &= \frac{3m^{5/2} \text{sen} E_0}{2} \int_0^{\bar{t}} \frac{t^4 dt}{(1+t^2)^4} = O(m^{5/2}) , \\
I_8^0 &= 3m^{1/2} \text{sen} E_0 \int_0^{\bar{t}} \frac{dt}{(1+t^2)^4} = O(m^{1/2}) , \\
I_9^0 &= \frac{3m^2 \text{sen}^2 E_0}{4} \int_0^{\bar{t}} \frac{t dt}{(1+t^2)^4} = O(m^2) , \\
I_{10}^0 &= - 3m \int_0^{\bar{t}} \frac{t dt}{(1+t^2)^2} = O(m) .
\end{aligned}$$

(ii) Se tiene que la integral

$$\int_0^{\infty} (A_1 + A_2 + A_3 + A_8) ds$$

es igual a

$$\frac{m^{1/2} \text{sen} E_0}{2} \int_0^{\infty} \left( -\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{6}{(1+t^2)^4} \right) dt = 0 ,$$

como era de esperar debido a la analiticidad respecto de  $m$ .

(iii) Se deduce sin dificultad de (i) y de la definición de  $J_i$ .

(iv) Sea  $B_i = I_i^0 - \int_0^{\bar{s}} A_i ds$ , para  $i = 1, 2, 3, 8$ . Del lema 2.2.

resulta que

$$O(B_1) = O\left(-\frac{m \cos E_0}{3} \int_0^{\bar{s}} \frac{s^3 ds}{m+s^2}\right),$$

y haciendo el cambio (2.17),

$$\begin{aligned} O(B_1) &= O\left(m^2 \int_0^{\bar{t}} \frac{t^3 dt}{1+t^2}\right) = O\left(m^2 [\bar{t}^2 - \ln(1+\bar{t}^2)]\right) \\ &= O(m^2 \bar{t}^2) > 1. \end{aligned}$$

Analogamente, se tiene

$$O(B_2) = O\left(m^2 \int_0^{\bar{t}} \frac{t^3 dt}{(1+t^2)^2}\right) = 2,$$

$$O(B_3) = O\left(m^2 \int_0^{\bar{t}} \frac{t^3 dt}{(1+t^2)^3}\right) = 2,$$

$$O(B_8) = O\left(m^2 \int_0^{\bar{t}} \frac{t^3 dt}{(1+t^2)^4}\right) = 2.$$

(v) Se tiene

$$\begin{aligned} O\left(I_1^\infty - \int_{\bar{s}}^\infty A_1 ds\right) &= \int_{\bar{s}}^\infty \left[ m(1-m) \operatorname{sen} E \left( \frac{(x-x_2)^2}{(x+x_1)^2} - 1 \right) \frac{1}{x} + \frac{m \operatorname{sen} E_0}{2(m+s^2)} \right] ds, \\ &= II_1 + II_2 + II_3 + II_4, \end{aligned}$$

siendo

$$II_1 = m \int_{\bar{s}}^1 \left( \frac{\operatorname{sen} E_0}{2(m+s^2)} - \frac{\operatorname{sen} E}{x} \right) ds,$$

$$II_2 = m \int_{\bar{s}}^1 \operatorname{sen} E \frac{(x-x_2)^2}{(x+x_1)^2 x} ds,$$



$$II_3 = m \int_1^\infty \left[ \frac{\sin E_0}{2(m+s^2)} + \frac{\sin E}{x} \left( \frac{(x-x_2)^2}{(x+x_1)^2} - 1 \right) \right] ds ,$$

$$II_4 = -m^2 \int_{\frac{1}{s}}^\infty \sin E \left( \frac{(x-x_2)^2}{(x+x_1)^2} - 1 \right) \frac{1}{x} ds .$$

Es claro que  $II_3 = O(m)$  y  $II_4 \geq O(m^{3/2})$ . Y utilizando el lema 2.2 se deduce sin dificultad que  $II_1$  y  $II_2$  son del orden de  $O(m)$ .

(vi) Es consecuencia inmediata de los apartados anteriores.

De (2.12), (2.13) y del lema 2.3, se tiene que

$$g(E_0, m) = - \left( I_1^\infty - \int_{\frac{1}{s}}^\infty A_1 ds + I_{10}^0 \right) + O(m^2) .$$

Como que

$$I_{10}^0 = (1 - \cos E_0)^4 O(m) + O(m^2) ,$$

resulta

$$\left. \frac{\partial^2 g}{\partial E_0 \partial m} \right|_{\substack{m=0 \\ E_0=\pi}} = - \left. \frac{\partial}{\partial E_0} \frac{\partial}{\partial m} \left( I_1^\infty - \int_{\frac{1}{s}}^\infty A_1 ds \right) \right|_{\substack{m=0 \\ E_0=\pi}} . \quad (2.18)$$

En la integral  $I_1^\infty$  se hace el cambio de variables  $(x-x_2)ds=dE$ , y se toma  $\frac{1}{s} = (3/2)^{1/3} \cdot m^{1/4}$ . Dado que  $E = E_0 + 2s^{3/2} + \dots$ , se tiene:

$$I_1^\infty = \int_{\bar{E}}^\infty m \sin E \frac{x-x_2}{x} \left[ (x+x_1)^{-2} - (x-x_2)^{-2} \right] dE + O(m^2) .$$

siendo  $\bar{E} = E_0 + m^{3/4}$ .

Para  $m = 0$ , la órbita parabólica del sistema (2.4) es

$$x(E; E_0, m) = (9/2)^{1/3} (E - \sin E - E_0 + \sin E_0)^{2/3} .$$

Por lo tanto, si  $m \neq 0$  resulta que

$$x(E; E_0, m) = (9/2)^{1/3} (E - \operatorname{sen} E - E_0 + \operatorname{sen} E_0)^{2/3} + O(\bar{h}) + O(m),$$

pero  $\bar{h} = O(m)$ , esto es :

$$x(E; E_0, m) = (9/2)^{1/3} (E - \operatorname{sen} E - E_0 + \operatorname{sen} E_0)^{2/3} + O(m), \quad (2.19)$$

sobre cualquier compacto  $[E_0, E']$  con  $E' > E_0$ , siempre que  $m$  sea suficientemente pequeño ( $m \leq m_0(E')$ ). Por consiguiente, en (2.18) se puede partir la integral sobre el intervalo  $[E_0 + m, \infty)$  en dos, la primera sobre  $[E_0 + m, E']$  y la segunda sobre  $[E', \infty)$ ; de manera que está última sea despreciable; esto es, del orden de  $O(m^\alpha)$  con  $\alpha > 1$ . En definitiva, se puede escribir:

$$I_1^\infty = \int_{E_0}^{E'} m \operatorname{sen} E \frac{x - x_2}{x} \left[ (x + x_1)^{-2} - (x - x_2)^{-2} \right] dE + O(m^\alpha), \quad (2.20)$$

y del lema 2.3, se tiene :

$$\int_s^\infty A_1 ds = \int_{E_0}^{E'} -m \frac{\operatorname{sen} E_0}{(x - x_2)^2} \frac{dE}{(m + s^2)} + O(m^\alpha). \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.19) en (2.20) y (2.21), y desarrollando en serie de potencias de  $m$ , y teniendo en cuenta que  $x_2 = O(m)$  y que  $x \geq O(m^{1/2})$ , resulta que

$$I_1^\infty - \int_s^\infty A_1 ds = C_1 + C_2 + O(m^\beta), \quad (2.22)$$

con  $\beta > 1$ , y

$$C_1 = m \int_{E_0}^{E'} \frac{\operatorname{sen} E \, dE}{[(9/2)^{1/3} (E - \operatorname{sen} E - E_0 + \operatorname{sen} E_0)^{2/3} + 1 - \cos E]^2},$$

$$C_2 = m \int_{E_0}^{E'} \frac{\operatorname{sen} E_0 - \operatorname{sen} E}{(9/2)^{2/3} (E - \operatorname{sen} E - E_0 + \operatorname{sen} E_0)^{4/3}} dE.$$

De (2.18) se obtiene :

$$\left. \frac{\partial^2 g}{\partial E_0 \partial m} \right|_{\substack{m=0 \\ E_0=\pi}} = D_1 + D_2,$$

siendo

$$D_i = - \frac{\partial^2 C_i}{\partial E_0 \partial m} \bigg|_{\substack{m=0 \\ E_0=\pi}} \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Veamos que  $D_1 > 0$ , y que  $D_2 > 0$  con lo que el teorema 2.3 estará demostrado.

Se tiene que

$$D_1 = -(32/3)^{1/3} (1 - \cos E_0) \int_{\bar{E}}^{E'} \frac{\sin E (E - \sin E - E_0 + \sin E_0)^{-1/3} dE}{[(9/2)^{1/3} (E - \sin E - E_0 + \sin E_0)^{2/3} + 1 - \cos E]^3} \bigg|_{E_0=\pi}$$

Para probar que  $D_1 > 0$  es suficiente ver que la integral

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin E dE}{[(9/2)^{1/3} (E - \sin E - \pi)^{2/3} + 1 - \cos E]^3 (E - \sin E - \pi)^{1/3}} < 0.$$

Haciendo el cambio  $z = E - \pi$ , se tendrá que demostrar que

$$\int_0^{\infty} F(z) dz > 0$$

siendo

$$F(z) = \frac{\sin z}{[(9/2)^{1/3} (z + \sin z)^{2/3} + 1 + \cos z]^3 (z + \sin z)^{1/3}}.$$

Si

$$\alpha_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} F(z) dz, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots,$$

se tiene que

$$D_1 = \sum_{k \geq 0} \alpha_k. \quad (2.23)$$

Veamos que esta serie es alternada; esto es  $\alpha_{2k} > 0$ ,  $\alpha_{2k+1} < 0$  y  $\alpha_{2k} > |\alpha_{2k+1}|$ . En efecto, si  $z_1 \in [k\pi, (k+1)\pi]$  y  $z_2 \in [(k+1)\pi, (k+2)\pi]$  y  $(z_1 + z_2) = (k+1)\pi$ , entonces

$$|F(z_1)| > |F(z_2)|, \quad (2.24)$$

ya que  $\operatorname{sen} z_1 = -\operatorname{sen} z_2$ ,  $\cos z_1 = \cos z_2$ , y  $z_1 + \operatorname{sen} z_1 \leq z_2 + \operatorname{sen} z_2$ ; puesto que la función  $z + \operatorname{sen} z$  es creciente.

De las figuras 2.9 ; 2.10 y de (2.24) se deduce que la serie (2.23) es alternada. Por consiguiente,  $D_1 > 0$ .

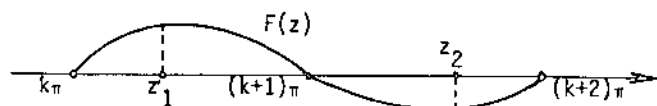


Figura 2.9 (k par)

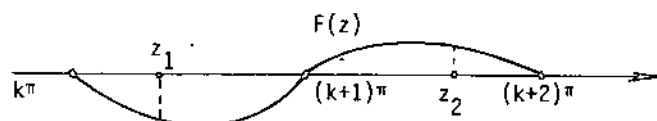


Figura 2.10 (k impar)

Por otro lado, se considera

$$D_2 = -(2/9)^{2/3} \frac{\partial}{\partial E_0} \int_{E_0 + m^{3/4}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} E_0 - \operatorname{sen} E}{(E - \operatorname{sen} E - E_0 + \operatorname{sen} E_0)^{4/3}} dE \Big|_{E_0 = \pi},$$

habiendo tomado  $\bar{s} = 0(m^{1/4})$  adecuado. Derivando bajo el signo de la integral resulta :

$$\begin{aligned} D_2 = & -(2/9)^{2/3} \left\{ \int_{E_0 + m^{3/4}}^{+\infty} \frac{\cos E_0 dE}{(E - \operatorname{sen} E - E_0 + \operatorname{sen} E_0)^{4/3}} \right. \\ & + \frac{4(1 - \cos E_0)}{3} \int_{E_0 + m^{3/4}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} E_0 - \operatorname{sen} E}{(E - \operatorname{sen} E - E_0 + \operatorname{sen} E_0)^{7/3}} dE \\ & \left. + \frac{\operatorname{sen}(E_0 + m^{3/4}) - \operatorname{sen} E_0}{(m^{3/4} - \operatorname{sen}(E_0 + m^{3/4}) + \operatorname{sen} E_0)^{4/3}} \right\} \Big|_{E_0 = \pi} \end{aligned}$$

Si se hace le cambio de coordenadas  $z = E - \pi$ , y se toma  $z_0 = m^{3/4}$ , se puede escribir :

$$D_2 = -(2/9)^{2/3} \left\{ \int_{z_0}^{+\infty} \frac{(5/3)\text{senz} - z}{(z + \text{senz})^{7/3}} dz - \frac{\text{senz}_0}{(z_0 + \text{senz}_0)^{4/3}} \right\}. \quad (2.25)$$

Sean

$$\delta_1 = \int_{5/3}^{+\infty} \frac{(5/3)\text{senz} - z}{(z + \text{senz})^{7/3}} dz,$$

$$\delta_2 = \int_{z_0}^{5/3} \frac{(5/3)\text{senz} - z}{(z + \text{senz})^{7/3}} dz - \frac{\text{senz}_0}{(z_0 + \text{senz}_0)^{4/3}}.$$

Como que  $(5/3)\text{senz} - z < 0$  si  $z > 5/3$ . Resulta que

$$\delta_1 < 0. \quad (2.26)$$

Se tiene que

$$\int_{z_0}^{5/3} \frac{z - (5/3)\text{senz}}{(z + \text{senz})^{7/3}} dz > \int_{z_0}^{5/3} \frac{-2z/3}{(2z)^{7/3}} dz = 2^{-4/3} [(3/5)^3 - z_0^{-1/3}].$$

Por consiguiente,

$$\delta_2 < 2^{-4/3} z_0^{-1/3} - 2^{-4/3} (3/5)^3 - \frac{z_0 - z_0^3/6}{(z_0 + \text{senz}_0)^{4/3}}.$$

Como que si  $m \rightarrow 0$  el segundo miembro de la desigualdad anterior tiende a  $-2^{-4/3}(3/5)^3$ , resulta de (2.26), que para  $m$  suficientemente pequeño:

$$\delta_1 + \delta_2 < -2^{-4/3}(3/5)^3. \quad (2.27)$$

Por lo tanto, de (2.25) y (2.27) se tiene :

$$D_2 > \frac{1}{125} \left| \frac{243}{4} \right|^{1/3}.$$

(2.10) Primeros resultados sobre las evoluciones finales en el problema restringido, rectilíneo y elíptico de 3 cuerpos.

En la sección (1.2) se han definido los distintos tipos de evolución final que se dan en el problema de 3 cuerpos. Así,  $HE^-$  corresponde al tipo de evolución final en que el tercer cuerpo viene del infinito hiperbolicamente. Con la notación de este capítulo resulta que  $HE^- = H_1$ . Analogamente, se tiene  $HE^+ = H_0$ ,  $PE^- = P_1$ , y  $PE^+ = P_0$ .

Sea  $p$  el punto de intersección de las curvas  $P_1$  y  $P_0$ , sobre la generatriz  $E_0 = \pi$  del cilindro. El teorema 2.3 nos dice que en un entrono de  $p$  hay evoluciones finales del tipo  $HE^- \cap HE^+$ ,  $HE^- \cap PE^+$ ,  $PE^- \cap HE^+$  y  $PE^- \cap PE^+$ . Claro está que si el entorno de  $p$  es suficientemente pequeño  $PE^- \cap PE^+$  se reduce al punto  $p$  (véase la figura 2.10).

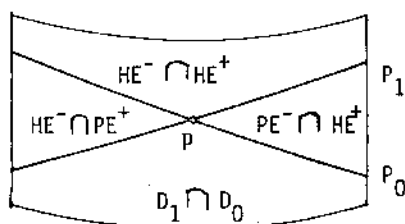


Figura 2.10

Para  $m = 0$ , los tipos de movimiento con evolución final  $HE^- \cap PE^+$  y  $PE^- \cap HE^+$  no se dan, puesto que  $P_1 = P_2$ .

El objeto del siguiente capítulo es estudiar la región  $D_1 \cap D_0$  en el entorno de  $p$ , y probar que en dicha región hay movimientos con evolución final oscilatoria.

### III. EL SHIFT DE BERNOULLI.

#### (3.1) Los resultados principales.

Se asociará a cada órbita del tercer cuerpo del problema expuesto en el capítulo anterior una sucesión de enteros. Si para  $t = t_0$  y  $(x-x_2)(t_0)=0$ , se consideran todos los ceros,  $t_n, (x-x_2)(t)$  ordenados:  $t_n < t_{n+1}$ . Se pueden dar los cuatro casos siguientes:

- (a) Que exista  $t_n$  para todo entero  $n$ .
- (b) Que exista  $t_n$  para todo entero  $n$  positivo, pero que para un cierto entero  $k < 0$ ,  $t_k$  ya no exista. Entonces se toma  $t_k = -\infty$ .
- (c) Que exista  $t_n$  para todo entero  $n$  negativo, pero que para un cierto entero  $l > 0$ ,  $t_l$  ya no exista. Entonces se toma  $t_l = +\infty$ .
- (d) Que  $t_k$  ya no exista para un cierto entero  $k < 0$ , y que para un cierto entero  $l > 0$ ,  $t_l$  ya no exista. Entonces se toma  $t_k = -\infty$ , y  $t_l = +\infty$ .

Por lo tanto, los enteros

$$a_n = \left[ \frac{t_n - t_{n-1}}{2} \right]$$

miden el número de colisiones que se producen entre los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$ , entre dos colisiones consecutivas de  $m_2$  y  $m_3$ . Donde  $[x]$  es la parte entera de  $x$ , si  $x$  es real. De esta manera se asocia a cada órbita del tercer cuerpo una sucesión de enteros, que será de uno de los cuatro tipos siguientes:

$$( \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots )$$

con  $a_n \in \mathbb{N}$  para todo entero  $n$ .  $\mathbb{N}$  designa el conjunto de los números

naturales. Estas sucesiones corresponden a órbitas de  $m_3$  que van colisionando con  $m_2$  sin llegar a escaparse nunca.

$$(b) \quad (\infty, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$$

con  $k \leq 0$ , y  $a_n \in \mathbb{N}$  para todo entero  $n > k$ . Corresponden a órbitas capturadas del tercer cuerpo; es decir, el tercer cuerpo viene del infinito, y permanece colisionando con  $m_2$  indefinidamente.

$$(c) \quad (\dots, a_{l-2}, a_{l-1}, \infty)$$

con  $l \geq 1$ , y  $a_n \in \mathbb{N}$  para todo entero  $n < l$ . Corresponden a órbitas de escape del tercer cuerpo; esto es, el tercer cuerpo ha estado colisionando con  $m_2$ , pero en un instante determinado deja de hacerlo y se aleja hacia el infinito.

$$(d) \quad (\infty, a_{k+1}, \dots, a_{l-1}, \infty)$$

con  $k \leq 0$ ,  $l \geq 1$ , y  $a_n \in \mathbb{N}$  para todo entero  $n$  tal que  $k < n < l$ . Corresponden a órbitas capturadas que se escapan.

Es claro que para que estas sucesiones estén bien definidas es suficiente que  $t_n(\text{mód. } 2\pi) \neq 0$ . En caso contrario habría colisiones triples.

La tabla siguiente nos da los tipos de sucesiones que definen las órbitas de los conjuntos  $P_1$ ,  $P_0$ ,  $H_1$ ,  $H_0$ , y de sus intersecciones.

Los conjuntos	definen sucesiones	del tipo
$P_1$ y $H_1$	$(\infty, a_1, a_2, \dots)$ $(\infty, a_1, \dots, a_{l-1}, \infty)$ con $l \geq 1$	(b) y (d)
$P_0$ y $H_0$	$(\dots, a_{-1}, a_0, \infty)$ $(\infty, a_{k+1}, \dots, a_0, \infty)$ con $k \leq 0$	(c) y (d)
$P_1 \cap P_0$ , $P_1 \cap H_0$ $H_1 \cap P_0$ , $H_1 \cap H_0$	$(a_0, a_1) = (\infty, \infty)$	(d)

Tabla 3.1



Ahora ya se puede enunciar el resultado principal para el problema restringido, elíptico y rectilíneo de 3 cuerpos, que viene dado por el siguiente teorema;

**Teorema 3.1 (Teorema 8);** Si la masa  $m$  del primer cuerpo es suficientemente pequeña, existe un entero  $b = b(m)$  tal que cualquier sucesión de enteros  $\{b_n\}$  de uno de los cuatro tipos anteriores con  $b_n \geq b$ , corresponde a una órbita del tercer cuerpo.

Este teorema prueba directamente o por continuidad la existencia de todas las posibles evoluciones finales en el problema restringido, elíptico y rectilíneo de 3 cuerpos. Por ejemplo, las sucesiones del tipo (b) darán lugar a órbitas capturadas, y según que los términos de la sucesión estén o no acotados se tendrán para  $t \rightarrow \infty$  evoluciones finales del tipo  $L^+$  o  $OS^+$  respectivamente. En la tabla siguiente se detallan todas las evoluciones finales de este problema restringido.

Tipos de órbitas	evolución final a que pueden dar lugar
(a)	$L^- \cap L^+$ , $L^- \cap OS^+$ , $OS^- \cap L^+$ , $OS^- \cap OS^+$
(b)	$HE^- \cap L^+$ , $HE^- \cap OS^+$ , $PE^- \cap L^+$ , $PE^- \cap OS^+$
(c)	$L^- \cap HE^+$ , $L^- \cap PE^+$ , $OS^- \cap HE^+$ , $OS^- \cap PE^+$
(d)	$HE^- \cap HE^+$ , $HE^- \cap PE^+$ , $PE^- \cap HE^+$ , $PE^- \cap PE^+$

Tabla 3.2

Además se verá que todos estos tipos de movimiento tienen lugar en todo entorno del punto del punto  $p \in P_1 \cap P_0$ .

