Pub. Mat. UAB
Nº 17, Febrer 1980

MARTINGALES À VARIATION INDÉPENDANTE DU CHEMIN DANS UNE FILTRATION PRODUIT

par

D. Nualart et M. Sanz

Ce travail développe le rapport entre martingales fortes et martingales à variation indépendante du chemin (i.d.c.). Le résultat fondamental établit que dans des filtrations produit les martingales i.d.c. sont nulles et, étant donné que les martingales fortes le sont aussi, il s'èn suit que les deux notions sont triviales.

1. *Notations et définitions basiques.* Soient $(\Omega^1, F^1, P^1; F^1_s, s \geq 0)$, $(\Omega^2, F^2, P^2; F^2_t, t \geq 0)$ des *filtrations*, c'est à dire (Ω^1, F^1, P^1), (Ω^2, F^2, P^2) sont des espaces probabilisés complets et $\{F^1_s, s \geq 0\}$, $\{F^2_t, t \geq 0\}$ des familles croissantes, complètes et continues à droite de sous-tribus de F^1 et F^2 respectivement, telles que $\bigvee_{s \geq 0} F^1_s = F^1$ et $\bigvee_{t \geq 0} F^2_t = F^2$.

On notera $(\Omega, F, P; F_{st}, (s,t) \in R^2_+)$ la *filtration produit* de $(\Omega^1, F^1, P^1; F^1_s, s \geq 0)$ et $(\Omega^2, F^2, P^2; F^2_t, t \geq 0)$ définie de la façon suivante: $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$, $F = F^1 \otimes F^2$, $P = P^1 \times P^2$, $F_{st} = F^1_s \otimes F^2_t$.

Pour tout $(s,t)\in R_+^2$ nous poserons $F_{st}^1 = \bigvee_{\tau\geq 0} F_{s\tau} = F_s^1 \otimes F^2$, $F_{st}^2 = \bigvee_{\sigma\geq 0} F_{\sigma t} = F^1 \otimes F_t^2$.

Il faut remarquer que $F_{st}^1 \vee F_{st}^2 = F$, puisque F_{st}^1 contient tous les cylindres mesurables $\Omega_1\times F$, $F\in F^2$, et F_{st}^2 contient ceux de la forme $G\times\Omega_2$, $G\in F^1$.

Notons par $M^2(1)$ l'espace de Hilbert des martingales $M^1 = \{M_s^1,\ s\geq 0\}$ adaptées à la filtration $(\Omega^1, F^1, P^1; F_s^1,\ s\geq 0)$, nulles en 0, et telles que $\sup_s E\{(M_s^1)^2\}<+\infty$. On peut définir de façon semblable $M^2(2)$. $M_c^2(1)$ et $M_c^2(2)$ sont les sous-espaces des martingales continues de $M^2(1)$ et $M^2(2)$ respectivement.

Un processus à indice dans R_+^2 défini dans un espace probabilisé complet (Ω,F,P), $M=\{M_z,\ z\in R_+^2\}$ est une *martingale*, s'il est intégrable, adaptée à une famille croissante de sous-tribus de F, $\{F_z,\ z\in R_+^2\}$, et pour tous $z_1\leq z_2$ on a $E\{M_{z_2}/F_{z_1}\}=M_{z_1}$, où $z_1\leq z_2$ indique l'ordre partiel usuel de R^2.

Soit M^2 l'espace de Hilbert des martingales à indice dans R_+^2, nulles sur les axes, telles que $\sup_z E\{(M_z)^2\}<+\infty$, et soit M_c^2 le sous-espace de M^2 des martingales continues.

On peut donner des conditions plus fortes de martingales de telle façon que les processus à accroissements indépendants, centrés et nuls sur les axes les vérifient. Ainsi, on dira que $M=\{M_z,\ z\in R_+^2\}$ est une martingale *forte* si M est nulle sur les axes et pour tous $z_1\leq z_2$, $E\{M(z_1,z_2]\ /\ F_{z_1}^1 \vee F_{z_2}^2\}=0$, où $M(z_1,z_2]=M_{z_2}-M_{(s_1,t_2)}-M_{(s_2,t_1)}+M_{z_1}$, $z_1=(s_1,t_1)$, $z_2=(s_2,t_2)$.