### (3.2) El shift de Bernoulli como aplicación topológica.

Hay muchas versiones del shift de Bernoulli: y aunque habitualmente se estudia como una aplicación de un espacio medible [3], aquí se utilizarán sus propiedades topológicas. La idea de estudiar el shift

como aplicación topológica se debe al difeomorfismo de la herradura introducido por Smale [27-28] .

Sea  $A$  el conjunto  $N \cup \{\infty\}$  donde  $N$  es el conjunto de los números naturales y  $\infty$  es un elemento arbitrario. Se dota a  $A$  de una estructura de conjunto totalmente ordenado definiendo  $a \leq b$ , si los dos son números naturales y como naturales  $a$  es más pequeño o igual que  $b$  o bien, si  $a \in A$  y  $b$  es  $\infty$ .

Sea  $S$  el conjunto que tiene por elementos las sucesiones de elementos de  $A$  del tipo:

- (a)  $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$  con  $a_n \neq \infty$  para todo entero  $n$ .
- (b)  $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$  con  $a_k = \infty$ ,  $k \leq 0$ , y  $a_n \neq \infty$  para todo entero  $n > k$ .
- (c)  $(\dots, a_{l-2}, a_{l-1}, a_l)$  con  $a_l = \infty$ ,  $l \geq 1$ , y  $a_n \neq \infty$  para todo entero  $n < l$ .
- (d)  $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{l-1}, a_l)$  con  $a_k = a_l = \infty$ ,  $k \leq 0$ ,  $l \geq 1$ , y  $a_n \neq \infty$  para todo entero  $n$  tal que  $k < n < l$ .

Para cada elemento  $a$  de  $S$  se tiene una colección  $\{U_j(a)\}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ ; de conjuntos de  $S$  definidos de la siguiente manera:

$$U_j(a) = \{ a' \in S \mid a'_n = a_n \text{ si } |n| < j \},$$

$$U_j(a) = \{ a' \in S \mid a'_n = a_n \text{ si } k < n \leq j, \text{ y } a'_k \geq j \},$$

$$U_j(a) = \{ a' \in S \mid a'_n = a_n \text{ si } -j \leq n < l, \text{ y } a'_l \geq j \},$$

$$U_j(a) = \{ a' \in S \mid a'_n = a_n \text{ si } k < n < l, \text{ y } a'_k, a'_l \geq j \}.$$

Según que  $a$  sea del tipo (a), (b), (c) o (d) respectivamente.

La colección  $\{U_j(a)\}$ , para cualquier elemento  $a$  de  $S$ , verifica:

- (i) Que no es vacía.
- (ii) Que para todo  $j$ ,  $a \in U_j(a)$ .
- (iii) Que dados dos elementos cualesquiera de la colección  $U_i(a)$  y  $U_j(a)$ ; existe otro elemento de la colección  $U_m(a)$  tal que

$$U_m(a) \subset U_i(a) \cap U_j(a).$$

Es suficiente con elegir  $m$  mayor o igual que el máximo de  $\{i, j\}$ .

(iv) Que para todo  $U_j(a)$  existe un subconjunto  $U$  de  $S$  tal que  $a \in U \subset U_j(a)$ , y tal que para todo punto  $b \in U$ , existe algún  $U_j(b)$  contenido en  $U$ .

Es claro que si  $U = U_{j+1}(a)$ , y  $i \geq j+1$  la condición (iv) se satisface.

Por lo tanto, los subconjuntos  $U_j(a)$  al variar  $j$  y  $a$ , nos dan una topología de  $S$ , en la que una base de entornos del punto  $a$  viene dada por la colección  $\{U_j(a)\}$ .

Proposición 3.1: El espacio topológico  $S$  es compacto.

Demostración: Se construirá un homeomorfismo entre  $S$  y el cuadrado  $C = [0,1] \times [0,1]$ ; por lo tanto  $S$  será compacto. Se definen:

$$x_{a_0 a_{-1} a_{-2} \dots} = 1 + \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_{-1}} + \frac{1}{a_{-2}} + \dots,$$

$$y_{a_1 a_2 a_3 \dots} = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots,$$

$$x_{a_0 a_{-1} \dots a_{k+1}} = 1 + \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_{-1}} + \frac{1}{a_{-2}} + \dots + \frac{1}{a_{k+1}} \quad \text{si } k < 0,$$

$$y_{a_1 a_2 \dots a_{l-1}} = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{l-1}} \quad \text{si } l > 1.$$

La aplicación  $f_a$  que a cada sucesión del tipo (a) le asigna el punto de  $C$  de coordenadas  $(x_{a_0 a_{-1} a_{-2} \dots}, y_{a_1 a_2 a_3 \dots})$  es un homeomorfismo entre el conjunto de sucesiones del tipo (a) y el subconjunto de  $C$  formado por los puntos de coordenadas irracionales.

La aplicación  $f_b$  que a cada sucesión del tipo (b) le asigna  $(x_{a_0 a_{-1} \dots a_{k+1}}, y_{a_1 a_2 a_3 \dots})$  si  $k < 0$ , o bien  $(0, y_{a_1 a_2 a_3 \dots})$  si  $k = 0$ , es un homeomorfismo entre el conjunto de sucesiones del tipo (b)

y el subconjunto de  $C$  formado por los puntos con la primera coordenada racional y la segunda irracional.

La aplicación  $f_c$  que a cada sucesión del tipo (c) le asigna  $(x_{a_0 a_{-1} a_{-2} \dots}, y_{a_1 a_2 \dots a_{l-1}})$  si  $l > 1$ , o bien  $(x_{a_0 a_{-1} a_{-2} \dots}, 0)$  si  $l = 1$ , es un homeomorfismo entre el conjunto de sucesiones del tipo (c) y el subconjunto de  $C$  formado por los puntos con la primera coordenada irracional y la segunda racional.

La aplicación  $f_d$  que a cada sucesión del tipo (d) le asigna  $(x_{a_0 a_{-1} \dots a_{k+1}}, y_{a_1 a_2 \dots a_{l-1}})$  si  $k < 0$  y  $l > 1$ ,  
 $(x_{a_0 a_{-1} \dots a_{k+1}}, 0)$  si  $k < 0$  y  $l = 1$ ,  
 $(0, y_{a_1 a_2 \dots a_{l-1}})$  si  $k = 0$  y  $l > 1$ ,  
 $(0, 0)$  si  $h = 0$  y  $l = 1$ ,

es un homeomorfismo entre el conjunto de sucesiones del tipo (d) y el subconjunto de  $C$  formado por los puntos de coordenadas racionales.

En definitiva, la aplicación  $f: S \rightarrow C$  que restringida a las sucesiones del tipo (a), (b), (c) y (d) es respectivamente  $f_a, f_b, f_c$  y  $f_d$  es un homeomorfismo entre  $S$  y  $C$ . //

La aplicación  $\sigma: S \rightarrow S$  definida por  $(\sigma(a))_n = a_{n+1}$ , para todo entero  $n$ , siendo  $a \in S$ , se conoce como el shift de Bernoulli de  $S$ . El dominio de definición de  $\sigma$  es:

$$D(\sigma) = \{a \in S \mid a_0 \neq \infty\},$$

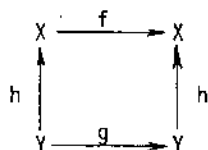
y su imagen es:

$$\text{Im } \sigma = \{a \in S \mid a_1 \neq \infty\}.$$

La versión del shift de Bernoulli aquí desarrollada se debe a Moser [24,p63] aunque sólo estudia con detalle el caso en que  $S$  es el conjunto de elementos del tipo (a).

(3.3) El shift de Bernoulli como subsistema de una aplicación del cuadrado.

Siguiendo la línea marcada por Moser [24] exponemos ahora técnicas necesarias para la demostración del teorema B. Si  $f$  es una aplicación continua de un espacio topológico  $X$  en sí mismo, y  $g$  es otra aplicación continua de un espacio topológico  $Y$  en sí mismo, se dice que  $g$  es un subsistema de  $f$  si existe un homeomorfismo  $h$  de  $Y$  en  $h(Y) \subset X$  tal que haga conmutativo el siguiente diagrama



Sea  $Q$  el cuadrado  $[0,1] \times [0,1]$ . Se estudiará la relación entre  $\sigma$  aplicación topológica en  $S$ , con una aplicación geométrica del cuadrado  $Q$ . Concretamente se verá que el shift  $\sigma$  es un subsistema de ciertas aplicaciones de  $Q$  en sí mismo.

Se definen algunas nociones para el cuadrado  $Q$ . Sea  $p$  un número del intervalo  $(0,1)$ . Una curva  $y = h(x)$ , es una curva horizontal si

- (i)  $0 \leq h(x) \leq 1$  para todo  $0 \leq x \leq 1$ , y
- (ii)  $|h(x_1) - h(x_2)| \leq p|x_1 - x_2|$  para todo  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$ .

Si  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  definen dos curvas horizontales, y si  $0 \leq h_1(x) < h_2(x) \leq 1$ , para todo  $0 \leq x \leq 1$ , se dice que el conjunto  $H = \{(x, y) \in Q \mid h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$  es una banda horizontal (véase la figura 3.1).

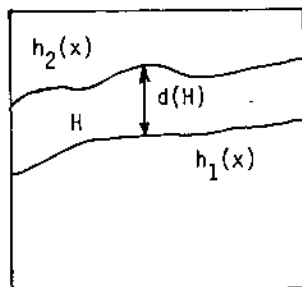


Figura 3.1

Se define el diámetro de  $H$  como

$$d(H) = \max_{0 \leq x \leq 1} (h_2(x) - h_1(x)) .$$

Una curva  $x = v(y)$  es una curva vertical si

- (i)  $0 \leq v(y) \leq 1$  para todo  $0 \leq y \leq 1$ , y
- (ii)  $|v(y_1) - v(y_2)| \leq p|y_1 - y_2|$  para todo  $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$ .

De manera similar se define una banda vertical y su diámetro.

La siguiente proposición da dos propiedades de las bandas que son fáciles de deducir a partir de las definiciones.

Proposición 3.2: (i) Si  $H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \dots$  es una sucesión de bandas horizontales (verticales) tales que  $d(H_k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ , entonces  $\bigcap_{k=1}^{+\infty} H_k$  es una curva horizontal (vertical).  
 (ii) Una curva horizontal cualquiera y una curva vertical cualquiera se cortan en un único punto.

Sea  $f$  una aplicación de  $Q$  en  $R^2$  tal que

- (i) Exista una familia de bandas horizontales  $H_n$  disjuntas dos a dos, y una familia de bandas verticales  $V_n$  disjuntas dos a dos, tales que  $f(V_n) = H_n$  para todo natural  $n$ , y que las fronteras horizontales (respectivamente verticales) de  $H_n$  sean las imágenes por  $f$  de las fronteras horizontales (respectivamente verticales) de  $V_n$  (véase la figura 3.2). Además, si las bandas  $V_n$  y  $H_n$  están ordenadas en el sentido que se indica en las figuras 3.3 y 3.4, y  $V_\infty = \{ (x,y) \in Q \mid x = 1 \}$ ,  $H_\infty = \{ (x,y) \in Q \mid y = 1 \}$ , entonces  $V_n \rightarrow V_\infty$ , y  $H_n \rightarrow H_\infty$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

- (ii) Si  $V$  es una banda vertical contenida en  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ , entonces

$V'_n = V_n \cap f^{-1}(V)$  es una banda vertical para todo natural  $n$ , y para algún  $d$  fijo,  $0 < d < 1$ , se tiene  $d(V'_n) \leq d \cdot d(V_n)$ . Similarmente, si  $H$  es una banda horizontal contenida en  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ , entonces

$H'_n = H_n \cap f(H)$  es una banda horizontal para todo natural  $n$ , con  $d(H'_n) \leq d \cdot d(H_n)$ .

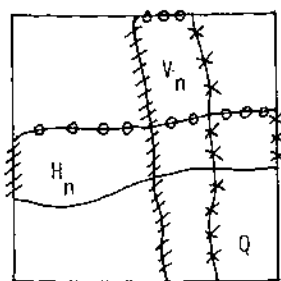


Figura 3.2

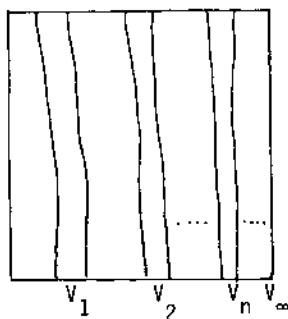


Figura 3.3

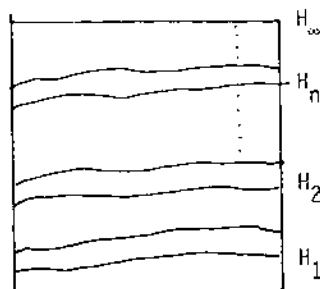


Figura 3.4

**Teorema 3.1:** Sea  $f: Q \rightarrow R^2$  un homeomorfismo que satisface las condiciones (i) y (ii). Entonces tiene el shift de Bernoulli  $\sigma$  como subsistema. Es decir, existe un homeomorfismo  $h$  de  $S$  en  $h(S) \subset Q$  tal que  $h \circ \sigma = f \circ h|_{D(\sigma)}$ , siendo  $D(\sigma)$  el dominio de definición de

**Demostración:** Para definir la imagen de una sucesión de  $S$  por  $h$  hay que distinguir de que tipo es la sucesión. Así, para una sucesión del tipo (a):  $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$  se verá que existe un único punto  $p$  de  $Q$  tal que  $f^{-m}(p) \in V_{a_m}$  para todo entero  $m$ . Entonces se define

$$h(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) = p.$$

Análogamente para una sucesión del tipo (b):  $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$  con  $a_k = \infty$ , y  $k \leq 0$ , existe un único punto  $p$  de  $Q$  tal que  $f^{-m}(p) \in V_{a_m}$  para  $m \geq k$ . Entonces se define

$$h(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots) = p.$$

Propiedades similares permiten definir las imágenes por  $h$  de las sucesiones del tipo (c) y (d).

Vamos a probar la existencia y unicidad de este punto  $p$  para las sucesiones del tipo (a) y (b). Para el tipo (a) se definen recurrentemente para  $n \geq 0$  los conjuntos:

$$V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}} = V_{a_0} \cap f^{-1}(V_{a_{-1} \dots a_{-n}}).$$

La condición (ii) nos dice que  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}}$  es una banda vertical, y que

$$d(V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}}) \leq d \cdot d(V_{a_{-1} \dots a_{-n}}) \leq d^n \cdot d(V_{a_{-n}}) \leq d^n.$$

De donde se deduce:

$$d(V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3.1)$$

De la definición de  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}}$  se tiene:

$$\begin{aligned} V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}} &= \{ p \in Q \mid f^m(p) \in V_{a_{-m}} \text{ para } 0 \leq m \leq n \}, \\ &= \{ p \in Q \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para } -n \leq m \leq 0 \}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}} \subset V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n+1}}. \quad (3.2)$$

De la proposición 3.2, de (3.1) y de (3.2) resulta que

$$\begin{aligned} V(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) &= \bigcap_{n=0}^{+\infty} V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}}, \\ &= \{ p \in Q \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para } m = 0, -1, -2, \dots \}, \end{aligned}$$

es una curva vertical que se ha deducido utilizando los términos  $a_n$  de la sucesión con  $n$  negativo o cero.

Analogamente se define una curva horizontal  $H(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$  introduciendo las bandas horizontales

$$H_{a_1 a_2 \dots a_n} = H_{a_1} \cap f(H_{a_2 \dots a_n}),$$

a partir de las  $a_n$  con  $n$  negativo. Así, se tiene

$$\begin{aligned} H(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) &= \bigcap_{n=1}^{+\infty} H_{a_1 a_2 \dots a_n}, \\ &= \{ p \in Q \mid f^{-m+1}(p) \in H_{a_m} \text{ para } m = 1, 2, \dots \}, \\ &= \{ p \in Q \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para } m = 1, 2, \dots \}, \end{aligned}$$

ya que  $f(V_{a_m}) = H_{a_m}$ .



La proposición 3.1 nos dice que la intersección

$$H(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) \cap V(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots),$$

es un único punto  $p$ . Por lo tanto, existe un único punto  $p$  de  $Q$  tal que  $f^{-m}(p) \in V_{a_m}$  para todo entero  $m$ .

Para una sucesión del tipo (b) es claro que la parte  $a_1, a_2, \dots$  de la sucesión define una curva horizontal

$$H(a_k, a_{k+1}, \dots) = \{p \in Q \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para } m = 1, 2, \dots\}.$$

Se verá que el resto de la sucesión  $a_k, a_{k+1}, \dots, a_0$  permite de finir una curva vertical

$$V(a_k, a_{k+1}, \dots) = \{p \in Q \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para } k \leq m \leq 0\}.$$

Y por lo tanto, se puede definir:

$$h(a_k, a_{k+1}, \dots) = H(a_k, a_{k+1}, \dots) \cap V(a_k, a_{k+1}, \dots).$$

La hipótesis (i) nos dice que  $V_n \cap f^{-1}(V_\infty)$  es una curva vertical de  $V_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (véase la figura 3.5), y que la antiimagen por  $f$  de una curva vertical de  $Q$  es una curva vertical dentro de cada  $V_n$  (véase la figura 3.6). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_{a_0 a_{-1} \dots a_k} &= V_{a_0} \cap f^{-1}(V_{a_{-1} \dots a_k}), \\ &= V_{a_0} \cap f^{-1}(V_{a_{-1}} \cap f^{-1}(V_{a_{-2}} \dots f^{-1}(V_{a_{k+1}} \cap f^{-1}(V_\infty))))), \end{aligned}$$

es una curva vertical. Es la curva vertical  $V(a_k, a_{k+1}, \dots)$ , y es claro que sus puntos verifican  $f^{-m}(p) \in V_{a_m}$  para  $k \leq m \leq 0$ .

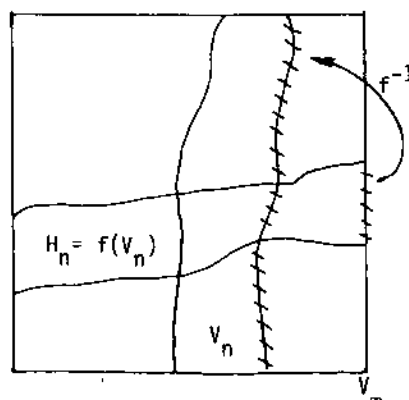


Figura 3.5

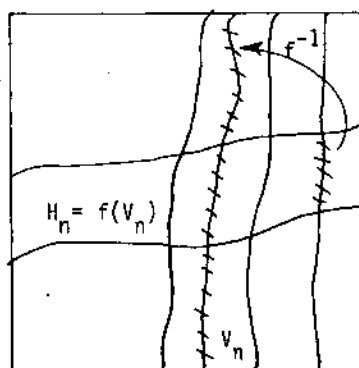


Figura 3.6

Por lo tanto, se tiene una aplicación  $h$  de  $S$  en  $Q$ . Veamos que es continua. En efecto,  $h$  será continua en  $a \in S$  si dado  $\delta > 0$  existe un número natural  $n$  tal que para todo  $a' \in U_n(a)$  se tenga  $\|h(a) - h(a')\| < \delta$  ( $\|\cdot\|$  es la norma euclídea de  $\mathbb{R}^2$ ).

Si  $a$  es del tipo (a) y  $a' \in U_n(a)$ , es decir  $a'_j = a_j$  para  $|j| \leq n$ ; de la definición de  $h$  se tiene que  $h(a)$  y  $h(a')$  están en las bandas  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}}$  y  $H_{a_1 \dots a_n}$ . Como que  $d(V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}}) \leq d^n$   $d(H_{a_1 \dots a_n}) \leq d^{n-1}$ , de la figura 3.7 se deduce que el diámetro de la intersección  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}} \cap H_{a_1 \dots a_n}$  es menor que el diámetro de la región  $R_n$ . Como que el diámetro de  $R_n$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow +\infty$ , resulta que  $h$  es continua en  $a$ .

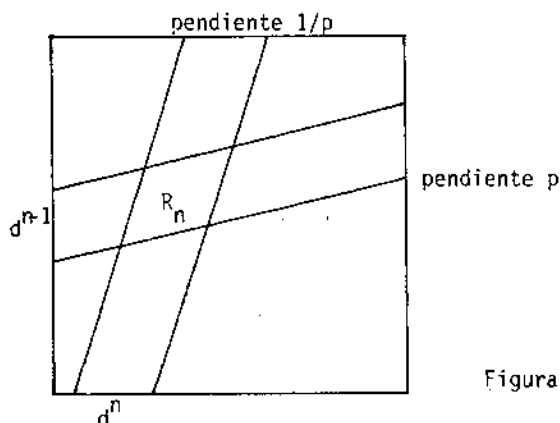


Figura 3.7

Si  $a$  es del tipo (b) y  $a' \in U_n(a)$ , es decir  $a'_j = a_j$  si  $k < j \leq n$ , y  $a'_k \geq n$ ; de la definición de  $h$  se tiene que  $h(a)$  está en la curva vertical  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{k+1} a_k}$  y en la banda  $H_{a_1 \dots a_n}$ , mientras que  $h(a')$  está en las bandas  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{k+1} a'_k}$  y  $H_{a_1 \dots a_n}$ . Para probar la continuidad es suficiente ver que la banda  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{k+1} a'_k}$  tiende a la curva vertical  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{k+1} a_k}$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Esto es consecuencia de que  $V_{a'_k} \rightarrow V_\infty$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , ya que  $a'_k \geq n$ .

Análogamente se probaría la continuidad de  $h$  en puntos de  $S$  de los tipos (c) y (d).

El hecho de que las bandas  $V_n$  sean disjuntas dos a dos hace que  $h$  sea inyectiva. En efecto, si  $a \neq a'$  si tiene para algún entero  $m$  que  $a_m \neq a'_m$ . Y si  $h(a) = p$  y  $h(a') = q$  como que  $f^{-m}(p) \in V_{a_m}$  y  $f^{-m}(q) \in V_{a'_m}$ , resulta que  $f^{-m}(p) \neq f^{-m}(q)$  y por lo tanto  $p \neq q$ .

Al ser  $S$  compacto y  $h$  continua, se tiene que  $h(S)$  es compacto. Entonces por ser  $h$  inyectiva,  $h^{-1}|_{h(S)}$  es continua. Por lo tanto,  $h$  es un homeomorfismo entre  $S$  y  $h(S)$ .

Por último, veamos que si  $a \in D(\sigma)$  entonces

$$(h \circ \sigma)(a) = (f \circ h)(a).$$

Si  $(h \circ \sigma)(a) = p$  y  $(f \circ h)(a) = q$ , se tiene que  $f^{-m}(p) \in V_{a_{m-1}}$ , y  $f^{-m}(q) \in V_{a_{m-1}}$  para enteros  $m$  convenientes según el tipo de sucesión que sea  $a$ . Por lo tanto,  $p = q$ , y  $h \circ \sigma = f \circ h|_{D(\sigma)}$ . //

Dado un homeomorfismo de  $Q$  en  $R^2$ , ver si satisface las condiciones (i) y (ii) puede ser muy difícil, en especial la condición (ii). Por esto se sustituye esta condición por otra si la función  $f$  es de clase  $C^1$ . Esta nueva condición se debe a Moser [24, p76-79], y aquí tan solo se formulan los resultados para su utilización posterior.

Si  $f(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$  con  $x_1 = f_1(x, y)$ ,  $y_1 = f_2(x, y)$ , la aplicación tangente a  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  es una aplicación lineal de  $R^2$  en  $R^2$  dada por la matriz

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

y aplica los vectores tangentes  $(u_0, v_0)$  en el punto  $(x_0, y_0)$ , en

vectores tangentes  $(u_1, v_1)$  en el punto  $(x_1, y_1)$ .

La nueva condición que sustituirá a la (ii) es

(iii) Existe  $P \in (0,1)$  tal que el campo de sectores  $S^+$  definido sobre puntos de  $\bigcup_{n=N}^{+\infty} V_n$ , por  $|v| \leq P|u|$ , se aplica sobre él mismo por  $Df$ ; es decir,  $(Df)(S^+) \subset S^+$ . Además, si  $(u_0, v_0) \in S^+$  y  $Df(u_0, v_0) = (u_1, v_1)$ , entonces  $|u_1| \geq P^{-1}|u_0|$ .

Analogamente, el campo de sectores  $S^-$  definido sobre  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n$  por  $|u| \leq P|v|$ , se aplica sobre él mismo por  $Df^{-1}$ ; y si  $(u_1, v_1) \in S^-$  y  $Df(u_0, v_0) = (u_1, v_1)$  entonces  $|v_0| \geq P^{-1}|v_1|$ .

Esta condición expresa de hecho la inestabilidad (de la hiperbolicidad) de la aplicación bajo la iteración, ya que las componentes horizontales de un vector tangente son ampliadas por  $P^{-n}$  bajo  $Df^n$  y las verticales por  $P^{-n}$  bajo  $Df^{-n}$ .

Proposición 3.3: (Moser) Si  $f$  de  $Q$  en  $R^2$  es de clase  $C^1$ , y satisface las condiciones (i) y (iii) con  $0 < P < 1/2$ , entonces también satisface la condición (ii) para  $d = P/(1-P)$ , y por lo tanto  $f$  admite a  $\sigma$  como subsistema.

### (3.4) Resultados conocidos sobre el comportamiento en el infinito del tercer cuerpo.

Por ser el problema restringido, rectilíneo y elíptico de tres cuerpos igual al problema de Sitnikov en primera aproximación y en el entorno del punto  $q = 0$ ,  $p = 0$  (ver sección (2.6)), la demostración de los dos lemas siguientes es idéntica a la demostración de los lemas 4 y 5 de Moser [24, p167-181] para el problema de Sitnikov. Este hecho se debe a que tanto en nuestro problema como en el de Sitnikov, cuando el tercer cuerpo llega al infinito con

velocidad cero (parabólicamente), le es igual en primera aproximación, debido a la distancia, que los otros dos cuerpos estén colisionando como en nuestro caso, o estén dando vueltas uno alrededor del otro como en el caso de Sitnikov.

Para  $m = 0$ , la aplicación  $f$  definida en la sección (2.5) viene dada por las ecuaciones (2.9). De ellas se deduce que  $E_1 = f(E_0) = E_0$ , y que la imagen por  $f$  de una generatriz de  $E_0$  es una curva en  $E_1$  que espirala hacia  $P_1$  (véase la figura 3.8). El siguiente lema nos da una propiedad similar para  $m > 0$ .

**Lema 3.1:** Sea  $C = \{ (h_0, t_0) \mid h_0 = h_0(s), t_0 = t_0(s) \text{ con } 0 \leq s \leq 1 \}$  un arco de clase  $C^1$  tal que  $C$  tiene el extremo correspondiente a  $s = 0$  sobre  $P_0$ , y en este extremo las curvas  $C$  y  $P_0$  no son tangenciales. Entonces la curva imagen  $f(C) = \{ (h_1, t_1) \mid h_1 = h_1(s), t_1 = t_1(s) \text{ con } 0 \leq s \leq 1 \}$  se acerca a  $P_1$  espiralando; es decir,  $t_1(s) \rightarrow +\infty$  cuando  $s \rightarrow 0$ .

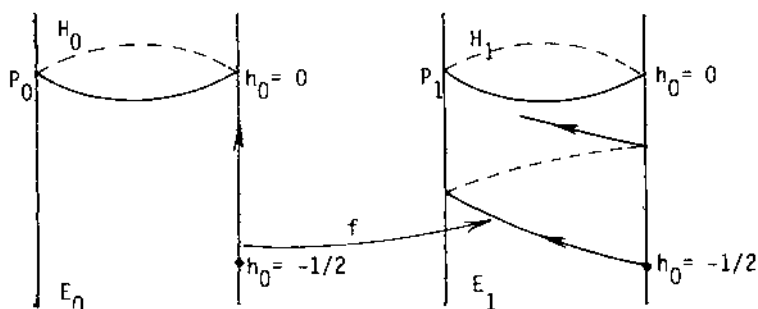
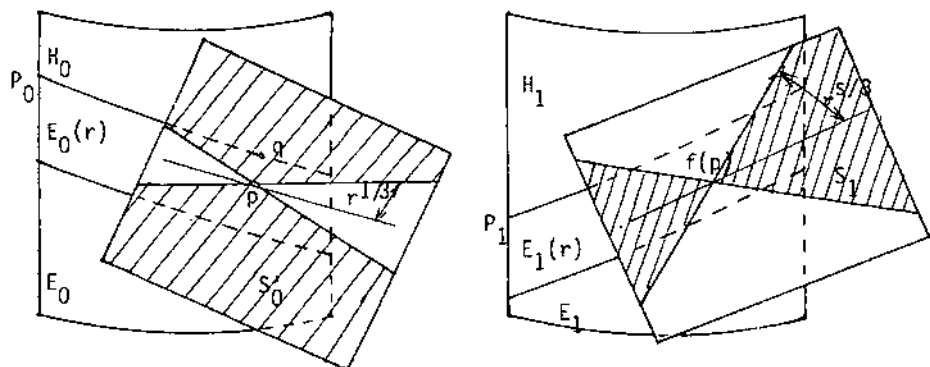


Figura 3.8

Para  $r > 0$  suficientemente pequeño se define  $E_0(r)$  como el conjunto de puntos de  $E_0$  tales que su distancia a  $P_0$  es menor que  $r$ . Ya que la curva  $P_0$  es de clase  $C^1$ , se puede asociar a cada punto  $p \in E_0(r)$  un único punto  $q \in P_0$  tal que  $d(p, P_0) = d(p, q)$ .

Sobre  $E_0(r)$  se definen dos haces de sectores. El haz  $S_0 = S_0(r^{1/3})$  que asigna a cada punto  $p \in E_0(r)$  el conjunto de rectas del plano tangente al cilindro en este punto que forman un ángulo me-

nor que o igual a  $r^{1/3}$  con la recta que pasa por  $p$  y es paralela a la recta tangente a la curva  $P_0$  en  $q$ .  $S'_0$  asigna a cada punto el conjunto de rectas complementarias a las de  $S_0$  (véanse las figuras 3.9). De manera similar,  $S_1$  y  $S'_1$  son los correspondientes haces de sectores sobre  $E_1$  obtenidos, por ejemplo, a través de la simetría  $S$  a partir de  $S_0$  y  $S'_0$ .



Figuras 3.9

Lema 3.2: Existe un  $0 < s < 1$  tal que para  $r$  suficientemente pequeño la aplicación  $f$  lleva  $E_0(r)$  dentro de  $E_1(r^s)$  y su aplicación tangente  $Df$  lleva el haz  $S'_0 = S'_0(r^{1/3})$  dentro de  $S_1 = S_1(r^{s/3})$ . Además, si  $w_0 \in S'_0$ ,  $w_1 = Df(w_0)$  y  $u_0$  es la proyección ortogonal de  $w_0$  sobre la recta central de  $S'_0$  y  $u_1$  la de  $w_1$  sobre la recta central de  $S_1$ , entonces  $|u_1| \leq r^{-s/3} |u_0|$  (véanse las figuras 3.9).

(3.5) El shift de Bernoulli como subsistema del problema restringido, rectilíneo y elíptico de 3 cuerpos.

Todos los resultados obtenidos hasta ahora van a permitir la demostración del teorema siguiente:

Teorema 3.2: La aplicación  $f$  definida sobre  $E_0$  tiene el shift de Bernoulli  $\sigma$  definido sobre  $D(\sigma) \subset S$  como subsistema. Es decir,

existe un homeomorfismo  $h$  de  $D(\sigma)$  en  $h(D(\sigma)) \subset E_0$  tal que  $f \circ h = h \circ g$ .

Demostración: Por la proposición 3.3, es suficiente demostrar que  $f$  satisface las condiciones (i) y (iii). La demostración del teorema no se hará sobre todo  $E_0$ , sino tan solo sobre la componente conexa  $R$  del dominio  $E_1(r) \cap E_0(r)$  que contiene al punto  $p \in P_1 \cap P_0$  del teorema 2.3 (véase la figura 3.10).

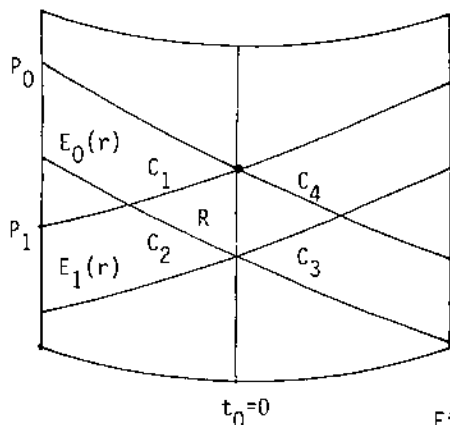


Figura 3.10

Para  $r$  suficientemente pequeño,  $R$  es una región limitada por cuatro curvas de clase  $C^1$ , que designaremos por  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , y nos referiremos a ellas como los lados de  $R$ . El papel del cuadrado  $Q$  de la proposición 3.3 lo jugará aquí  $R$ .

Se tienen que definir sobre  $R$  dos familias de bandas que desempeñaran el papel de las bandas horizontales  $H_n$  y verticales  $V_n$  de las condiciones (i) y (iii).

Las curvas  $C_1$  y  $C_3$  cortan no tangencialmente a la curva  $P_0$  por el teorema 2.3. Y por el lema 3.1  $f(R)$  corta a  $R$  en la forma indicada en la figura 3.11.

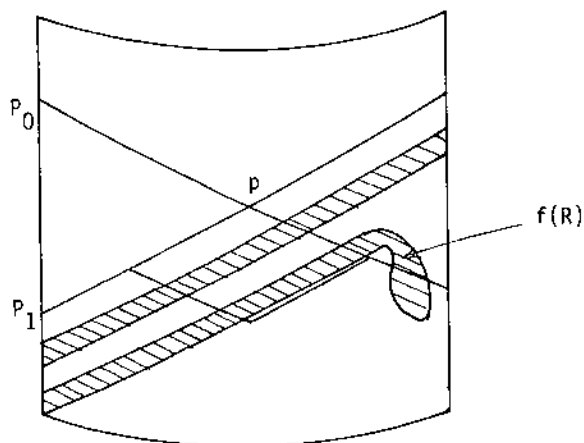


Figura 3.11

Por lo tanto, la intersección  $f(R) \cap R$  está formada por una infinidad de bandas, que a menos de un número finito están limitadas entre los lados  $C_2$  y  $C_4$ . Las bandas limitadas entre  $C_2$  y  $C_4$  se designan por  $H_1, H_2, \dots$ , comenzando la numeración a partir de la más próxima al lado  $C_3$ . Estas bandas harán el papel de las bandas horizontales. Se definen las bandas verticales  $V_n$  como  $V_n = S(H_n)$ , donde  $S$  es la simetría definida sobre el cilindro por  $(h_0, t_0) \rightarrow (h_0, -t_0)$  (véase la figura 3.12). Se verá que  $f(V_n) = H_n$ . En efecto, se tiene que

$V_n \subset S(f(R) \cap R) = (f^{-1}S)(R) \cap S(R) = f^{-1}(R) \cap R$ ,  
de donde se deduce que  $f(V_n) \subset R \cap f(R)$ , es decir,

$$f(V_n) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n. \quad (3.3)$$

Se considera,

$$f^{-1}(H_n) = (SfS)(H_n) = (Sf)(V_n) \subset S(H_n) = V_n,$$

de donde

$$H_n \subset f(V_n). \quad (3.4)$$

Las fronteras son preservadas por  $f$ ; por lo tanto, la banda vertical más próxima a  $C_2$ ,  $V_1$  ha de estar en virtud de (3.3)



dentro de la banda horizontal más próxima a  $C_3$ , es decir  $f(V_1) \subset H_1$ .  
En general

$$f(V_n) \subset H_n. \quad (3.5)$$

De (3.4) y (3.5) resulta  $f(V_n) = H_n$ .

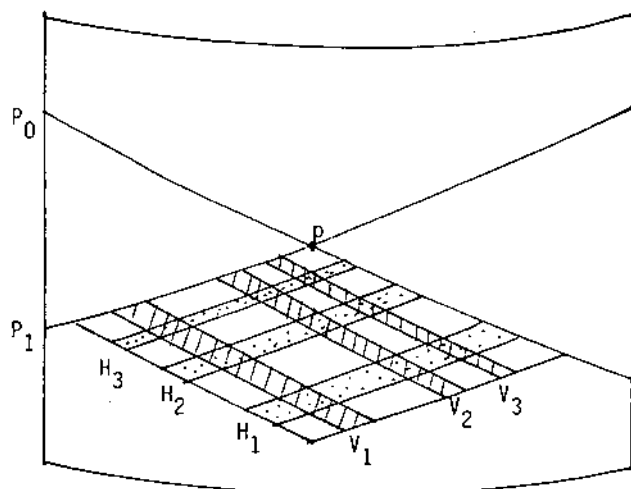


Figura 3.12

Por construcción se tiene que los conjuntos  $H_n$  son disjuntos dos a dos. Análogamente para los conjuntos  $V_n$ . Si se toma  $H_\infty = C_1$ , y  $V_\infty = C_4$ , se tiene que  $V_n \rightarrow V_\infty$  y  $H_n \rightarrow H_\infty$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Para ver que los  $H_n$  y los  $V_n$  satisfacen las propiedades de las bandas horizontales y verticales respectivamente, se aplica  $R$  en el cuadrado  $Q$ . Como que los lados de  $R$  tienen una longitud inferior o igual a  $r$ , se puede conseguir transformar  $R$  en  $Q$  con una plicación que difiera de una aplicación lineal en  $O(r)$  con la norma  $C^1$ . Para demostrar que los  $V_n$  corresponden a las bandas verticales, es suficiente con ver que las fronteras interiores a  $R$  tienen las tangentes con dirección próxima a la tangente de la curva  $P_0$  en  $p$ . Esto sale directamente del lema 3.2, que implica que el ángulo entre las dos direcciones es inferior a  $r^{1/3} + O(r) \leq 2r^{1/3}$ . De la misma ma-

nera se vería que los  $H_n$  pueden ser considerados como las bandas horizontales, y por lo tanto  $f$  satisface la condición (i).

Mostraremos que  $f$  satisface la condición (iii). Por esto se utilizan los haces de sectores  $S_j$ ,  $S'_j$  para  $j = 1, 0$  definidos en el lema 3.2. Es claro que sobre  $R$  los sectores  $S_1(r^{1/3})$  están contenidos dentro de  $S'_0(r^{1/3})$  para  $r$  suficientemente pequeño. En efecto,  $P_1$  y  $P_0$  se cortan transversalmente en  $p$ , y como que  $S'_0(r^{1/3})$  contiene todas las direcciones excepto las que forman un ángulo menor que  $r^{1/3} + o(r)$  con la tangente a  $P_0$  en  $p$ , este sector contiene al sector  $S_1(r^{1/3})$ , formado por todas las direcciones que forman con la tangente a  $P_1$  en  $p$  un ángulo menor que  $r^{1/3} + o(r)$ .

Por el lema 3.2  $Df$  restringido a  $R \cap f^{-1}(R)$  envía  $S'_0(r^{1/3})$  dentro de  $S_1(r^{1/3}) \subset S_1(r^{1/3})$ . Y como que

$S_1(r^{1/3}) \subset S_0(r^{1/3})$  resulta que

$$Df \Big|_{R \cap f^{-1}(R)} : S_1(r^{1/3}) \longrightarrow S_1(r^{1/3}).$$

Si  $S^+$  es el haz de sectores  $S_1(r^{1/3})$  restringido a

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n \subset R \cap f^{-1}(R)$ , se satisface la condición (iii) (véase la figura 3.13). De manera similar, si  $S^- = S_0(r^{1/3})$ , obtenido de  $S^+$  por la simetría  $S$ , se tiene que su restricción a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n$$

es aplicada en sí mismo por  $Df^{-1}$ , y satisface la condición (iii).

//

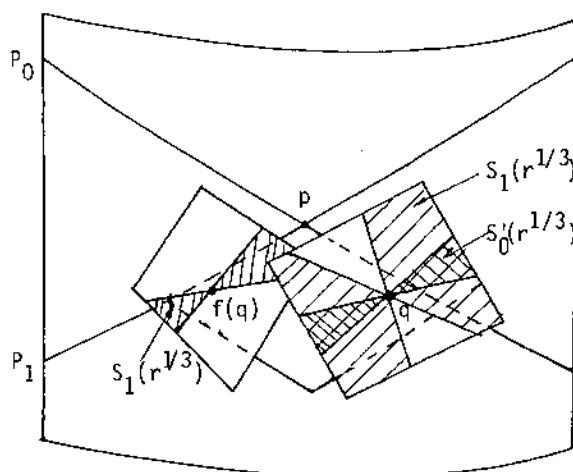


Figura 3.13

### (3.6) Demostración del teorema principal.

Ahora, la demostración del teorema B ya es sencilla. Sea  $\{b_n\}$  la sucesión del teorema B, se construye una nueva sucesión  $\{a_n\}$  tomando  $a_n = b_n - b$ .

De la definición de banda vertical  $V_k$ , dada en la demostración del teorema 3.1, resulta que el conjunto  $V_k$  da condiciones iniciales para las órbitas del tercer cuerpo de manera que el tiempo que transcurre hasta que  $m_2$  y  $m_3$  vuelven a colisionar es  $2\pi(k+b+\theta)$ , donde  $b$  está relacionado con el número de vueltas enteras que da  $f(R)$  alrededor del cilindro antes de que corte a  $R$  por el lado  $C_4$ , y  $\theta$  es tal que  $0 \leq \theta < 1$ . Es claro que  $b$  depende de  $m$ , puesto que de  $m$  depende el ángulo de corte de las curvas  $P_1$  y  $P_0$  en  $p$ .

La sucesión  $\{a_n\}$  pertenece al dominio de definición de  $\sigma$ , y en virtud del teorema 3.2 se le puede asociar de manera única un punto  $q$  de  $R$ . El punto  $q$  corresponde a una órbita del tercer cuerpo. De la demostración del teorema 3.1 se sabe que  $f^{-n}(q) \in V_{a_n}$  para todo  $a_n$  de la sucesión  $\{a_n\}$ . Y por lo tanto, para la órbita  $a_n$  determinada por  $q$ , los enteros  $b_n$  miden el número de colisiones que se producen entre los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$ , entre dos colisiones consecutivas de  $m_2$  y  $m_3$ .

//

Se ha visto que el teorema B permite establecer una gran diversidad de evoluciones finales dentro de  $R$ . Ahora se verá que permite establecer la existencia de una infinidad de órbitas periódicas.

Sea  $\{b_n\}$  una sucesión periódica; es decir, existe un natural  $m$  tal que  $a_{n+m} = a_n$  para todo entero  $n$ . Si  $b_n \geq b$ , el teorema B permite asociar a  $\{a_n\}$  un punto  $q = h(\{a_n\})$  de  $R$ , que corresponde a una órbita periódica del tercer cuerpo puesto que

$$f^m(q) = h \circ \sigma^m \circ h^{-1}(q) = h \circ \sigma^m(\{a_n\}) = h(\{a_n\}) = q.$$

#### IV. EL PROBLEMA RESTRINGIDO PLANO Y CIRCULAR DE 3 CUERPOS.

##### (4.1) Formulación del problema.

Se tienen dos cuerpos que giran alrededor de su centro de masas describiendo órbitas circulares bajo la influencia de su atracción gravitatoria mutua, y un tercer cuerpo que se mueve en el plano definido por las trayectorias de los otros dos, atraído por ambos pero sin influenciarlos (a efectos prácticos se puede considerar que su masa es despreciable respecto de las de los dos primeros). El problema restringido plano, y circular de 3 cuerpos consiste en describir el movimiento del tercer cuerpo.

##### (4.2) La ecuación diferencial del movimiento.

Sean  $m_1$  y  $m_2$  las masas de los dos cuerpos que describen órbitas circulares, y  $m_3$  la masa del tercer cuerpo. Siempre se puede escoger la unidad de masa de manera que  $m_1 = 1 - m$ , y  $m_2 = m$ , siendo  $0 < m < 1$ ; la unidad de longitud para que la distancia entre  $m_1$  y  $m_2$  sea igual a 1, y la unidad de tiempo de manera que la velocidad angular de  $m_1$  y  $m_2$  valga 1. Por la elección hecha de las unidades de masa, longitud y tiempo resulta que la constante de gravitación es igual a 1.