Une autre façon de donner une notion plus forte de martingale consiste à imposer que la variation du processus soit indépendante du chemin.

Soit Γ l'ensemble des courbes $\gamma:[0,1] \longrightarrow R_+^2$ partant de (0,0) croissantes et continues. On peut considérer la martingale M de $\mathcal{M}_c^2$ restrinte à la courbe γ, $M_\gamma = \{M_{\gamma(t)}; \mathcal{F}_{\gamma(t)}, t\in[0,1]\}$. Soit $A_{\gamma(t)}$ le processus croissant associé a M_γ.

Une martingale M de $\mathcal{M}_c^2$ est à *variation indépendante du chemin* (i.d.c.) si la variable aléatorie $A_{\gamma(1)}$ est indépendante de la courbe $\gamma\in\Gamma$ d'extrémité $\gamma(1)$.

La définition antérieure équivaut à l'existence d'un processus unique, $A=\{A_z, z\in R_+^2\}$, intégrable, avec versions croissantes et continues sur toute courbe $\gamma\in\Gamma$, et tel que M^2-A est une martingale.

Nous avons les résultats suivants (Cairoli-Walsh [1]):

Toute martingale forte M de $\mathcal{M}_c^2$ est i.d.c. si

(a) la famille $\{\mathcal{F}_z, z\in R_+^2\}$ de sous-tribus est engendrée par un processus de Wiener à deux paramètres,

ou (b) $\sup_z E\{(M_z)^4\}<\infty$.

La relation inverse est seulement connue dans certains cas particuliers. (voir [1], [4], [5]).

2. Soit $(\Omega,\mathcal{F},P;\mathcal{F}_{st},(s,t)\in R_+^2)$ une filtration produit. On vérifie aussitôt que toute martingale forte est nulle, puisque $\mathcal{F}_{st}^1 \vee \mathcal{F}_{st}^2=\mathcal{F}$. Nous allons montrer qu'il en est de même pour les martingales i.d.c.

Soient M^1 de $\mathcal{M}_c^2(1)$ et M^2 de $\mathcal{M}_c^2(2)$, et soient A^1 et A^2 leurs processus croissants continus associés. A^1A^2 est un processus croissant continu associé à la martingale M^1M^2, dans le sens que $(M^1M^2)^2-A^1A^2$ est une martingale faible (voir [1]).

$\mathcal{L}^2_{M^1}$ sera l'ensemble des processus ϕ intégrables par rapport à M^1, c'est à dire, prévisibles et tels que $E\{\int_0^s \phi(x)^2 A^1(dx)\}<\infty$ pour tout $s\in R_+$. $\mathcal{L}^2_{M^2}$ notera l'ensemble des processus ψ intégrables par rapport à M^2. Finalement soit $\mathcal{L}^2_{M^1M^2}$ l'ensemble des processus Φ intégrables par rapport à M^1M^2, c'est à dire, prévisibles et tels que $E\{\int_{R_{st}} \Phi(x,y)^2 A^1(dx)A^2(dy)\}<\infty$ pour tous $(s,t)\in R_+^2$ où R_{st} est le rectangle $[0,s]\times[0,t]$.

Si ϕ appartient à $\mathcal{L}^2_{M^1}$ et ψ à $\mathcal{L}^2_{M^2}$, alors $\phi\cdot\psi$ appartient à $\mathcal{L}^2_{M^1M^2}$ et nous avons:

$$\left(\int_0^s \phi(x)M^1(dx)\right)\left(\int_0^t \psi(y)M^2(dy)\right) = \int_{R_{st}} \phi(x)\psi(y)M^1(dx)M^2(dy).$$

On va maintenant établir une représentation des martingales de carré intégrable.

Rappelons que deux martingales à un paramètre sont dites fortement orthogonales si leur produit est une martingale.

Proposition 2.1. Soit M une martingale de $\mathcal{M}_c^2$. Il existent deux suites $\{M_i^1, i\in N\}$, $\{M_j^2, j\in N\}$ de martingales deux à deux fortement orthogonales dans $\mathcal{M}_c^2(1)$ et $\mathcal{M}_c^2(2)$ respectivement et une suite de processus $\{\Phi_{ij}, (i,j)\in N^2\}$ de $\mathcal{L}^2_{M_i^1M_j^2}$ telles que

$$M(s,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{R_{st}} \Phi_{ij}(x,y)M_i^1(dx)M_j^2(dy).$$

Démonstration. Toute martingale M de M_c^2, par l'isométrie entre M^2 et $L^2(\Omega,F,P)$, s'écrit comme

$$M(s,t) = \lim_n \sum_{i=1}^{k_n} a_{in} M_{in}^1(s) M_{in}^2(t),$$

où $M_{in}^1 \in M_c^2(1)$, $M_{in}^2 \in M_c^2(2)$.

Considérons les espaces fermés H_1, H_2 engendrés par les ensembles de martingales $\{M_{in}^1,\ i=1,\dots,k_n; n\in N\} \subset M_c^2(1)$, $\{M_{in}^2,\ i=i,\dots,k_n; n\in N\} \subset M_c^2(2)$, respectivement.

Soient $B^1=\{B_i^1, i\in N\}$, $B^2=\{B_j^2, j\in N\}$ deux bases orthonormales de H_1 et H_2, respectivement, alors $B^1B^2=\{B_i^1B_j^2,(i,j)\in N^2\}$ est une base orthonormale de $H_1 \otimes H_2$ (voir [3]), donc

$$M(s,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} B_i^1(s) B_j^2(t). \tag{2.1}$$

Nous construisons, à partir de B^1, une suite fortement orthogonale de martingales de $M_c^2(1)$ que nous noterons $\{M_i^1, i\in N\}$.

Rappelons qu'un sous-espace fermé H de $M^2(i)$, i=1,2 est stable s'il est stable par arrêt et si $M\in H$, $A\in F_0^i$ entraîne $1_A M \in H$.

On sait que si H est un sous-espace stable de $M^2(i)$, tout élément M de $M^2(i)$ admet une décomposition $M=N_1+N_2$, ou N_1 appartient à H et N_2 est fortement orthogonale à H. On dira que N_1 est la projection de M sur H, et on écrira $N_1=p_H M$.

Soit $M_1^1=B_1^1$, et pour i>1 $M_i^1=B_i^1-p_{V_{i-1}}B_i^1$, où $p_{V_{i-1}}B_i^1$ est la projection de B_i^1 sur le sous-espace stable de $M_c^2(1)$ engendré par les martingales M_k^1, $1\leq k\leq i-1$.

On peut de même construire une suite fortement orthogonale de martingales de $M_c^2(2)$ que nous noterons par $\{M_j^2,\ j\in N\}$.

Le résultat s'obtient en remplaçant $B_i^1(s)$ et $B_j^2(t)$ par ses expressions comme somme d'intégrales stochastiques par rapport aux martingales M_k^1, k=i,...,i et M_h^2, h=1,...,j , respectivement, dans (2.1). □

Dans le cas particulier des tribus engendrées par des processus de Wiener, on obtient des résultats beaucoup plus simples, comme le montre le théorème suivant.

Proposition 2.2. Soient $W^1=\{W_s^1,\ s\in R_+\}$, $W^2=\{W_t^2,\ t\in R_+\}$ deux processus de Wiener indépendants, et soient $F_s^1=\sigma\langle W_x^1,\ x\leq s\rangle$, $F_t^2=\sigma\langle W_y^2,\ y\leq t\rangle$. Si M est une martingale de $\mathcal{M}^2$, alors il existe un processus $\Phi\in L^2_{W^1W^2}$ tel que

$$M(s,t) = \int_{R_{st}} \Phi(x,y)W^1(dx)W^2(dy).$$

Démonstration. On a l'expression suivante:

$$M = \lim_n \sum_{i=n}^{k_n} a_{in}M_{in}^1M_{in}^2 ,$$

où $M_{in}^1\in\mathcal{M}^2(1)$ et $M_{in}^2\in\mathcal{M}^2(2)$.