Para describir el movimiento de  $m_3$  se utilizan dos sistemas de coordenadas, ambos con el origen en el centro de masas: Uno de ellos fijo, de coordenadas  $(X,Y)$ , llamado sistema sideral, y el otro giratorio, de coordenadas  $(x,y)$ , conocido como sistema sinódico. Este último es tal que el eje  $x$  coincide constantemente con la recta determinada por  $m_1$  y  $m_2$ ; por lo tanto el sistema sinódico ha de estar girando con una velocidad angular igual a la unidad.

Si se toma el origen del tiempo de manera que cuando  $t$  sea

igual a cero el sistema sinódico coincide con el sideral, y si se indica por  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente a las distancias de  $m_1$  y  $m_2$  a  $m_3$ , se tiene para un tiempo  $t$  la figura siguiente:

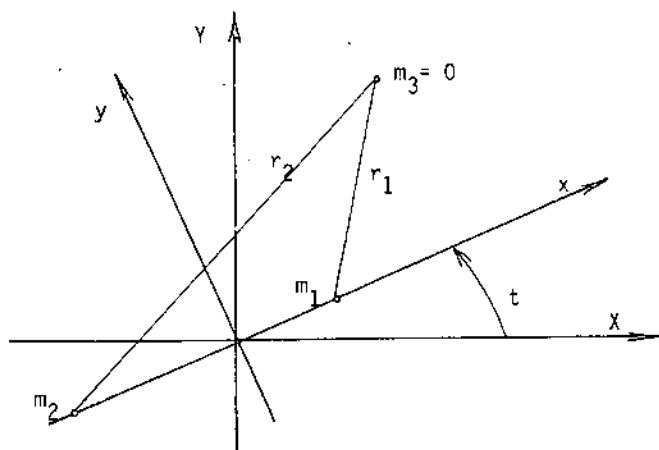


Figura 4.1

Las ecuaciones del movimiento de  $m_3$  en el sistema sinódico son:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y},\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-m}{r_1} + \frac{m}{r_2} + \frac{1}{2}m(1-m),$$

con

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (x-m)^2 + y^2, \\ r_2^2 &= (x+1-m)^2 + y^2.\end{aligned}$$

El sistema diferencial (4.1) tiene una integral primera, la integral de Jacobi:

$$C = C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 2\Omega(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2).\tag{4.2}$$

Los detalles de la deducción de las ecuaciones (4.1) y (4.2) se encuentran en Szebehely [32].

(4.3) Las órbitas como puntos de un toro sólido sin frontera.

Las curvas del plano  $(x,y)$  definidas por:

$$2\Omega(x,y) - C = 0, \quad (4.3)$$

al variar  $C$ , se conocen como las curvas de velocidad cero, puesto que para un valor de  $C$  fijo si el tercer cuerpo pasa por el punto de la curva (4.3) su velocidad sinódica es cero en virtud de (4.2).

Un punto del plano  $(x,y)$  es de equilibrio relativo si al situar en él al tercer cuerpo con velocidad cero, éste permanece en dicho punto. Se sabe que hay cinco y sólo cinco puntos de equilibrio relativo, las dos posiciones  $L_4$  y  $L_5$  de Lagrange, en las que los 3 cuerpos están en los vértices de un triángulo equilátero, y las tres posiciones colineales  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  de Euler.

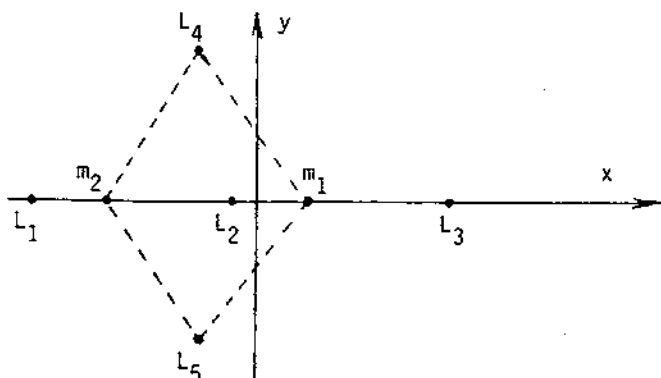


Figura 4.2

Si  $C_i = C(L_i)$ , resulta que la estructura topológica de las curvas de velocidad cero cambia cuando la constante de Jacobi vale  $C = C_i$ . Concretamente, si  $m \neq 0.5$  ( $m = 0.5$ ) las curvas de velocidad cero poseen 9 (7) estructuras topológicas distintas tal como se indica en la figura 4.3 (4.4). Las correspondientes estruc-

turas topológicas dentro del espacio de fases están estudiadas en [15] para el problema restringido plano y circular de 3 cuerpos, y en [16]-[17] para el problema de 3 cuerpos y  $n$  cuerpos, respectivamente. En las figuras 4.3 (4.4) sólo se representan las curvas de velocidad cero en el semiplano  $x > 0$ , ya que son simétricas respecto del eje  $x$ , puesto que  $\Omega(x,y) = \Omega(x,-y)$ . Estas dos gráficas han sido tomadas de [32,pag.183-184].

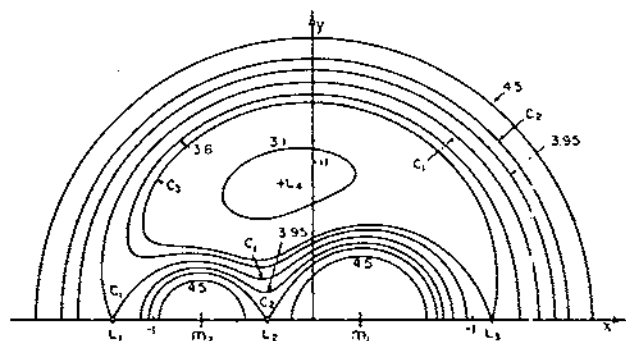


Figura 4.3

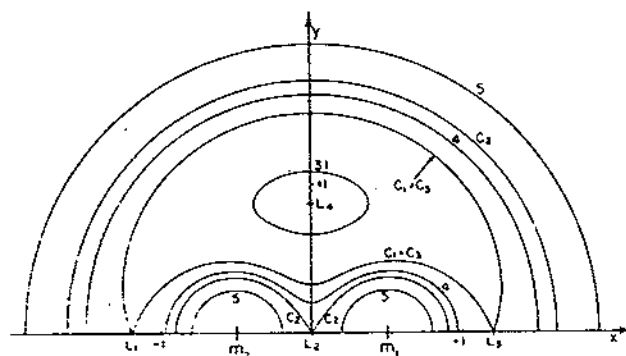


Figura 4.4

Por consiguiente, si  $C > C_2$  las curvas de velocidad cero son homeomorfas a las de la figura siguiente:



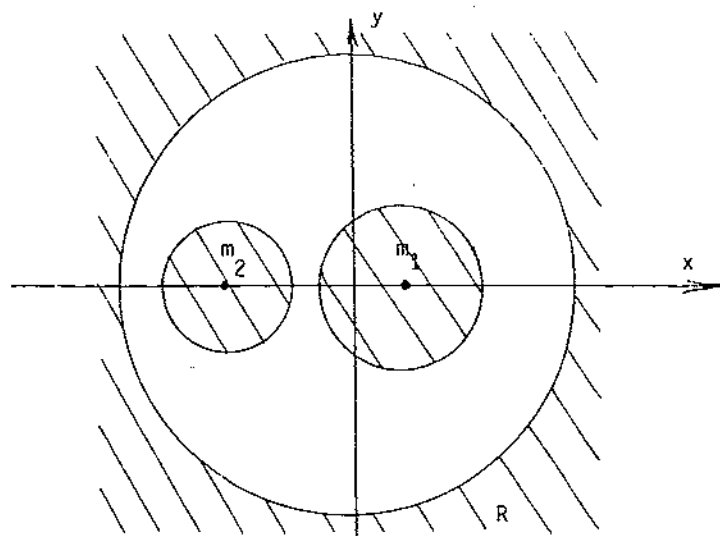


Figura 4.5

Las curvas de velocidad cero limitan las regiones del plano donde se puede mover  $m_3$ , ya que  $m_3$  sólo puede estar en los puntos  $(x,y)$  tales que

$$2n(x,y) - C \geq 0.$$

Estas regiones en la figura 4.5 aparecen rayadas.

Se estudiará el movimiento del tercer cuerpo en la región no acotada para un valor de la constante de Jacobi  $C > C_2$  fijo. De hecho nos limitamos a considerar las órbitas de la región  $R$  que en algún instante cortan al eje  $X$  del sistema sidereal en un punto en que  $X < 0$ . Se verá que para dar una de estas órbitas es suficiente dar el módulo de la velocidad sinódica  $v_0$  y el ángulo  $\alpha_0$  que forma el vector velocidad con el eje  $X$  en el tiempo  $t_0$  en que la órbita corta a dicho eje (véase la figura 4.6).

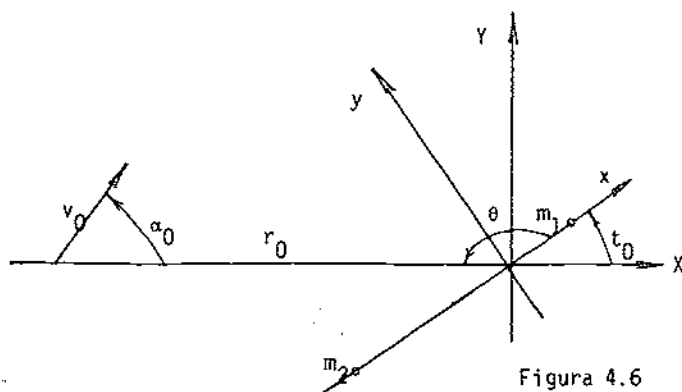


Figura 4.6

Es claro que  $\alpha_0$  no es necesario si  $v_0 = 0$ . Si el punto de corte de la órbita con el semieje  $X < 0$  es  $(x_0, y_0)$ , y su vector velocidad es  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ , se tiene:

$$x_0 = -r_0 \cos t_0 ,$$

$$y_0 = r_0 \sin t_0 ,$$

$$v_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = 2\Omega(x_0, y_0) - C , \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos(\alpha_0 - t_0) ,$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \sin(\alpha_0 - t_0) ,$$

$$\text{donde } r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 .$$

De (4.4) se deduce que las órbitas del tercer cuerpo en la región  $R$  objeto de nuestro estudio, se pueden dar por las condiciones iniciales:

$$v_0 \geq 0 ,$$

$$t = t_0 \pmod{2\pi} , \quad (4.5)$$

$$\alpha_0 \in [0, 2\pi) \text{ si } v_0 > 0 ,$$

$$\alpha_0 = 0 \text{ si } v_0 = 0 .$$

Es claro que la región del plano  $(x, y)$  dada por (4.4) al variar  $t_0$  en  $[0, 2\pi)$  y siendo  $v_0 \geq 0$ , es la región  $R$ . En virtud de (4.5) se puede enunciar la siguiente proposición:

Proposición 4.1: Las órbitas del tercer cuerpo en la región  $R$  que cortan al semieje  $X < 0$ , se pueden mirar como los puntos de un toro sólido sin frontera  $T$ , siendo el eje del toro las órbitas determinadas por las condiciones iniciales sobre los puntos de la curva de velocidad cero. Nótese que una misma órbita puede dar lugar a más de un punto del toro sólido (véase la figura 4.7).

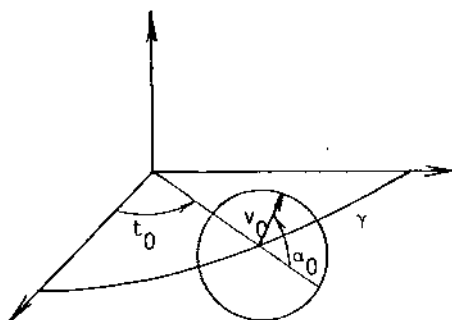


Figura 4.7

Para la constante de Jacobi dada  $\gamma$  es la curva de velocidad cero.

#### (4.4) El toro $T$ para $m = 0$ .

Para  $m = 0$  el problema restringido plano, y circular de 3 cuerpos en la región  $R$  equivale a dos problemas de 2 cuerpos independientes con el primer cuerpo de masa  $m_1 = 1$ , situado en el origen de coordenadas, el segundo de masa  $m_2 = 0$ , dando vueltas alrededor del origen a una distancia de una unidad con una velocidad angular igual a 1, y el tercero de masa  $m_3 = 0$ , a una distancia del origen mayor que 1 describiendo una elipse, una parábola o una hipérbola de foco el origen.

Las ecuaciones del movimiento para  $m = 0$  son:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y},\end{aligned}\tag{4.6}$$

con

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{r},$$

siendo  $r^2 = x^2 + y^2$ . La integral de Jacobi viene dada por:

$$C = x^2 + y^2 + 2/\sqrt{x^2 + y^2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Por lo tanto, para  $m = 0$ , resulta que  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 3$ , y las curvas de velocidad cero para  $C > 3$  son dos circunferencias de radio las dos raíces positivas  $r_1, r_2$  del polinomio  $r^3 - Cr + 2$ ; además  $r_1 > 1 > r_2 > 0$ . Así, para  $C = 4$ , la región  $R$  viene dada por la figura siguiente:

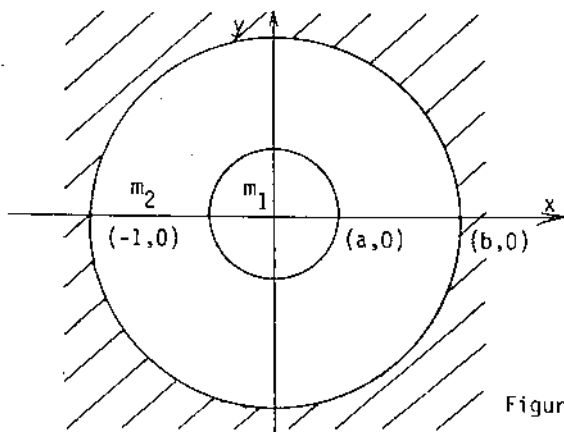


Figura 4.8

Siendo  $a = 0.53918887281\dots$ , y  $b = 1.67513087057\dots$

Mientras que la energía  $h$  y el momento cinético  $M$  no son integrales primeras si  $0 < m < 1$ , si lo son para  $m = 0$  y vienen dadas por unidad de masas como

$$h = \frac{1}{2} [ (\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 ] - 1/\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$M = x(\dot{y} + x) - y(\dot{x} + y).$$

Es fácil verificar que  $C = 2M - 2h$ . Esta relación es válida también para valores de  $0 < m < 1$ . Una órbita de  $m_3$  que corte al semieje  $X < 0$ , viene dada por un punto del toro  $T$ . Se estudian las regiones de este toro sólido que dan lugar a órbitas de escape. Se sabe del problema de 2 cuerpos que una condición necesaria y suficiente para que el cuerpo  $m_3$  escape es que la energía  $h$  sea igual o mayor que cero, que para  $h = 0$ , lo hace parabólicamente y para  $h > 0$ , hiperbólicamente.

De (4.4) la energía de una órbita dada por el punto  $(v_0, t_0, \alpha_0)$  de  $T$  es:

$$h = \frac{1}{2} (v_0^2 + r_0^2) - v_0 r_0 \sin \alpha_0 - \frac{1}{r_0}, \quad (4.7)$$

donde  $r_0$  es función de  $v_0$  a través de la integral de Jacobi

$$v_0^2 = r_0^2 + \frac{2}{r_0} - C. \quad (4.8)$$

Por lo tanto, se tiene la energía  $h$  en función de  $v_0$  y  $\alpha_0$ .

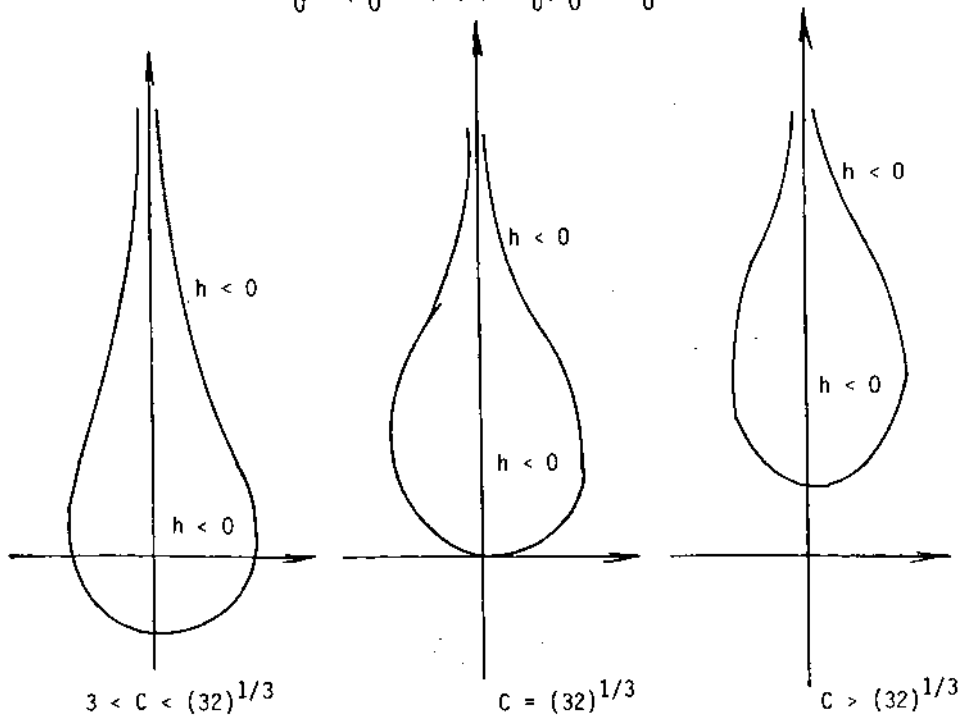
**Lema 4.1:** Si se identifican los valores de  $(v_0, \alpha_0)$  con los puntos del plano en coordenadas polares; las regiones del plano en que la energía  $h = h(v_0, \alpha_0)$ , dada por las ecuaciones (4.7) y (4.8), es negativa, cero o positiva, están dibujadas en las figuras 4.9.

**Demostración:** Utilizando la integral de Jacobi (4.8), la ecuación (4.7) se puede escribir:

$$h = r_0^2 - \sqrt{r_0(r_0^3 - Cr_0 + 2)} \sin \alpha_0 - \frac{C}{2}.$$

Se probará que las curvas  $h = 0$ , están definidas para valores de  $r_0 \geq C^{2/3}$ . En efecto, para  $h = 0$ , se tiene:

$$\sin \alpha_0 = (r_0^2 - C/2) / \sqrt{r_0(r_0^3 - Cr_0 + 2)}.$$



Figuras 4.9

Para que se verifique  $-1 \leq \sin \alpha_0 \leq 1$ , es necesario que:

$$\frac{(r_0^2 - C/2)^2}{r_0(r_0^3 - Cr_0 + 2)} = \frac{r_0^4 - Cr_0^2 + C^2/4}{r_0^4 - Cr_0^2 + 2r_0} \leq 1.$$

Por consiguiente, la condición  $r_0 \geq C^2/8$ , es necesaria para que las curvas  $h = 0$ , estén definidas. Veamos que también es suficiente. Sea  $f(r_0) = r_0^3 - Cr_0 + 2$ , entonces

$$f(C^2/8) = [(C/\sqrt{8})^3 - \sqrt{2}]^2 > 0 \quad \text{si } C \neq \sqrt[3]{32}.$$

Por ser la función  $f(r_0)$  creciente en  $r_0 \geq C^2/8$ , se tiene que existe  $\sqrt{r_0(r_0^3 - Cr_0 + 2)}$ , y por lo tanto la curva  $h = 0$ , para  $r_0 \geq C^2/8$ , si  $C \neq \sqrt[3]{32}$ .

Si  $C = \sqrt[3]{32}$ , por ser

$$\lim_{r_0 \rightarrow C^2/8} \frac{(r_0^2 - C/2)^2}{r_0(r_0^3 - Cr_0 + 2)} = 0,$$

la curva  $h = 0$ , también está definida para  $r_0 \geq C^2/8$ .

Sea  $r_C$  el radio de la circunferencia de velocidad cero para la región  $R$  y la constante de Jacobi  $C$  (véase la figura 4.8).

En las figuras 4.10 se dan las regiones del cilindro  $(r_0, \alpha_0)$  en las que la energía  $h = h(r_0, \alpha_0)$  es negativa, cero o positiva. De estas figuras y de (4.8) se deducen sin dificultad las figuras 4.9.

//

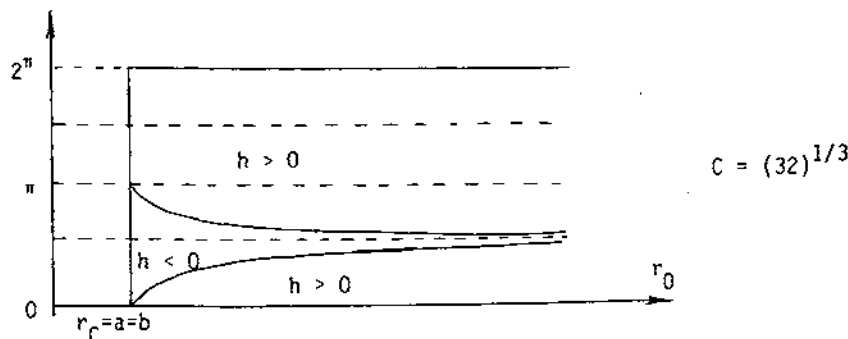
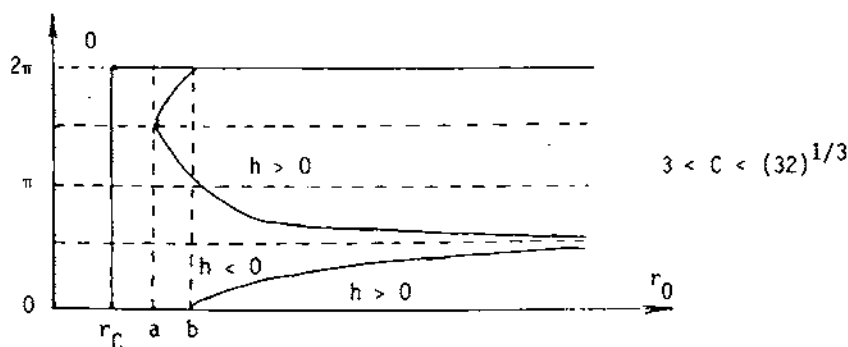
**Proposición 4.2:** Para  $m = 0$ , el toro  $T$  de las órbitas del tercer cuerpo que cortan al semieje  $X < 0$ , queda partido por la superficie  $h = 0$ , que es difeomorfa analíticamente a un cilindro, en dos componentes. Una formada por las órbitas hiperbólicas ( $h > 0$ ), y la otra por las órbitas elípticas ( $h < 0$ ). Véase la figura 4.11.

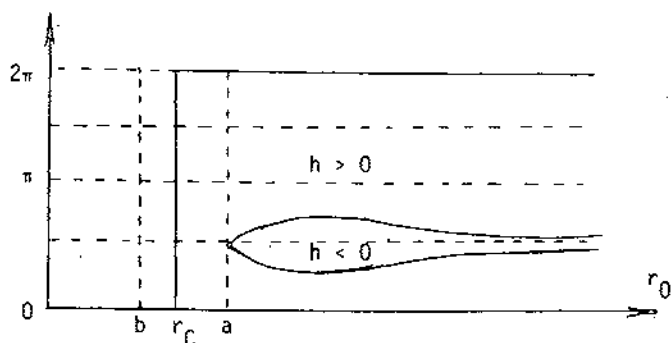
(4.5) Estudio del movimiento en el entorno del infinito para  $m = 0$ .

Se estudiará el movimiento del tercer cuerpo en el entorno del infinito, para ello se hace previamente el cambio de coordenadas dado por:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - (M/r - r) \sin \theta, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + (M/r - r) \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nótese que estas coordenadas no son más que las coordenadas polares puesto que  $r \dot{\theta} = M/r - r$ . Al cambio dado por (4.9) le sigue el definido por:





$$(32)^{1/3} < c$$

Figuras 4.10

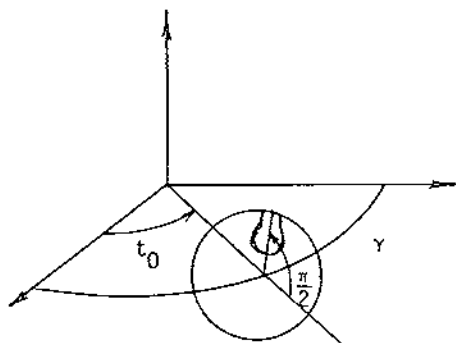


Figura 4.11

$$\begin{aligned} r &= 2/q^2, \text{ con } 0 < q < +\infty, \\ \dot{r} &= p, \end{aligned} \quad (4.10)$$

que lleva el infinito al origen de coordenadas. Este cambio fué introducido por McGehee [21]. En las nuevas variables  $q, p, \theta$ , las ecuaciones (4.6) del movimiento se transforman en:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{1}{4} p q^3, \\ \dot{\theta} &= -1 + \frac{1}{4} M q^4, \\ \dot{p} &= -\frac{1}{4} q^4 + \frac{1}{8} M^2 q^6. \end{aligned} \quad (4.11)$$

El estudio del flujo de este sistema en el espacio  $(q, \theta, p)$  en coordenadas cilíndricas (véase la figura 4.12), se obtiene al girar alrededor del eje  $p$  la figura 4.13. Para que el flujo alcance dicho eje se necesita un tiempo infinito.



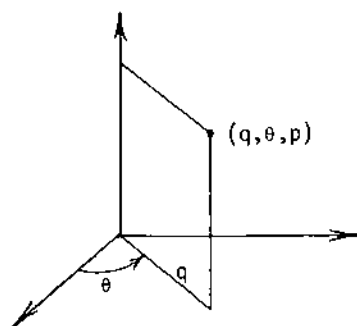


Figura 4.12

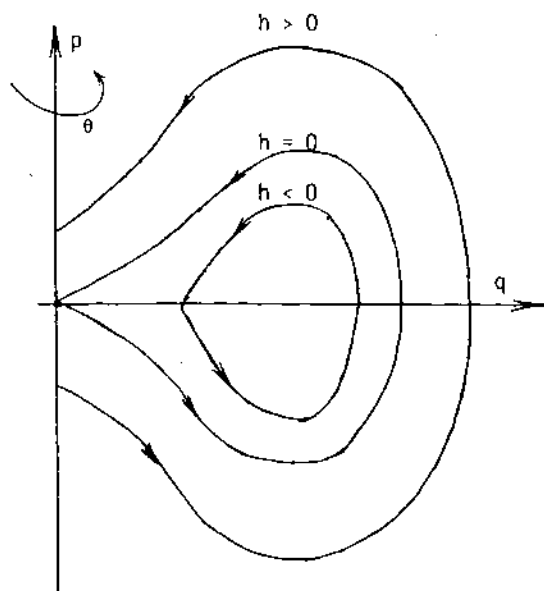


Figura 4.13

Las curvas  $h = \text{constante}$  en la figura 4.12 tienen por ecuación

$$p^2 = q^2 - (C/4 + h/2)^2 q^4 + 2h,$$

con  $q > 0$ . En particular, la curva  $h = 0$ , es:

$$p^2 = q^2 - C^2 q^4 / 16. \quad (4.12)$$

Obsérvese que la curva  $h = 0$ , es la curva de las figuras 4.9, una vez se han efectuado los cambios de coordenadas dados por las ecuaciones (4.4), (4.9) y (4.10).

(4.6) El toro  $T$  para  $m > 0$ , la aplicación  $f$  y su inversa.

Se define una aplicación  $f$  de una región del toro  $T$  en  $T$  de la siguiente manera: Sea  $(v_0, t_0, \alpha_0)$  un punto de  $T$  que define la órbita del tercer cuerpo  $x(t), y(t)$ , tal que

$$\begin{aligned} x(t_0) &= -r_0 \cos t_0, \\ y(t_0) &= r_0 \sin t_0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\dot{x}(t_0) = v_0 \cos(\alpha_0 - t_0),$$

$$\dot{y}(t_0) = v_0 \sin(\alpha_0 - t_0),$$

donde  $r_0$  es tal que  $v_0^2 = 2 \Omega(-r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0) - C$ . Sea  $t_1$  el siguiente cero de  $Y(t)$  con  $X(t) < 0$ , y  $t_1 > t_0$  si existe; es decir, si  $t_1 < +\infty$ . En este caso se define:

$$v_1 = \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + \dot{y}^2(t_1)},$$

y

$$\alpha_1 = \begin{cases} \arcsin(\dot{y}(t_1)/v_1) + t_1 \pmod{2\pi} & \text{si } v_1 \neq 0, \\ 0 & \text{si } v_1 = 0. \end{cases}$$

Por definición la aplicación  $f$  envía  $(v_0, t_0, \alpha_0)$  a  $(v_1, t_1, \alpha_1)$ .

Se denota por  $E_0$  al conjunto de los puntos de  $T$  tales que su correspondiente  $t_1$  es finito.  $E_0$  es el dominio de definición de la aplicación  $f$ . Así  $E_0$  representa el conjunto de las órbitas del tercer cuerpo que vuelven a cortar al semieje  $X < 0$ . Por analogía con el caso  $m = 0$ , se dice que las órbitas de  $E_0$  son elípticas para tiempos crecientes. De la continuidad de las soluciones de una ecuación diferencial respecto de las condiciones iniciales se tiene que  $E_0$  es un abierto.

Proposición 4.3: Sea  $X(t), Y(t)$  una órbita del tercer cuerpo moviéndose en la región  $R$  con  $C > C_2$  suficientemente grande, y sea  $r(t) = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , y  $\phi(t) = \arctg(Y(t)/X(t))$ . Entonces:

- (i)  $\phi(t)$  es una función creciente para todo  $t$ .
- (ii) Si  $t_1 = +\infty$ , resulta que  $r(t) \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Demostración: Se tiene

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{Y}X - Y\dot{X}}{X^2 + Y^2},$$

o bien que

$$\dot{\phi} = \frac{X(\dot{Y} + X) - Y(\dot{X} - Y)}{X^2 + Y^2}.$$

Utilizando la integral de Jacobi resulta que

$$\dot{\phi} = \left\{ \frac{1}{2} [(\dot{X}-Y)^2 + (\dot{Y}+X)^2] + C/2 - (1-m)/r_1 - m/r_2 - \frac{1}{2} m(1-m) \right\} / (X^2 + Y^2).$$

Se sabe (véase Szebehely [32, pag.151]) que para  $C > C_2$ , suficientemente grande, cualquier punto de la región  $R$  dista más de dos unidades del origen, y que  $C_2 > 3$  para  $0 < m < 1$ . Por consiguiente,  $r_1$  y  $r_2$  son mayores que 1, luego

$$C/2 - (1-m)/r_1 - m/r_2 - m(1-m)/2 > 0 .$$

Por lo tanto,  $\dot{\phi} > 0$  y (i) queda demostrado. Veamos (ii). Si  $t_1 = +\infty$ , en el instante  $t = t_0$ . Y al ser  $\phi(t)$  creciente para todo  $t$ , resulta que existe el límite de  $\phi(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . En conclusión, el límite de  $\dot{\phi}(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  es cero.

Es claro que  $r$  y  $\phi$  son las coordenadas polares del sistema sideral. Por consiguiente, se tiene:

$$C = 2M - 2h = 2r^2\dot{\phi} - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 - 2(1-m)/r_1 - 2m/r_2),$$

de donde

$$r^2 > \frac{C - 2(1-m)/r_1 - 2m/r_2}{(2 + \dot{\phi})\dot{\phi}} > \frac{C - 2}{(2 + \dot{\phi})\dot{\phi}} .$$

Tomando límites en esta desigualdad cuando  $t \rightarrow +\infty$ , se obtiene que  $r \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . //

Esta proposición nos dice que en el complementario de  $E_0$  sólo hay dos posibilidades, que el tercer cuerpo llegue al infinito con velocidad radial igual a cero (órbita parabólica para  $t \rightarrow +\infty$ ), o con velocidad radial mayor que cero (órbita hiperbólica para  $t \rightarrow +\infty$ ). Los conjuntos dentro del toro  $T$  que dan lugar a órbitas parabólicas e hiperbólicas se designan por  $P_0$  y  $H_0$ , respectivamente. Se tiene que  $H_0$  es un abierto.

Dado un punto  $(v_0, t_0, a_0)$  de  $T$ , y por lo tanto la órbita del tercer cuerpo  $x(t)$ ,  $y(t)$  que verifica (4.13), se define  $t_1$  como el cero de  $Y(t)$ , con  $X(t) < 0$ , más próximo a  $t_0$  siendo  $t_1 < t_0$ ; si  $t_1 > -\infty$ . En este caso, sean

$$v_1 = \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + \dot{y}^2(t_1)} ,$$

y

$$\alpha_1 = \begin{cases} \arccos(\dot{x}(t_1)/v_1) + t_1 & , \quad \text{si } v_1 \neq 0 , \\ 0 & \text{si } v_1 = 0 . \end{cases}$$

Entonces la aplicación  $f^{-1}$  envía  $(v_0, t_0, \alpha_0)$  a  $(v_1, t_1, \alpha_1)$ .

Sea  $E_1$  el dominio de definición de  $f^{-1}$ . Se tiene  $E_1 = f(E_0)$ . Como que  $E_1$  es el conjunto de las órbitas del tercer cuerpo que han cortado al semieje  $X < 0$  con anterioridad se dice que las órbitas de  $E_1$  son elípticas para tiempos decrecientes.

Análogamente a como se ha hecho para la aplicación  $f$ , se pueden definir las órbitas parabólicas e hiperbólicas para  $t \rightarrow -\infty$ . Los conjuntos respectivos se designan por  $P_1$  y  $H_1$ . Es claro que  $E_1$  y  $H_1$  son abiertos.

Proposición 4.4: Sea  $S$  la simetría definida sobre el toro  $T$  por  $(v_0, t_0, \alpha_0) \longmapsto (v_0, -t_0, \pi - \alpha_0)$ . Entonces se tiene:

(i)  $f^{-1} = S \circ f \circ S$ .

(ii)  $E_1 = S(E_0)$ ,  $P_1 = S(P_0)$  y  $H_1 = S(H_0)$ .

Demostración: El apartado (ii) es consecuencia inmediata del (i).

Veamos el (i). Sea  $\bar{v}_0$  ( $\bar{v}_0$ ) el vector velocidad sinódica (sideral); esto es,  $\bar{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)$  ( $\bar{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ ). Su módulo se indica por  $v_0$  ( $v_0$ ).

Sea  $C$  la aplicación  $(v_0, t_0, \alpha_0) \longmapsto (v_0, t_0, \beta_0)$  definida por

$$\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} \bar{v}_0 - \begin{pmatrix} 0 \\ r_0 \end{pmatrix} ,$$

$$\beta_0 = \arctg(Y_0/X_0) .$$

La aplicación  $C$  cambia la velocidad sinódica por la sidera (véanse las figuras 4.14 a y b); por lo tanto la órbita determinada por el punto  $(v_0, t_0, \alpha_0)$  es la misma que la determinada por  $(v_0, t_0, \beta_0)$ .

Sea  $f$  la aplicación  $f$  en las coordenadas  $(v_0, t_0, \alpha_0)$ ; esto es,  $f = C \circ f \circ C^{-1}$ .

De las figuras 4.14 se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 (v_1, t_1, \alpha_1) & \xrightarrow{S} & (v_1, -t_1, \pi - \alpha_1) \\
 \downarrow C & & \downarrow C \\
 (v_1, t_1, \beta_1) & & (v_1, -t_1, \pi - \beta_1) \\
 \downarrow \bar{f}^{-1} & & \downarrow \bar{f} \\
 (v_0, t_0, \beta_0) & & (v_0, -t_0, \pi - \beta_0) \\
 \downarrow C^{-1} & & \downarrow C^{-1} \\
 (v_0, t_0, \alpha_0) & \xrightarrow{S} & (v_0, -t_0, \pi - \alpha_0)
 \end{array}$$

y por consiguiente  $f^{-1} = S \circ f \circ S$ .

//

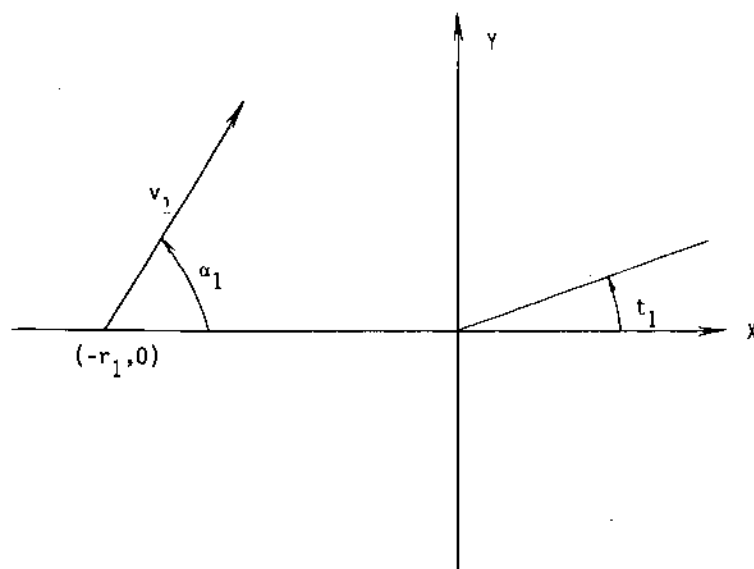


Figura 4.14 a . El punto  $(v_1, t_1, \alpha_1)$ .

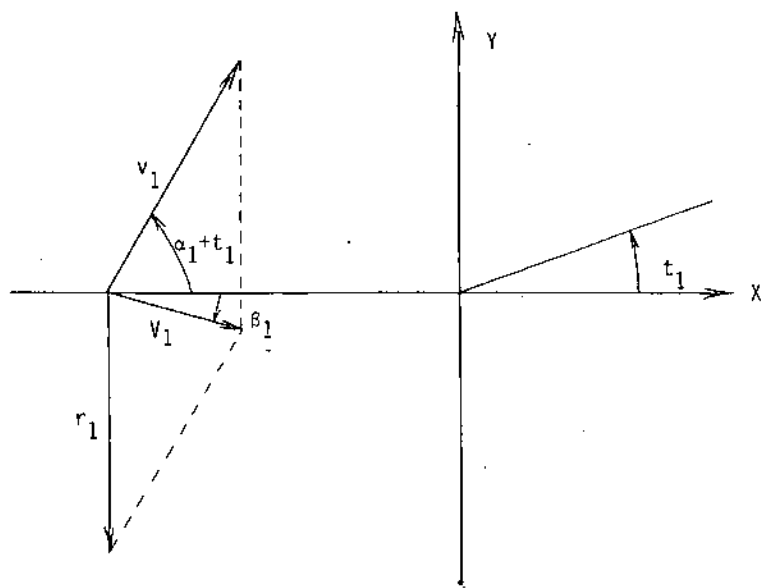


Figura 4.14 b .  $C(v_1, t_1, \alpha_1) = (v_1, t_1, \alpha_1)$  .

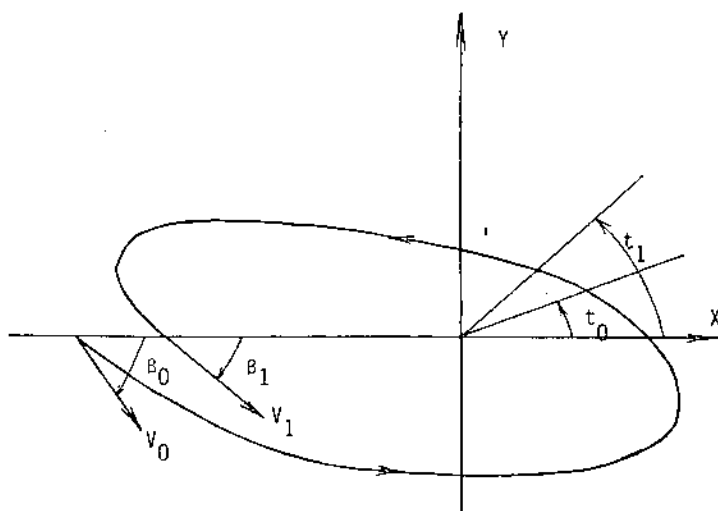


Figura 4.14 c .  $\bar{F}^{-1}(v_1, t_1, \beta_1) = (v_0, t_0, \beta_0)$  (Orbita sideral)

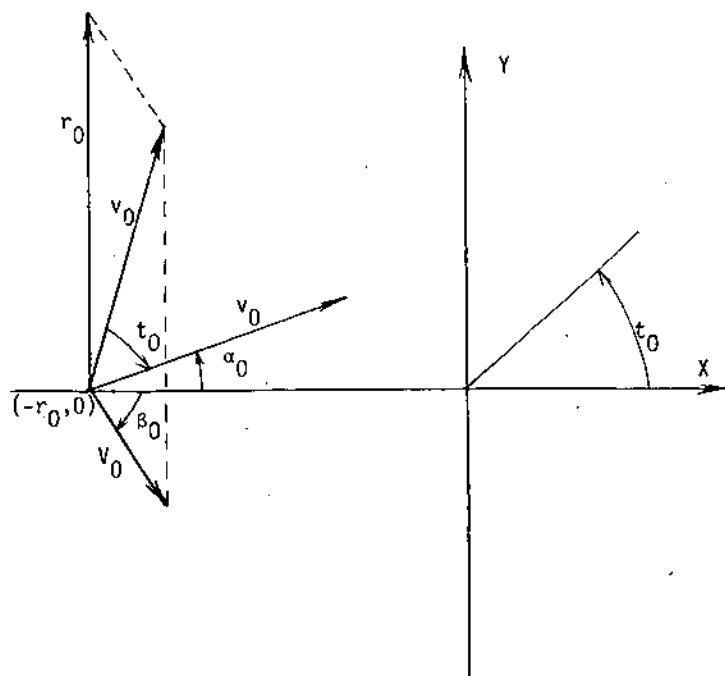


Figura 4.14 d .  $C^{-1}(v_0, t_0, \beta_0) = (v_0, t_0, \alpha_0)$  .

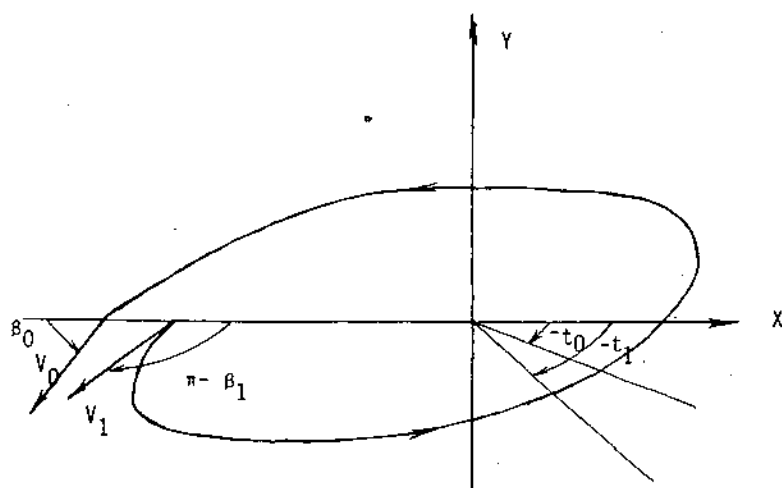


Figura 4.14 e .  $\bar{F}(v_1, -t_1, \pi - \beta_1) = (v_0, -t_0, \pi - \beta_0)$  (Orbita sideral)

#### (4.7) Estudio del movimiento en el entorno del infinito.

Se extenderá el estudio hecho para el movimiento del tercer cuerpo en el entorno del infinito para  $m = 0$ , al caso en que  $0 < m < 1$ . Dicho estudio es necesario para poder establecer una proposición análoga a la 4.2 para valores de  $0 < m < 1$ .