Il existent des processus ϕ_{in}^1 et ϕ_{in}^2 de $L^2_{W^1}$ et $L^2_{W^2}$ respectivement, tels que

$$M(s,t) = \lim_n \sum_{i=1}^{k_n} a_{in}\left(\int_0^s\phi_{in}^1(x)W^1(dx)\right)\left(\int_0^t\phi_{in}^2(y)W^2(dy)\right)=$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{k_n} a_{in}\int_{R_{st}}\phi_{in}^1(x)\phi_{in}^2(y)W^1(dx)W^2(dy).$$

La completitude de $L^2_{W^1W^2}$ et la propriété d'isométrie des intégrales stochastiques entraînent

$$M(s,t) = \int_{R_{st}}\left(\lim_n \sum_{i=1}^{k_n} a_{in}\phi_{in}^1(x)\phi_{in}^2(y)\right)W^1(dx)W^2(dy),$$

et il suffit de prendre

$$\Phi(s,t) = \lim_n \sum_{i=1}^{k_n} a_{in}\phi_{in}^1(x)\phi_{in}^2(y). \;\square$$

Avant de donner le résultat qui conclut cette section il nous faut établir un théorème de Fubini pour les intégrales stochastiques par rapport aux martingales M^1M^2.

Lemme 2.3. Soit ϕ un processus de $L^2_{M^1M^2}$, alors $\phi(.,y,.,\omega_2)$ est prévisible dans la filtration $(\Omega^1, F^1, P^1; F^1_s,\ s \geq 0)$ et $E_{\omega_1}\{\int_0^s \phi^2(x,y,\omega_1,\omega_2)A^1(dx,\omega_1)\}<\infty$ pour tous $y<t$, $\omega_2 \in \Omega_2$ $A^2(dy,\omega_2)\cdot P^2(d\omega_2)$-presque surement.

On peut donc définir $A^2(dy,\omega_2)\cdot P^2(d\omega_2)$-presque surement le processus $Y_y(\omega_2) = \int_0^s \phi(x,y,\omega_1,\omega_2)M^1(dx)$, et l'on a

(a) $Y_y(\omega_2)$ appartient a $L^2_{M^2}$.

(b) $\int_0^t\{\int_0^s \phi(x,y,\omega_1,\omega_2)M^1(dx)\}M^2(dy) = \int_{R_{st}} \phi(x,y)M^1(dx)M^2(dy)$.

Démonstration. Envisageons d'abord le cas étagé.

Soit $\Phi(x,y,\omega_1,\omega_2) = \sum_{i,j} a_{ij}(\omega_1,\omega_2)1_{\Delta_{ij}}(x,y)$, où $\Delta_{ij}=(z_{ij},z_{i+1,j+1}]$, $z_{ij}=(s_i,t_j)$, et a_{ij} est une variable aléatoire bornée $F_{z_{ij}}$-mesurable. Alors

$$Y_y(\omega_2) = \sum_{i,j} a_{ij}(\omega_1,\omega_2)M^1(\Delta_i)1_{\Delta_j}(y) \ , \text{ où } \Delta_i=(s_i,s_{i+1}] \text{ et }$$

$\Delta_j=(t_j,t_{j+1}]$.

Pour ω_1 fixé, $Y_y(\omega_2)$ est prévisible et, en outre, $E_{\omega_2}\int_0^t Y_y(\omega_2)^2A^2(dy)<\infty$, ce qui entraîne (a). L'égalité (b) est immédiate.

Dans le cas général, il existe une suite de processus ϕ_n étagés, vérifiant:

$$E\int_{R_{st}} (\phi(x,y)-\phi_n(x,y))^2A^1(dx)A^2(dy) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut toujours supposer que pour tous (y,ω_2), $A^2(dy,\omega_2)\cdot P^2(d\omega_2)$-p.s. on a

$$E_{\omega_1}\int_0^s(\Phi(x,y)-\Phi_n(x,y))^2A^1(dx) < 2^{-n} ,$$

pour n assez grand.

Soit $Y_y^n(\omega_2) = \int_0^s\Phi_n(x,y,\omega_1,\omega_2)M^1(dx)$, et notons

$$\begin{aligned} Y_y(\omega_2) &= \lim_n Y_y^n(\omega_2) && \text{si cette limite existe,} \\ &= 0 && \text{dans le cas contraire.} \end{aligned}$$

Il résulte immédiatement que $Y_y(\omega_2)=\int_0^s\Phi(x,y,\omega_1,\omega_2)M^1(dx)$, $A^2(dy,\omega_2)\cdot P^2(d\omega_2)$-p.s.. D'autre part, $Y_y(\omega_2)$ étant la limite de processus prévisibles, il est, lui-même, prévisible, pour ω_1 fixé. Nous avons aussi $E_{\omega_2}\int_0^t Y_y(\omega_2)^2A^2(dy)<\infty$, $P^1(d\omega_1)$-p.s.