Si  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  es la posición del tercer cuerpo, la ecuación diferencial del movimiento (4.1) se puede escribir

$$\ddot{z} = z - 2iz - z/|z|^3 - g(z), \quad (4.14)$$

con

$$g(z) = (1-m)(z-m)/|z-m|^3 + m(z+1-m)/|z+1-m|^3 - z/|z|^3.$$

La función  $g(z)$  es del orden de  $O(|z|^{-4})$  para  $|z| \rightarrow \infty$ .

Nótese que la ecuación (4.14) sin la función  $g(z)$  es la ecuación (4.6) para  $m = 0$ .

La integral de Jacobi se escribe ahora como

$$C = |z|^2 + 2/|z| - |\dot{z}|^2 + m(1-m) + v(z),$$

con

$$v(z) = 2((1-m)/|z-m| + m/|z+1-m| - 1/|z|),$$

que sin la función  $v(z)$  también es la integral de Jacobi para  $m = 0$ . La función  $v(z)$  es del orden de  $O(|z|^{-2})$  para  $|z| \rightarrow +\infty$ .

El cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} z &= (2/q^2)e^{i\theta}, \\ \dot{z} &= [p + i(q^2\omega/2 - 2/q^2)]e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

con  $0 < q < +\infty$ , lleva el infinito al origen. Este cambio de coordenadas se debe a McGehee [21]. Se utiliza para probar que los conjuntos de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  y para  $t \rightarrow -\infty$  poseen estructura de variedad analítica. El cambio de coordenadas (4.15) es el dado por las ecuaciones (4.9) y (4.10) para  $m = 0$ .



Las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  son aquellas para las que  $|z| \rightarrow +\infty$ , y la componente radial de  $\dot{z}$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$ . El cambio (4.15) transforma las órbitas parabólicas en aquellas que verifican  $q \rightarrow 0$ , y  $p \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , ya que  $q = \sqrt{2/|z|}$ , y  $p = d|z|/dt$ .

En las nuevas coordenadas la ecuación del movimiento (4.14) se puede escribir:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -q^3 p/4, \\ \dot{\theta} &= -1 + q^4 \omega/4, \\ \dot{p} &= -q^4/4 + q^6 \omega^2/8 - \operatorname{Re}\{e^{-i\theta} g(2e^{i\theta}/q^2)\}, \\ \dot{\omega} &= -2\operatorname{Im}\{e^{-i\theta} g(2e^{i\theta}/q^2)\}/q^2,\end{aligned}\quad (4.16)$$

y la integral de Jacobi como

$$C = q^2 - p^2 - q^4 \omega^2/4 + 2\omega + m(1-m) + v(2e^{i\theta}/q^2). \quad (4.17)$$

Se observa que las ecuaciones (4.16) son las ecuaciones (4.11) si  $m = 0$  y  $\omega = M$ . Es claro que las ecuaciones (4.16) tienen una solución  $2\pi$ -periódica.

$$\begin{aligned}q &= 0, \\ p &= 0, \\ \omega &= C/2.\end{aligned}$$

Cerca de esta solución se pueden tomar  $(q, p, \theta)$  como coordenadas y resolver la integral de Jacobi para  $\omega$ :

$$\omega = C/2 + m(1-m)/2 + p^2/2 - q^2/2 + C^2 q^4/32 + O_6,$$

donde  $O_6$  indica términos de orden seis en  $p$  y  $q$ ; además  $O_6$  es una función  $2\pi$ -periódica en  $\theta$ .

Eliminando  $\omega$  de las ecuaciones (4.16) se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -q^3 p/4, \\ \dot{p} &= -q^4/4 + K^2 q^6/32 + K g^6 p^2/16 + (s(m, \theta) - K/16) q^8 + O_{10}, \\ \dot{\theta} &= -1 + K q^4/8 - q^6/8 + q^4 p^2/8 + K^2 q^8/128 + O_{10},\end{aligned}\quad (4.18)$$

donde

$$K = C + m(m-1) ,$$

$$s(m, \theta) = 3m(1-m)(1-3\cos^2\theta)/32 ,$$

y  $0_{10}$  es una función  $2\pi$ -periódica en  $\theta$ .

De nuevo las ecuaciones (4.18) dan para  $m = 0$ , las ecuaciones (4.11).

La aplicación de Poincaré de la órbita periódica  $q = 0$ ,  $p = 0$ , viene dada por (véase McGehee [21])

$$P(q, p) = (q - \pi q^3[p + r_1(q, p)]/2, p - \pi q^3[q + r_2(q, p)]/2)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son reales, analíticas y de tercer orden en  $p$  y  $q$ .

Si para todo abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  que contenga al origen se define  $A^+(P, U)$  como el conjunto:

$$\{a \in U \mid P^k(a) \in U \text{ para todo } k > 0, P^k(a) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow +\infty\}.$$

Se tiene que las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  en  $U$ , son exactamente  $A^+(P, U)$ . McGehee ha demostrado que existe un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  que contiene al origen y tal que  $A^+(P, U)$  es una curva analítica.

Análogamente se puede definir para todo abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  que contenga al origen  $A^-(P, U)$  como el conjunto:

$$\{a \in U \mid P^{-k}(a) \in U \text{ para todo } k > 0, P^{-k}(a) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow +\infty\}.$$

Entonces  $A^-(P, U)$  son todas las órbitas prarabólicas para  $t \rightarrow -\infty$ , y  $A^-(P, U)$  para un cierto  $U$  es una curva analítica.

El estudio de la estructura local de  $P$  da la figura siguiente:

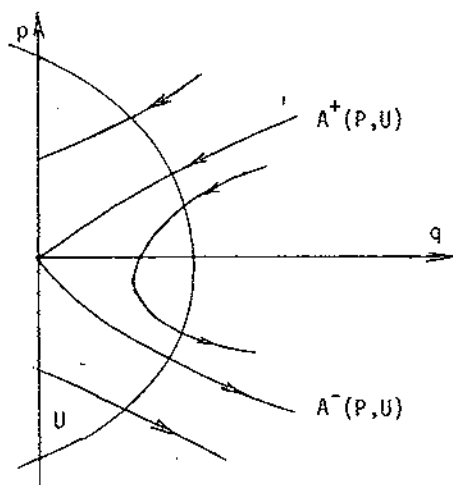


Figura 4.15

Si se elimina la variable  $t$  en el sistema diferencial (4.18) se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{d\theta} &= q^3 p/4 + Kq^7 p/32 + O_{10}, \\ \frac{dp}{d\theta} &= q^4/4 - K^2 q^6/32 - Kq^6 p^2/16 + 3Kq^8/32 - s(m,\theta)q^8 + O_{10}.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Al hacer girar la figura 4.15 alrededor del eje  $p$  nos da el comportamiento del flujo del sistema diferencial (4.19) en el entorno del punto  $q = 0$ ,  $p = 0$ . Así, las órbitas determinadas por los puntos del primer cuadrante que están por encima de la curva  $A^+(P,U)$  tienden a puntos del tipo  $q = 0$ ,  $p > 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ ; es decir, son órbitas hiperbólicas para  $t \rightarrow +\infty$ . De esta manera se puede hacer el estudio completo de la naturaleza de las órbitas del tercer cuerpo en el entorno del infinito obteniéndose:

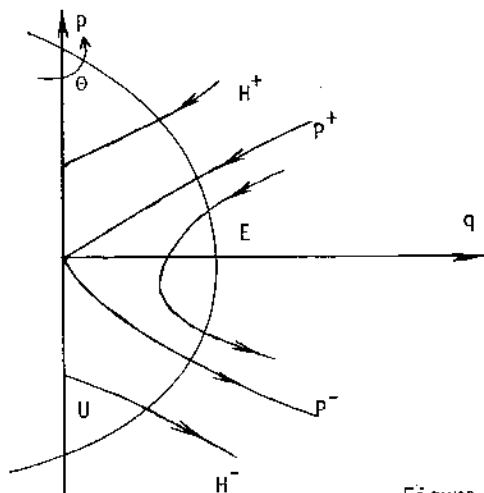


Figura 4.16

Compárese esta figura con la figura 4.13 en que  $m = 0$ .

Si se hace el cambio  $d\bar{\theta} = q^3 d\theta$ , la parte lineal del sistema (4.19) deja de ser cero en el punto  $q = 0$ ,  $p = 0$ . Y dicho punto es un punto hiperbólico del sistema. Por consiguiente, el teorema de la variedad estable o de Hartman [12, pag.245-246] nos dice que exis-

en dos variedades invariantes que pasan por el punto  $q = 0$ ,  $p = 0$ ; una estable y la otra inestable. Es claro que la variedad estable (inestable) da lugar a la curva  $A^+(P,U)$  ( $A^-(P,U)$ ) de la aplicación de Poincaré, y es topológicamente equivalente a la superficie que se obtiene al girar alrededor del eje  $p$  dicha curva.

El sistema diferencial (4.16) es invariante respecto de la simetría  $(q,p,\theta,\omega,t) \longrightarrow (q,-p,-\theta,\omega,-t)$ , y por lo tanto lo es el sistema (4.19) respecto de  $(q,p,\theta) \longrightarrow (q,-p,-\theta)$ . En definitiva, si la variedad estable viene dada por la ecuación

$$q = F(p,\theta), \quad (4.20)$$

resulta que la variedad inestable es

$$q = F(-p,-\theta). \quad (4.21)$$

Es laborioso, pero no difícil, verificar que

$$F(p,\theta) = \sum_{0 \leq n < \infty} a_n(\theta) p^n, \quad (4.22)$$

con

$$a_0(\theta) = a_2(\theta) = a_4(\theta) = a_6(\theta) = 0,$$

$$a_1(\theta) = 1,$$

$$a_3(\theta) = K^2/32,$$

$$a_5(\theta) = [7K^4/64 + m(m-1)]/32,$$

$$a_7(\theta) = 3K^2[11K^4/64 + 3m(m-1)]/1024,$$

$$a_8(\theta) = 9m(m-1)\text{sen}(2\theta)/128,$$

$$\dots$$

En la sección 2.6 se ha detallado la obtención de la expresión (4.22). De donde se deduce que la expresión calculada para (4.22) es válida sólo en el entorno de  $q = 0$ ,  $p = 0$ .

#### (4.8) Los conjuntos $P_0$ y $P_1$ .

En el apartado anterior se ha visto que el conjunto de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  dentro del espacio  $(q,p,\theta,t)$  para una

constante de Jacobi fijada y en un entorno  $U$  del infinito es difeomorfo analíticamente a  $\{ (q,p,\theta,t) \mid q = F(p,\theta) \}$ . Por ser  $\theta$  y  $t$  variables angulares la intersección de este conjunto con la hipersuperficie  $q = q_0$  siendo  $q_0 > 0$ , suficientemente pequeño, es un toro 2-dimensional  $T^2$ . Esta intersección es transversal, ya que en caso contrario en algún punto del toro 2-dimensional se tendría  $\dot{q} = 0$ , y la órbita parabólica no llegaría al infinito.

El toro  $T$  definido en la sección 4.3, corta al entorno  $U$  del infinito en la hipersuperficie

$$\theta + t_0 = \pi, \quad (4.23)$$

como se deduce de la figura 4.6 y de las ecuaciones (4.4) y (4.15). De hecho el toro  $T$  está contenido en dicha hipersuperficie. Por otra parte la intersección de  $T^2$  con la citada hipersuperficie es una circunferencia. Hasta ahora al referirnos a  $T$  se han utilizado las coordenadas  $(v_0, t_0, \alpha_0)$ , que son equivalentes a  $(r_0, t_0, \alpha_0)$  en virtud de las ecuaciones (4.4). Teniendo en cuenta (4.23) y

$$\begin{aligned} r_0 &= 2/q^2 \quad \text{con } 0 < q < +\infty, \\ p &= v_0 \cos \alpha_0, \end{aligned}$$

resulta que el toro  $T^2$  de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  de la hipersuperficie  $q = q_0$ , corta al toro  $T$  en una curva difeomorfa analíticamente a una circunferencia. Esta circunferencia transportada por el flujo cuando el tiempo decrece da lugar a una superficie difeomorfa analíticamente a un cilindro. Este cilindro es el conjunto de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  del toro  $T$ . El teorema de unicidad para las soluciones de una ecuación diferencial nos dice que el cilindro está bien definido.

Análogamente el conjunto de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow -\infty$  es otro cilindro dentro del toro sólido. En resumen se tiene el teorema siguiente:

**Teorema 4.1:** Si  $0 < m < 1$  el toro  $T$  de las órbitas del tercer cuerpo que cortan al semieje  $X < 0$ , queda partido por el cilindro  $P_0$  de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  en dos componentes, una formada por las órbitas hiperbólicas para  $t \rightarrow +\infty$  y la otra por las elípticas para

tiempos crecientes. Una situación análoga se tiene para el conjunto de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow -\infty$ .

Este teorema generaliza la proposición 4.2 para valores de  $0 < m < 1$ . En el caso  $m = 0$  el cilindro de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$  coincide con el de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow -\infty$ . Este fenómeno no se da para valores de  $0 < m < 1$  como se verá en la sección siguiente. Estos cilindros se pueden mirar como las variedades estable e inestable de la órbita periódica parabólica en el infinito asociada al punto "hiperbólico"  $q = 0$ ,  $p = 0$  del sistema diferencial (4.18). El hecho de que estas variedades se corten pero no coincidan, pone de manifiesto la existencia de puntos homoclínicos. Puntos que no existen en el caso  $m = 0$ , como se desprende de la figura 4.13. Los resultados principales sobre la evolución final del tercer cuerpo se deducirán al estudiar el entorno de estos puntos homoclínicos.

#### (4.9) Un resultado fundamental para la existencia de movimientos quasi-aleatorios.

Las figuras 4.9 y 4.11 ponen de manifiesto que dentro del toro  $T$  el cilindro de las órbitas parabólicas para  $m = 0$  corta al cilindro  $\alpha_0 = \pi/2$  en una circunferencia siempre que  $C > \sqrt[3]{32}$ .

Para valores de  $C$  suficientemente grandes y una masa  $0 < m < 1$  cualquiera, el problema restringido plano y circular de 3 cuerpos en la región  $R$  de la figura 4.5, se acerca tanto como se quiera al caso  $m = 0$ , puesto que las ecuaciones del movimiento (4.1) tienden a las (4.6) en la región  $R$  cuando  $C$  tiende a infinito. Por lo tanto, para valores de  $C$  suficientemente grandes los cilindros de las órbitas parabólicas para  $t \rightarrow +\infty$ , y para  $t \rightarrow -\infty$  cortan al cilindro  $\alpha_0 = \pi/2$  en una curva difeomorfa analíticamente a una circunferencia. En un entorno de esta circunferencia el cilindro  $P_0$  se puede escribir como

$$v_0 = v(t_0, \alpha_0) . \quad (4.24)$$

Se sabe que  $P_1 = S(P_0)$  siendo  $S$  la simetría que aplica  $(v_0, t_0, \alpha_0)$  en  $(v_0, -t_0, \pi - \alpha_0)$ . Por lo tanto, el cilindro  $P_1$  puede escribirse en dicho entorno como

$$v_0 = v(-t_0, \pi - \alpha_0). \quad (4.25)$$

De (4.24) y (4.25) se tiene que las circunferencias

$$\gamma_0 = P_0 \cap (\alpha_0 = \pi/2) \text{ y } \gamma_1 = P_1 \cap (\alpha_0 = \pi/2),$$

se cortan en dos puntos  $t_0 = 0$ , y  $t_0 = \pi$ .

**Teorema 4.2:** Los cilindros  $P_0$  y  $P_1$  cortan a la superficie  $\alpha_0 = \pi/2$ , en dos curvas difeomorfas analíticamente a dos circunferencias, que a su vez se cortan no tangencialmente en los puntos  $t_0 = 0$ , y  $t_0 = \pi$ ; si  $m$  es suficientemente pequeño.

**Demostración:** Los cilindros  $P_0$  y  $P_1$  son respectivamente las variedades estable e inestable del punto "hiperbólico"  $q = 0$ ,  $p = 0$ , del sistema diferencial (4.9). Las curvas  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  en las coordenadas  $(q, \theta, p)$  se expresan por  $P_0 \cap (p=0)$  y  $P_1 \cap (p=0)$ , respectivamente. Y los puntos de corte  $t_0 = 0$ , y  $t_0 = \pi$ , equivalen a los puntos  $\theta = 0$ , y  $\theta = \pi$ . De (4.24) y (4.25), o bien de (4.20) y (4.21), resulta que  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  se cortan tangencialmente en  $\theta = 0$ , si y sólo si, se cortan tangencialmente en  $\theta = \pi$ .

Sea  $p = 0$ ,  $q = q(\theta, m)$  la ecuación de la curva  $\gamma_0$ . Debido a la simetría existente entre  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  para ver que no se cortan tangencialmente en  $\theta = \pi$ , será suficiente con calcular

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} q(\theta, m) \right|_{\theta=\pi},$$

y ver que su valor es distinto de cero. El cálculo se hace en el apéndice III.

//

(4.10) Primeros resultados sobre las evoluciones finales en el problema restringido plano y circular de 3 cuerpos.

Al igual que en el problema restringido, elíptico y rectilíneo de 3 cuerpos se tiene para nuestro problema que

$$HE^- = H_1, \quad HE^+ = H_0, \quad PE^- = P_1, \text{ y } PE^+ = P_0.$$

El teorema 4.2 establece que en un entorno de la circunferencia  $\gamma_0$  hay evoluciones finales del tipo :

$$HE^- \cap HE^+, \quad HE^- \cap PE^+, \quad PE^- \cap HE^+, \text{ y } PE^- \cap PE^+.$$

Para  $m = 0$  no se dan los tipos de movimiento  $HE^- \cap PE^+$ , y  $PE^- \cap HE^+$ , puesto que  $P_0 = P_1$ .

(4.11) Evoluciones finales de tipo oscilatorio.

Se estudiará el entorno de la circunferencia  $\gamma_0$  para ver que en esta región hay movimientos con evolución final oscilatoria. Para ello se asociará a cada órbita  $X(t)$ ,  $Y(t)$  del tercer cuerpo una sucesión de enteros. Si para  $t = t_0$ ,  $Y(t_0) = 0$  y  $X(t_0) < 0$ , se consideran todos los ceros  $t_n$  de  $Y(t) = 0$  con  $X(t) < 0$ , ordenados; es decir,  $t_n < t_{n+1}$ . Se pueden dar los cuatro casos que se tenían en el problema restringido, elíptico y rectilíneo (véase sección (3.1)). Por lo tanto, los enteros

$$a_n = \left[ \frac{t_n - t_{n+1}}{2} \right]$$

miden entre dos pasos consecutivos de  $m_3$  por el semieje  $X < 0$ , el número de vueltas enteras que han dado los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$ . De esta manera, se asocia a cada órbita del tercer cuerpo una sucesión de enteros que será de uno de los tipos (a), (b), (c) o (d) definidas en la sección (3.1).

Teorema 4.3 (Teorema C): Si la masa  $m$  del segundo cuerpo no es cero, existe un entero  $b = b(m)$  tal que cualquier sucesión  $\{b_n\}$  de uno de



los cuatro tipos anteriores con  $b_n \geq b$ , corresponde a una órbita del tercer cuerpo.

Este teorema es fundamental para poner en evidencia la existencia de todas las posibles evoluciones finales del problema restringido, plano y circular de 3 cuerpos. Las evoluciones finales que se pueden deducir directamente o por continuidad a partir del teorema están detalladas en la tabla 3.2.

#### (4.12) Resultados sobre el comportamiento del tercer cuerpo en el entorno del infinito.

Para  $m = 0$ , la aplicación  $f$  viene dada por

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0, \\ t_1 &= t_0 + T(v_0, \alpha_0), \\ \alpha_1 &= \alpha_0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

con

$$T(v_0, \alpha_0) = 2\pi(-1/2h)^{3/2},$$

y

$$h = r_0^2 - [r_0(r_0^3 - Cr_0 + 2)]^{1/2} \sin \alpha_0 - C/2.,$$

siendo  $r_0$  la solución de la ecuación

$$v_0^2 = r_0^2 + 2/r_0 - C.$$

Es claro que  $f$  está definida para valores de  $h < 0$ , ya que para valores de  $h \geq 0$  las órbitas son de escape. Por lo tanto, para  $m = 0$ , el dominio de definición de  $f$ ,  $E_0$  es difeomorfo analíticamente a un toro sólido sin frontera como se observa en la figura 4.11.

De (4.26) y de la figura 4.11 se tiene que  $E_1 = f(E_0) = E_0$ , y que la imagen por  $f$  de una curva que llegue hasta la frontera del toro sólido  $E_0$ , es una curva en  $E_1$  que espirala hacia su frontera  $P_1$ . El lema siguiente nos da la misma propiedad para  $0 < m < 1$ .

Lema 4.2: Sea  $C = \{ (v_0, t_0, \alpha_0) \mid v_0 = v_0(s), t_0 = t_0(s), \alpha_0 = \alpha_0(s) \text{ con } 0 \leq s \leq 1 \}$  un arco tal que  $C$  tiene su extremo correspondiente a  $s = 0$  sobre  $P_0$ , y en este extremo la curva  $C$  y  $P_0$  no son tangenciales. Entonces la curva imagen  $f(C) = \{ (v_1, t_1, \alpha_1) \mid v_1 = v_1(s), t_1 = t_1(s), \alpha_1 = \alpha_1(s) \text{ con } 0 \leq s \leq 1 \}$  se acerca a  $P_1$  espiralando; es decir,  $t_1(s) \rightarrow +\infty$  cuando  $s \rightarrow 0$ .

La demostración de este lema es consecuencia de que en el entorno de la órbita periódica en el infinito  $q = 0, p = 0$ , la ecuación diferencial que nos da el movimiento es, en primera aproximación, la del problema de Sitnikov, a excepción de una rotación uniforme debida a estar trabajando con variables obtenidas a partir del sistema sinódico, y a que la región en estudio del espacio de fases tiene en nuestro problema una dimensión más que en el de Sitnikov.

#### (4.13) Demostración del teorema principal.

Se llamará tubo a todo conjunto que sea homeomorfo a

$$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq x^2 + y^2 \leq s \},$$

con  $0 < r < s$ ; y tubo cerrado a un tubo en que  $r' \leq z \leq s'$  con  $r' < s'$ .

Se define  $P'_0$  como uno de los subconjuntos de puntos  $(v_0, t_0, \alpha_0)$  del toro  $T$  tal que

- (a)  $P'_0$  es un tubo.
- (b) La frontera de  $P'_0$  homeomorfa a  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = s \}$  es  $P_0$ .
- (c)  $P'_0 - P_0$  está contenido en  $E_0$ .

Para  $a > 0$  suficientemente pequeño se define  $P'_0(a)$  como el conjunto de puntos  $(v_0, t_0, \alpha_0)$  de  $P'_0$  tales que  $\pi/2 - a \leq \alpha \leq \pi/2 + a$ . Para valores de  $C$  suficientemente grandes o para valores de  $m$  suficientemente pequeños, nuestro problema está tan cerca como se quiera del caso  $m = 0$ , por consiguiente  $P'_0(a)$  es un tubo cerrado para valores de  $a > 0$  suficientemente pequeños. Si  $0 < b < \pi$  se define  $P'_0(b)$  como el subconjunto de puntos de  $P'_0$  tales que  $-b \leq t_0 \leq b$ . De manera similar se define  $P'_1$ ,  $P'_1(a)$  y  $P'_1(b)$ .

Para  $m = 0$  la figura 4.17 nos da (siempre salvo un homeomorfismo) el tubo cerrado  $P'_0(a)$  y el conjunto  $P'_0(a) \cap (r \leq t_0 \leq s)$  que aparece rayado. La figura 4.18 da el tubo cerrado  $P'_1(a) = P'_0(a)$  y el conjunto  $f(P'_0(a) \cap (r \leq t_0 \leq s)) \cap P'_1(a)$  que aparece rayado, y es una "espiral cilíndrica" contenida dentro de  $P'_1(a)$ , que "espirala" hacia la frontera de  $P'_1(a)$ .

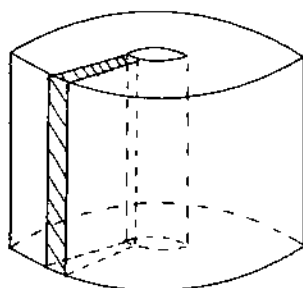


Figura 4.17

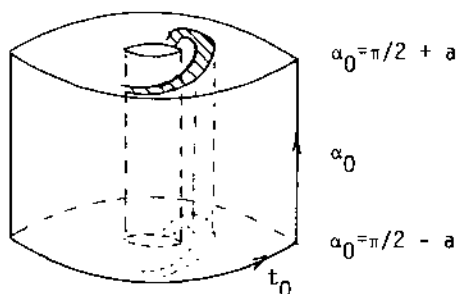


Figura 4.18

Las dos curvas homeomorfas a circunferencias que se obtienen al restringir los cilindros  $P_0$  y  $P_1$  a la superficie  $\alpha_0 = \pi/2$ , se cortan en el punto  $p$  de coordenadas  $\alpha_0 = \pi/2$ ,  $t_0 = 0$  tal como se indica en la figura 4.19.

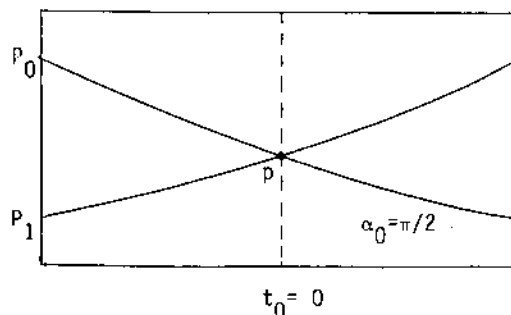


Figura 4.19

Para  $0 < m < 1$  se elige  $P'_0$  y  $b$  suficientemente pequeño de manera que la intersección del conjunto  $R$  igual a la adherencia de la componente conexa de  $P'_0(b) \cap P'_1(b)$  que contiene al punto  $p$ , con la superficie

$$S = \{ (v_0, t_0, \alpha_0) \in T \mid \alpha_0 = \pi/2 \text{ y } -b \leq t_0 \leq b \},$$

tenga la forma siguiente:

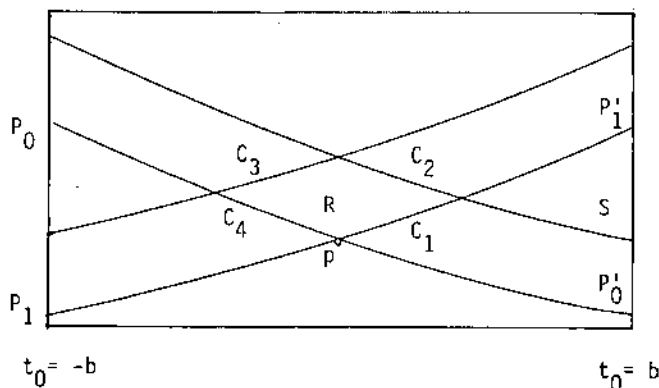


Figura 4.20

Así, la intersección de  $R$  con la superficie  $S$  es una región limitada por cuatro curvas  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ . En virtud del lema 4.2,  $f(R)$  corta a  $R \cap S$  en las regiones rayadas de la figura 4.21.

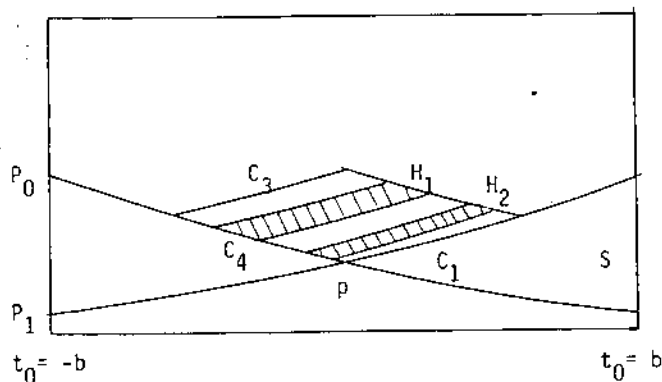


Figura 4.21

Por lo tanto, la intersección de  $f(R) \cap R$  con la superficie  $S$  está formada por una infinidad de "bandas" que a menos de un número finito están limitadas entre los lados  $C_2$  y  $C_4$ . Estas bandas limitadas entre  $C_2$  y  $C_4$  se designan por  $H_1, H_2, \dots$  comenzando la numeración a partir de la más próxima al lado  $C_3$ . Por ser  $b < \pi$  cada banda de  $f(R) \cap R \cap S$  pertenece a una componente conexa de  $f(R) \cap R$  distinta. La componente de  $f(R) \cap R$  que corta a  $S$  en la banda  $H_n$  se designará también como la banda  $H_n$  de  $R$ . Se definen las bandas verticales  $V_n$  de  $R$  como  $V_n = S(H_n)$ , donde  $S$  es la simetría  $(v_0, t_0, 0) \rightarrow (v_0, -t_0, \pi - \alpha_0)$ . Se puede ver que  $f(V_n)$  es igual a  $H_n$ , siendo la demostración análoga a la del problema restringido elíptico y rectilíneo (véase la sección (3.5)). Las curvas frontera  $C_1$  y  $C_4$  para  $R \cap S$  corresponden a la restricción sobre  $S$  de dos superficies frontera en  $R$ , superficies que se denotan por  $V_\infty$  y  $H_\infty$  respectivamente. Es claro que  $H_\infty = P_1 \cap \partial R$  y  $V_\infty = P_0 \cap \partial R$ , siendo  $\partial R$  la frontera de  $R$ .

Se dirá que un subconjunto  $H$  de  $R$  es una banda horizontal de  $R$  si es homeomorfa a alguna banda horizontal  $H_n$  de  $R$ . Similarmente se definen las bandas verticales de  $R$ .

Se dirá que un subconjunto  $H$  de  $R \cap S$  es una banda horizontal de  $R \cap S$  si es homeomorfa a alguna banda horizontal  $H_n$  de  $R \cap S$ . Análogamente se definen las bandas verticales en  $R \cap S$ .

Lema 4.3: Si  $V$  es una banda vertical de  $R$  contenida dentro de alguna banda  $V_m$ ,

$$V'_n = V_n \cap f^{-1}(V),$$

es una banda vertical de  $R$  para todo  $n$  natural.

Demostración: Es suficiente ver que  $V'_n$  intersección con  $S$  es una banda vertical de  $R \cap S$ . En efecto, el hecho de que  $f(V_n) = H_n$  conservando las fronteras, y que  $f$  sea un homeomorfismo hace que  $V'_n = f^{-1}(V \cap H_n)$  intersección  $S$  sea una banda vertical de  $R \cap S$  (véase la figura 4.22).

//



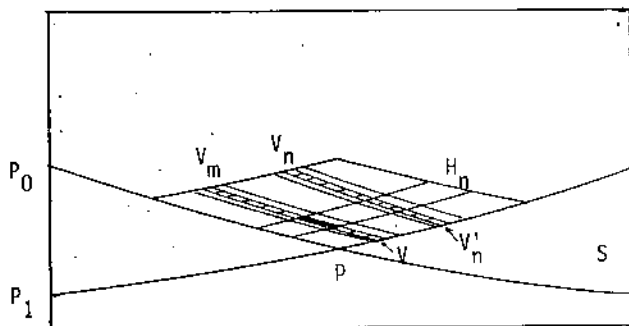


Figura 4.22

De la misma manera, se demuestra:

Lema 4.4: Si  $H$  es una banda horizontal de  $R$  contenida dentro de alguna banda  $H_m$ ,

$$H'_n = H_n \cap f(H),$$

es una banda horizontal de  $R$  para todo  $n$  natural.

El siguiente lema es básico para la demostración del teorema 4.3.

Lema 4.5: (i) Para una sucesión del tipo (a) :  $(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$  existe al menos un punto  $p \in R$  tal que  $f^{-m}(p) \in V_{a_m}$  para todo entero  $m$ .

(ii) Para una sucesión del tipo (b) :  $(a_k, a_{k+1}, \dots)$  con  $a_k = \infty$ , y  $k \leq 0$  existe al menos un punto  $p \in R$  tal que  $f^{-m}(p) \in V_{a_m}$  para todo entero  $m \geq k$ .

(iii) Propiedades equivalentes a las dos anteriores se tienen para las sucesiones del tipo (c) y (d).

Demostración: (i) Dada una sucesión del tipo (a) se definen recursivamente para  $n \geq 0$  los conjuntos :

$$V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}} = V_{a_0} \cap f^{-1}(V_{a_{-1} \dots a_{-n}}). \quad (4.27)$$

El lema 4.3 nos dice que  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}}$  es un tubo vertical. De la definición (4.27) se tiene :

$$\begin{aligned} V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}} &= \{ p \in R \mid f^m(p) \in V_{a_{-m}} \text{ para } 0 \leq m \leq n \} \\ &= \{ p \in R \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para } -n \leq m \leq 0 \} \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}} \subset V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n+1}}$$

Es claro que los conjuntos  $V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}}$  son cerrados contenidos en el compacto  $R$ , y que cualquier intersección de ellos en número finito no es vacía; por lo tanto:

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}} = \{ p \in R \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para } m = 0, -1, -2, \dots \} \neq \emptyset.$$

Análogamente, se definen los conjuntos :

$$H_{a_1 a_2 \dots a_n} = H_{a_1} \bigcap f(H_{a_2 \dots a_n}),$$

que satisfacen :

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{+\infty} H_{a_1 a_2 \dots a_n} &= \{ p \in R \mid f^{-m+1}(p) \in H_{a_m} \text{ para } m = 1, 2, \dots \} \\ &= \{ p \in R \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para } m = 1, 2, \dots \} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Los conjuntos cerrados

$$C_{a_{-n} \dots a_0 \dots a_m} = V_{a_0 a_{-1} \dots a_{-n}} \bigcap H_{a_1 a_2 \dots a_m},$$

están contenidos en el compacto  $R$ , y cualquier intersección de ellos en número finito es no vacía; por consiguiente :

$$\bigcap_{\substack{1 \leq n < +\infty \\ 0 \leq m < +\infty}} C_{a_{-n} \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots a_m} \neq \emptyset.$$

Es decir,

$$\{ p \in R \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para todo entero } m \} \neq \emptyset.$$

(ii) Para una sucesión del tipo (b) es claro que la parte  $a_1, a_2, \dots$  de la sucesión define el conjunto

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} H_{a_1 a_2 \dots a_n} = \{ p \in R \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para } m = 1, 2, \dots \} \neq \emptyset.$$

Por otro lado, el resto de la sucesión  $a_k, a_{k+1}, \dots, a_0$  permite definir:

$$\begin{aligned} V_{a_0 a_{-1} \dots a_k} &= V_{a_0} \bigcap f^{-1}(V_{a_{-1} \dots a_k}) \\ &= V_{a_0} \bigcap f^{-1}(V_{a_{-1}} \bigcap f^{-1}(V_{a_{-2}} \bigcap \dots \bigcap f^{-1}(V_{a_k} \bigcap f^{-1}(V_{\infty})) \dots)) \\ &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Por razonamientos similares al caso (i) se tiene que

$$V_{a_0 a_{-1} \dots a_k} \bigcap \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} H_{a_1 a_2 \dots a_n} \right) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto,

$$\{ p \in R \mid f^{-m}(p) \in V_{a_m} \text{ para todo entero } m \geq k \} \neq \emptyset.$$

//

Utilizando el lema 4.5, la demostración del teorema 4.3 es idéntica a la del teorema 3.1 para el problema restringido, rectilíneo y elíptico.

#### (4.14) Resultados numéricos.

El teorema 4.2 establece que la variedad estable  $P_0$  (de ecuación  $q = F(p, \theta)$ ) y la inestable  $P_1$  (de ecuación  $q = F(-p, -\theta)$ ) de la órbita periódica  $q = 0$ ,  $p = 0$ , cortan al plano  $p = 0$  en dos curvas difeomorfas analíticamente a dos circunferencias que se designan por  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ , respectivamente. Y que dichas curvas se cortan no tangencialmente en los puntos  $\theta = 0$ , y  $\theta = \pi$ .

La ecuación (4.22) nos da la expresión analítica de  $q = F(p, \theta)$  en el entorno de  $q = 0$ ,  $p = 0$  (véanse las figuras 4.25 a y b).



Si se utiliza dicha expresión, la integración numérica de las órbitas parabólicas que constituyen las variedades estable e inestable, permite determinar las curvas  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ . Para  $m = 1/2$  y  $C = 4.5$ , se ha obtenido, empleando coordenadas sidéreas en el cálculo, que  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son casi dos circunferencias (véanse las figuras 4.26 a y b) que se cortan no tangencialmente en cuatro puntos, correspondientes a los valores de  $\theta = 0, \pi/2, \pi$  y  $3\pi/2$  (véase la figura 4.27).

Distintas experiencias numéricas confirman que lo habitual es que  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  no coincidan:

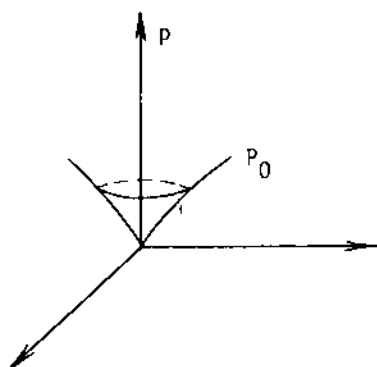


Figura 4.25 a

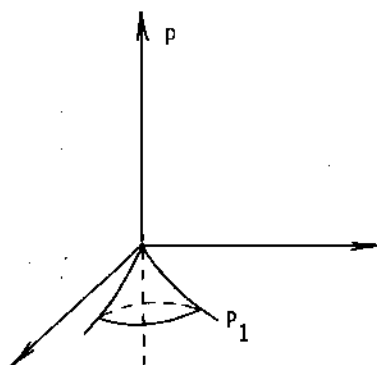


Figura 4.25 b

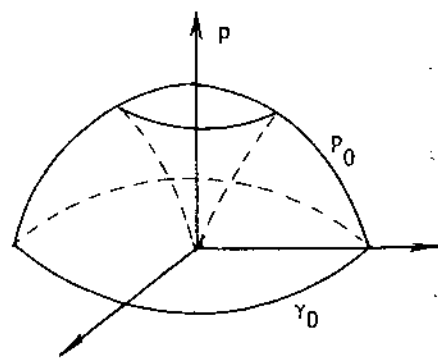


Figura 4.26 a

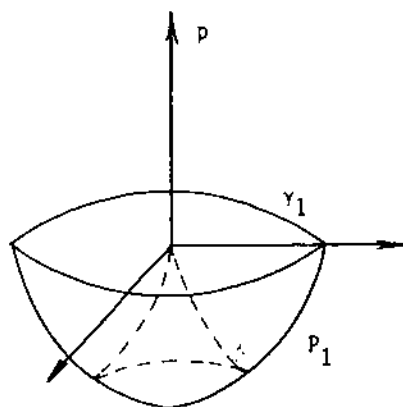


Figura 4.26 b

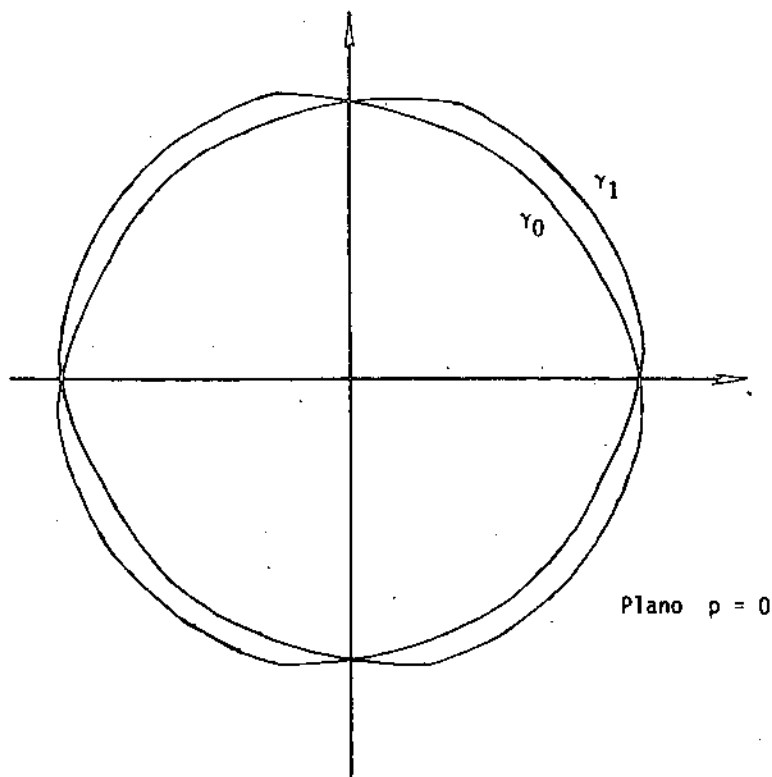


Figura 4.27

APENDICE I. Evoluciones finales de tipo parabólico-hiperbólico en el problema restringido plano y circular de 3 cuerpos.

Teorema: Para un valor fijo de la constante de Jacobi suficiente - mente grande, y para cualquier valor del parámetro de masas  $0 < m < 1$ , el conjunto de las órbitas con evolución final del tipo  $PE^- \cap HE^+$  y  $HE^- \cap PE^+$  es homeomorfo a una reunión numerable de intervalos abier - tos disjuntos.

Demostración: Se ha visto en la sección (4.7) que en el espacio  $(q, \theta, p)$ ,  $q = p = 0$  es una órbita periódica parabólica en el infi - nito. Sea  $S$  el espacio definido por un entorno de la superficie  $q = 0$  habiendo quitado dicha superficie. Entonces  $S$  es homeomor - fo a un cilindro sólido sin el eje (véase la figura I.1). Se sabe que un aspecto cualitativo del flujo en  $S$  se obtiene girando la figura I.2 alrededor del eje  $p$ , y recordando que el flujo alcan - za el eje  $p$  cuando el tiempo es infinito. Se está interesado en frontera  $b$  de  $S$ . Se divide  $b$  en dos cilindros:  $b^+$  por don - de el flujo entra en  $S$ , y  $b^-$  por donde el flujo sale de  $S$ . Sea  $p^+$  y  $p^-$  la intersección con  $b$  de las órbitas con evolu - ción final del tipo  $PE^+$  y  $PE^-$  respectivamente. Entonces  $p^+(p^-)$  es homeomorfo a una circunferencia de  $b^+(b^-)$ . Si  $h^+(h^-)$  es el cilindro en  $b^+(b^-)$  limitado por  $p^+(p^-)$ , las órbitas que entran en (salen de)  $S$  por  $h^+(h^-)$  son órbitas con evolución final del tipo  $HE^+(HE^-)$ . Obsérvese que la frontera entre  $b^+$  y  $b^-$  es una circunferencia donde las órbitas son tangenciales.

Se denotará por  $\phi_t(x)$  al flujo asociado a las ecuaciones del movimiento (ecuaciones (4.16)) ; esto es,  $\phi_t(x)$  denota la solu - ción que pasa a través de  $x$  cuando el tiempo  $t$  es cero.

Sea  $f$  la aplicación de un subconjunto  $D$  de  $p^-$  sobre  $h^+$  definida de la siguiente manera: la imagen de  $x \in p^-$  es el primer punto de la órbita  $\phi_t(x)$  posterior a  $x$  que pertenece a  $h^+$ , si existe.