Finalement, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} &\int_0^t(\int_0^s\Phi(x,y,\omega_1,\omega_2)M^1(dx))M^2(dy)= \\ &= \lim_n \int_0^t(\int_0^s \Phi_n(x,y,\omega_1,\omega_2)M^1(dx))M^2(dy)= \\ &= \lim_n \int_{R_{st}} \Phi_n(x,y,\omega_1,\omega_2)M^1(dx)M^2(dy)= \\ &= \int_{R_{st}} \Phi(x,y,\omega_1,\omega_2)M^1(dx)M^2(dy). \ \square \end{aligned}$$

Théorème 2.4. Soit M une martingale de M_c^2 i.d.c., alors M est nulle.

Démonstration. D'après la Proposition 2.1

$$M(s,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{R_{st}} \Phi_{ij}(x,y)M_i^1(dx)M_j^2(dy).$$

Soit $M_n(s,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{R_{st}} \Phi_{ij}(x,y)M_i^1(dx)M_j^2(dy)$.

En utilisant le théorème de Fubini précédent, on peut écrire

$$M_n(s,t)= \sum_{j=1}^{n}\int_0^t N_j^n(y)M_j^2(dy) = \sum_{i=1}^{n}\int_0^s N_i^n(x)M_i^1(dx) \text{ , où}$$

$$N_j^n(y)=\int_0^s \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ij}(x,y)M_i^1(dx), \quad N_i^n(x)=\int_0^t \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}(x,y)M_j^2(dy).$$

Fixé $s \in R_+$ et $\omega_1 \in \Omega_1$, $M(s,t)$ est une martingale à un paramètre qui a pour processus croissant associé (en ayant compte de l'orthogonalité forte des martingales M_j^2)

$$A^1(s,t)= \lim_n \sum_{j=1}^{n} \int_0^t (N_j^n(y))^2 A_j^2(dy).$$

On obtient d'une façon analogue

$$A^2(s,t)= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \int_0^s (N_i^n(x))^2 A_i^1(dx).$$

La propriété i.d.c. entraîne $A^1(s,t)=A^2(s,t)$. Moyenant la formule d'Itô appliquée aux processus $(N_j^n(y))^2$ et $(N_i^n(x))^2$, cette égalité devient

$$\lim_n \sum_{i,j=1}^{n} \int_{R_{st}} 2N_j^n(y)\Phi_{ij}(x,y)M_i^1(dx)A_j^2(dy)=$$

$$= \lim_n \sum_{i,j=1}^{n} \int_{R_{st}} 2N_i^n(x)\Phi_{ij}(x,y)M_j^2(dy)A_i^1(dx).$$

Ici on a utilisé encore un théorème de Fubini pour les intégrales mixtes. Cette dernière égelité est seulement possible si les deux membres sont nuls.

Alors si dans l'expression

$$\lim_n \sum_{j=1}^{n} \int_0^t A_j^2(dy) \left(\sum_{k=1}^{n} \int_0^s \Phi_{kj}(x',y)M_k^1(dx')\right)^2 = 0$$

on prend l'espérance, on obtient $E(M(s,t)^2) = 0$.

Bibliographie

1. Cairoli, R. et Walsh, J.B. "Stochastic integrals in the plane". *Acta Mathematica*, 134, 111-183, (1975).

2. Meyer, P.A. "Un cours sur les intégrales stochastiques". *Séminaire de Probabilités X*. Lecture Notes in Math. 511.

3. Neveu, J. "Processus aléatoires gaussiens". Les presses de l'Université de Montréal.

4. Nualart, D. et Sanz, M. "Caractérisation des martingales à deux paramètres indépendantes du chemin". *Ann. Scient. de l'Univ. de Clermont*, série Math., n°67, 17ème fasc. (1979).

5. Zakai, M. "Some classes of two-parameter martingales". Preprint.

D. Nualart
Dep. d'Estadística Matemàtica
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, BARCELONA-7
ESPAGNE

M. Sanz
Dep. de Matemàtiques
E.T.S.A.B.
Universitat Politècnica de Barcelona
Diagonal 649, BARCELONA-28
ESPAGNE

Mai, 1979