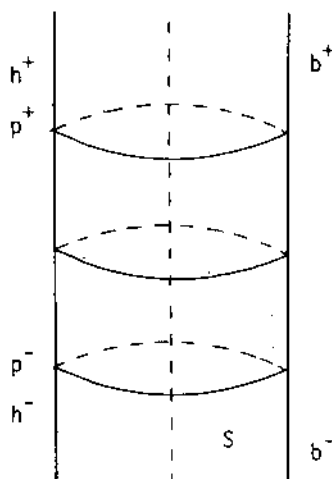


Figura I.1

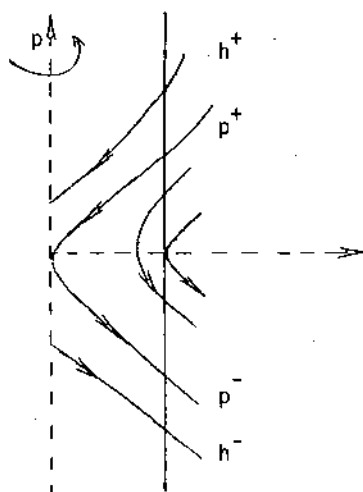


Figura I.2

Es claro que las órbitas con evolución final del tipo  $PE^- \cap HE^+$  vienen dadas por el dominio  $D$  de la aplicación  $f$ . Se verá que  $D$  es abierto. Si  $x$  se aplica en  $h^+$  en un tiempo  $t(x)$ , los puntos próximos a  $x$  son aplicados en un entorno de su imagen en el mismo tiempo. La transversalidad del flujo y el hecho de ser  $h^+$  un abierto obligan a que tales puntos alcancen  $h^+$  en un tiempo próximo a  $t(x)$ . Por lo tanto,  $D$  es un abierto de  $p^-$ . Como  $p^-$  es homeomorfo a una circunferencia y a los abiertos de una circunferencia son: el conjunto vacío, o una reunión numerable de intervalos abiertos, o bien la misma circunferencia; resulta que  $PE^- \cap HE^+$  es homeomorfo a uno de estos tres conjuntos.

La sección (4.10) nos dice que para un valor fijo de la constante de Jacobi suficientemente grande, y para cualquier valor del parámetro de masas,  $0 < m < 1$ ,  $PE^- \cap HE^+ \neq \emptyset$  y que  $PE^- \cap PE^+ \neq \emptyset$ , por consiguiente  $PE^- \cap HE^+$  no puede ser homeomorfo a una circunferencia.

Los argumentos para  $HE^- \cap PE^+$  son similares, y por lo tanto, el teorema está probado.

//

Teorema: Para un valor fijo de la constante de Jacobi y para cualquier valor del parámetro de masas  $0 < m < 1$ , el conjunto de las órbitas con evolución final del tipo  $PE^-$  o  $PE^+$  es homeomorfo a  $S^1$ , y el de las órbitas del tipo  $HE^-$  o  $HE^+$  es homeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

Su demostración es consecuencia inmediata de la demostración del teorema anterior.



APENDICE II. Evoluciones finales de tipo parabólico-hiperbólico en el problema restringido espacial, y circular de 3 cuerpos.

(II.1) Formulación del problema y ecuaciones del movimiento.

Se tienen dos cuerpos de masas  $m_1 = 1-m$  y  $m_2 = m$  (con  $0 < m < 1$ ) girando alrededor de su centro de masas, describiendo órbitas circulares bajo la influencia de su atracción gravitatoria mutua, y un tercer cuerpo de masa infinitesimal  $m_3$  que se mueve en el espacio, atraído por ambos pero sin influenciarlos. Los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  están sobre el eje giratorio  $x$ , localizados en los puntos  $(m, 0, 0)$  y  $(m-1, 0, 0)$  respectivamente. El eje  $y$  es perpendicular al eje  $x$  sobre el plano de giro. El plano  $x, y$  gira con velocidad angular igual a 1, y el vector velocidad angular es perpendicular al plano a lo largo del eje  $z$  (véase la figura II.1).

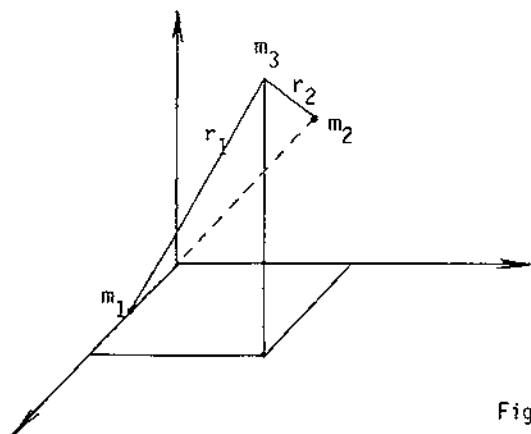


Figura II.1

Las ecuaciones del movimiento de  $m_3$  son:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y, \\ \ddot{z} &= \Omega_z,\end{aligned}\tag{II.1}$$

donde

$$\Omega = (x^2 + y^2)/2 + (1-m)/r_1 + m/r_2,$$

con

$$r_1^2 = (x-m)^2 + y^2 + z^2 ,$$

$$r_2^2 = (x-m+1)^2 + y^2 + z^2 .$$

El sistema diferencial (II.1) tiene una integral primera, la integral de Jacobi

$$C = 2\Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) .$$

Para más detalles véase Szelehely [32].

## (II.2) Estudio del movimiento en el entorno del infinito para $m = 0$ .

Las ecuaciones del movimiento para  $m = 0$  son las ecuaciones (II.1) con

$$\Omega = (x^2+y^2)/2 + (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} ,$$

y la integral de Jacobi es

$$C = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) .$$

Mientras que la energía  $h$  y el vector momento cinético  $M$  no son integrales primeras si  $0 < m < 1$  , para  $m = 0$  si lo son. Sea  $M$  la componente  $Z$  del momento cinético y  $K^2$  la suma de los cuadrados de las componentes  $X$  e  $Y$  del momento cinético en un sistema inercial  $(X,Y,Z)$  cuyo eje  $Z$  coincide con el eje  $z$  .

Por unidad de masa se tiene que

$$h = |(\dot{x}-y)^2 + (\dot{y}+x)^2 + \dot{z}^2|/2 - (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} ,$$

$$M = x(\dot{y}+x) - y(\dot{x}-y) .$$

Es fácil verificar que

$$C = 2M - 2h .$$

Para estudiar el movimiento del tercer cuerpo en el entorno del infinito se pasa a coordenadas esféricas:



$$\begin{aligned}
x &= r \sin \phi \cos \theta, \\
y &= r \sin \phi \sin \theta, \\
z &= r \cos \phi, \\
\dot{x} &= \dot{r} \sin \phi \cos \theta + r \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta, \\
\dot{y} &= \dot{r} \sin \phi \sin \theta + r \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta + r \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta, \\
\dot{z} &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi,
\end{aligned} \tag{II.2}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= (K^2 - M^2 \cot^2 \phi)^{1/2} / r^2, \\
\dot{\theta} &= -1 + M / (r^2 \sin^2 \phi).
\end{aligned}$$

Al cambio dado por (II.2) le sigue el definido por

$$\begin{aligned}
r &= 2/q^2 \quad \text{con } 0 < q < +\infty, \\
\dot{r} &= p,
\end{aligned} \tag{II.3}$$

que lleva al infinito al origen de coordenadas. En definitiva se pasa de las coordenadas  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  a las coordenadas  $(q, \theta, \phi, p, M, K)$ . Este cambio transforma las órbitas parabólicas en aquellas que verifican  $q \rightarrow 0$ , y  $p \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

En las nuevas variables las ecuaciones del movimiento se transforman en

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= -pq^3/4, \\
\dot{\theta} &= -1 + Mq^4/(4\sin^2 \phi), \\
\dot{\phi} &= (K^2 - M^2 \cot^2 \phi)^{1/2} q^4/4, \\
\dot{p} &= -q^4/4 + (M^2 + K^2)q^6/8, \\
\dot{M} &= 0, \\
\dot{K} &= 0.
\end{aligned} \tag{II.4}$$

El estudio del flujo de este sistema en el espacio  $(q, \theta, \phi, p)$  se obtiene al multiplicar por  $S^2$  el flujo de la figura (4.13) donde el flujo necesita un tiempo infinito para alcanzar el eje  $p$ .

Las curvas  $h$  igual a constante en la figura 4.13 tienen por ecuación

$$p^2 = q^2 - [(C/2+h)^2 + K^2]q^4/4 + 2h,$$

con  $q > 0$ ; esta es la expresión de la integral de Jacobi en las nuevas coordenadas.

(II.3) Estudio del movimiento en el entorno del infinito para  $0 < m < 1$ .

Al igual que para  $m = 0$  se cambian las coordenadas  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  por las coordenadas  $(q, \theta, \phi, p, M, K)$  utilizando las ecuaciones (II.2) y (II.3). Las ecuaciones (II.1) del movimiento se transforman en

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -pq^3/4, \\ \dot{\theta} &= -1 + Mq^4/(4\sin^2\phi), \\ \dot{\phi} &= (K^2 - M^2 \cot^2\phi)^{1/2} q^4/4, \\ \dot{p} &= -q^4/4 + (M^2 + K^2)q^6/8 + m \cdot u(q, \theta, \phi, m), \\ \dot{M} &= m \cdot v(q, \theta, \phi, m), \\ \dot{K} &= m \cdot w(q, \theta, \phi, m),\end{aligned}\tag{II.5}$$

donde  $u, v, w$  son funciones reales y analíticas en sus variables siendo la primera de octavo orden en  $q$ , y las otras dos de sexto orden en  $q$ .

La integral de Jacobi se escribe ahora como

$$C = q^2 - p^2 - (M^2 + K^2)q^4/4 + 2M + m \cdot g(q, \theta, \phi, m),\tag{II.6}$$

donde  $g$  es una función real y analítica en sus variables, de sexto orden en  $q$ .

Comparando los sistemas diferenciales (II.4) y (II.5), resulta que en el entorno de la hipersuperficie  $q = 0$ , sus respectivos flujos presentan el mismo aspecto cualitativo. Por lo tanto, realizan-

do un estudio similar al efectuado en el apéndice I sobre la hipersuperficie  $q = q_0$  con  $q_0$  suficientemente pequeño, y teniendo en cuenta que el sistema diferencial (II.5) se puede reducir en una ecuación al eliminar  $K$  utilizando (II.6), se puede enunciar el siguiente:

Teorema: Para un valor fijo de la constante de Jacobi suficientemente grande, y para cualquier valor del parámetro de masas  $0 < m < 1$ , se tiene la siguiente tabla

El conjunto de las órbitas con evolución final del tipo:	es homeomorfo a:
$PE^-$ y $PE^+$	$S^2 \times R$
$HE^-$ y $HE^+$	$S^2 \times R^2$
$PE^- \cap HE$ y $HE^- \cap PE^+$	un abierto de $S^2 \times R$ distinto del $\emptyset$ y del total.



# APENDICE III.

En este apéndice se calcula

$$K = \frac{\partial}{\partial \theta} q(\theta, m) \Big|_{\theta=\pi},$$

y se comprueba que su valor es distinto de cero (véase el teorema 4.2).

Utilizando la integral de Jacobi (4.17) se puede eliminar  $\omega$  del sistema diferencial (4.16), obteniéndose

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -q^3 p/4, \\ \dot{\theta} &= -1 + q^4 M/4 + mA + O(m^2), \\ \dot{p} &= -q^4/4 + q^6 M^2/8 + mB + O(m^2), \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

siendo

$$\begin{aligned} M &= \{-2 + [4 + q^4(-p^2 + q^2 - C)]^{1/2}\}/(-q^4/2), \\ A &= -q^4 [4 + q^4(q^2 - p^2 - C)]^{-1/2} \{ q^2 [q^2 \cos \theta / 2 - 1 + (1 + q^2 \cos \theta + q^4/4)^{-1/2}] + 1 \} / 4, \\ B &= q^2 MA + q^4 [1/4 - q^2 \cos \theta / 4 - (2 + q^2 \cos \theta)(1 + q^2 \cos \theta + q^4/4)^{-3/2}/8]. \end{aligned}$$

Obsérvese que si  $m = 0$  las ecuaciones (III.1) coinciden con las ecuaciones (4.11).

La solución  $q(t; \bar{\theta}, m)$ ,  $\theta(t; \bar{\theta}, m)$ ,  $p(t; \bar{\theta}, m)$  del sistema diferencial (III.1) dada por las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} t &= t_0 = 0, \\ q(t_0) &= q(\bar{\theta}, m), \\ \theta(t_0) &= \bar{\theta}, \\ p(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

será una órbita parabólica para  $t \rightarrow +\infty$ , ya que  $p = 0$ ,  $q = q(\bar{\theta}, m)$  es la curva  $\gamma_0 = P_0 \cap \{p = 0\}$ .

Para  $m = 0$  el problema restringido plano y circular de 3 cuerpos queda reducido a dos problemas de 2 cuerpos. Sea  $q_0(t)$ ,  $\theta_0(t)$ ,  $p_0(t)$  la solución de (III.1) que satisface (III.2) para  $m = 0$ . La solución para  $m$  suficientemente pequeño puede escribirse como

$$\begin{aligned} q &= q_0 + m q_1 + O(m^2), \\ \theta &= \theta_0 + m \theta_1 + O(m^2), \\ p &= p_0 + m p_1 + O(m^2). \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Ya sabemos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} q_0(0; \bar{\theta}, m) \right|_{\bar{\theta} = \pi} = 0,$$

puesto que  $P_0$  y  $P_1$  coinciden si  $m = 0$ . Por consiguiente,

$$K = m \left. \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} q_1(0; \bar{\theta}, m) \right|_{\bar{\theta} = \pi} + O(m^2).$$

En definitiva, hemos de ver que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} q_1(0; \bar{\theta}, m) \right|_{\bar{\theta} = \pi} \neq 0. \quad (\text{III.4})$$

Si el tiempo  $t$  varía en  $[0, \tau(m)]$  ( $\tau(m)$  puede ser tan grande como se desee con tal de tomar  $m$  suficientemente pequeño), al sustituir (III.3) en (III.1) y simplificar se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= b_{11} p_1 + b_{12} q_1 + c_1, \\ \dot{q}_1 &= b_{21} p_1 + b_{22} q_1, \\ \dot{\theta}_1 &= b_{31} p_1 + b_{32} q_1 + c_2, \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

siendo

$$\begin{aligned} b_{11} &= c p_0 q_0^6 / [4(2 - q_0^4 c / 4)], \\ b_{12} &= -q_0^3 - c^2 q_0^5 / 16 + [c q_0^5 (p_0^2 + c - 3 q_0^2 / 2)] / [2(2 - q_0^4 c / 4)], \end{aligned}$$

$$b_{21} = -q_0^3/4 ,$$

$$b_{22} = -3q_0^2 p_0/4 ,$$

$$b_{31} = p_0 q_0^4 / [2(2-q_0^4 C/2)] ,$$

$$b_{32} = q_0^3(p_0^2 + C - 3q_0^2/2)/(2-q_0^4 C/4) ,$$

$$c_2 = -q_0^4 \{ q_0^2 [q_0^2 \cos \theta_0/2 - 1 + (1+q_0^2 \cos \theta_0 + q_0^4/4)^{-1/2}] + 1 \} / [4(2-q_0^4 C/2)] ,$$

$$c_1 = C q_0^2 C_2/2 + q_0^4 \{ (1-q_0^2 \cos \theta_0)/4 - (2+q_0^2 \cos \theta_0)(1+q_0^2 \cos \theta_0 + q_0^4/4)^{-3/2}/8 \} .$$

Se ha utilizado que  $M = C/2$  si  $m = 0$ , siendo  $C$  la constante de Jacobi.

Para calcular (III.4), sólo nos interesa  $\partial q_1 / \partial \bar{\theta}$ . Si

$$v = \frac{\partial p}{\partial \bar{\theta}} \quad y \quad w = \frac{\partial q}{\partial \bar{\theta}} ,$$

de (III.5) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{v} &= b_{11}(t) v + b_{12}(t) w + \frac{\partial c_1}{\partial \bar{\theta}}(\bar{\theta}, t) , \\ \dot{w} &= b_{21}(t) v + b_{22}(t) w . \end{aligned} \quad (III.6)$$

Cuando  $t \rightarrow +\infty$ , los coeficientes  $b_{ij}$  y  $c_j$  tienden a 0 (puesto que  $q_0 \rightarrow 0$  y  $p_0 \rightarrow 0$ ); por lo tanto, las variables  $v$  y  $w$  tienden a constante. Integramos el sistema diferencial lineal (III.6) con las condiciones iniciales  $v(0) = 0$ ,  $w(0) = 0$ ,  $\bar{\theta} = \pi$ , hasta valores de  $t$  lo suficientemente grandes para que  $v$  y  $w$  sean prácticamente constantes. Sean  $v_p$  y  $w_p$  los valores así obtenidos. Ahora integramos la parte homogénea del sistema lineal (III.6) con las condiciones iniciales  $v(0) = 1$ ,  $w(0) = 0$  ( $v(0)=0$ ,  $w(0) = 1$ ), obteniendo los valores  $v_1$ ,  $w_1$  ( $v_2$ ,  $w_2$ ). Teniendo en cuenta como es la solución general de un sistema diferencial lineal; y que  $v(+\infty)$  y  $w(+\infty)$  son cero si  $v$  y  $w$  provienen de una órbita parabólica; resulta que el sistema lineal :

$$v_1 M + v_2 N + v_p = v(+\infty) = 0 ,$$

$$w_1 M + w_2 N + w_p = w(+\infty) = 0 ,$$

es tal que su solución  $M_0$ ,  $N_0$  verifica que

$$N_0 = \frac{\partial q_1}{\partial \theta}(0; \bar{\theta}, m) \bigg|_{\bar{\theta} = \pi} = 0.0265...$$

como se quería demostrar.

Los cálculos efectivos se han hecho utilizando la variable  $s$  definida por

$$dt = \frac{2}{q} ds,$$

en lugar del tiempo  $t$ . Puesto que la solución  $p_0(s)$ ,  $q_0(s)$ ,  $\theta_0(s)$  es de computo más sencillo que la solución  $p_0(t)$ ,  $q_0(t)$ ,  $\theta_0(t)$ .

La integración numérica del sistema diferencial se ha hecho utilizando un Runge-Kutta 7(8), con un valor de la constante de Jacobi igual a 4.5.



## Referencias.

- [1] Alekseev, V.M., Quasirandom dynamical systems I,II,III: Math. USSR Sbornic 5, 73-128(1968); 6, 505-560(1968); 7, 1-43(1969).
- [2] Alekseev, V.M., Sur l' allure finale du mouvement dans le problème de trois corps, Actes du Congres Int. des Math. 1970, vol. 2, 893-907, Gauthiers-Villars, Paris, 1971.
- [3] Arnold, V.I. y Avez, A., Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique, Paris, 1967.
- [4] Arnold, V.I., Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique, MIR, Moscou, 1976.
- [5] Birkhoff, G.D., Dynamical Systems, AMS Coll. Publications, vol. 9, 1927, reeditado 1966.
- [6] Birkhoff, G.D., Nouvelles Recherches sur les Systèmes Dynamiques, Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaeí, 1, 85-216 (1935).
- [7] Birkhoff, G.D., The Restricted Problem of Three Bodies, Coll. Math. Papers, vol. I, 682, Dover, New York (1968).
- [8] Chazy, J., Sur l' allure finale du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croit indefiniment, Annales de l' Ecole Norm. Sup. 3<sup>e</sup> sér., 39, 22-130 (1922).
- [9] Chazy, J., Sur l' allure finale du mouvement dans le problème des trois corps, Journ. Math. pures et appl., 8, 353-380 (1929).
- [10] Chazy, J., Sur l' allure finale du mouvement dans le problème des trois corps, Bull. Astron., 8, 403-436 (1932).

- [11] Easton, R.W., Homoclinic phenomena in hamiltonian systems with several degrees of freedom, Journ. Diff. Eqs. 29, 241-252 (1978).
- [12] Hartman, P., Ordinary Differential Equations, J. Wiley and Sons, Inc. 1964.
- [13] Hénon, M., Exploration numérique du problème restreint I,II,III,IV, Annales d' Astrophysique, 28, 499-511(1965), Bull. Astron., sér. 31,1, fasc. 2, 49-66(1966); Bull. Astron., sér. 3, 1, fasc. 1, 57-79(1966), Annales d' Astrophysique, 28, 992-1007(1965).
- [14] Levinson, N., A second order differential equation with singular solutions, Ann. Math. 50, 127-153(1949).
- [15] Llibre, J., Sobre la Topología del Problema de n Cuerpos, tesina, Universidad de Barcelona, 1975.
- [16] Llibre, J. y Simó, C., Topología del problema de 3 cuerpos: caso plano y caso restringido, I Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica, Tenerife, 1975.
- [17] Llibre, J. y Simó, C., Variedades integrales en el problema de n cuerpos, I Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica, Tenerife, 1975.
- [18] Marchal, C., Survey paper-qualitative methods and results in Celestial Mechanics, ONERA n° 1975-77, 1975.
- [19] Marchal, C., Collisions d' étoiles par l' intermédiaire des orbits oscillantes de deuxième espèce, ONERA, 1978.
- [20] Mather, J.N. y McGehee, R., Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time, Lectures Notes in Physics, 38, 573-597, 1974.

- [21] McGehee, R., A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to Celestial Mechanics. Journ. Diff. Eqs. 14, 70-88 (1973).
- [22] McGehee, R. y Meyer, K., Homoclinic points of area preserving diffeomorphisms. Am. Journ. Math., Vol. 96, 409-421 (1974).
- [23] Morse, M. y Hedlund, G.A., Symbolic dynamics. Am. J. Math. 60, 815-866 (1938).
- [24] Moser, J., Stable and random motions in dynamical systems. Princeton Univ. Press. 1973.
- [25] Ornstein, D.S., What does it mean for a mechanical system to be isomorphic to the Bernoulli flow? Lectures Notes in Physics 38, 209-223. (1974).
- [26] Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Vol. 1, 1892; Vol.2, 1893; Vol.3, 1899; Gauthiers-Villars, Paris. Reeditados por Dover, New York, 1957.
- [27] Smale, S., Diffeomorphisms with many periodic points. Differential and Combinatorial Topology (edited by S.S. Cairns). Princeton Univ. Press, 63-80, 1965.
- [28] Smale, S., Differential Dynamical Systems Bull. A.M.S. 73, 747-817. (1967).
- [29] Siegel, C.L. y Moser, J.K., Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, 1971.
- [30] Sitnikov, K.A., The existence of oscillatory motions in the three-body problem, Soviet physics dokl., 5, 647-650. (1961).

- [31] Stieffel, E.L. y Scheifele, G., Linear and Regular Celestial Mechanics. Springer. 1971.
- [32] Szebehely, V., Theory of Orbits, Academic Press, 1967.