Pub. Mat. UAB
Nº 17, Febrer 1980

Nota sobre espacios homeomorfos a abiertos de poliedros compactos

Francisco Gómez. Universitat Autònoma de Barcelona. Secció de Matemàtiques.

Esta nota ha sido sugerida por el problema 4, página 228 del libro de W. Greub, S.Halperin y R.Vanstone: "Connections, curvature and cohomology", vol. I, Academic Press.

Puesto que todo abierto de un poliedro compacto es a su vez un poliedro, siempre es interesante conocer condiciones que garanticen que un espacio topológico es (o no es) homeomorfo a un abierto de algún poliedro compacto. En este sentido demuestro el siguiente teorema:

Teorema: Una condición necesaria para que un espacio topológico X sea abierto de algún poliedro compacto es que la imagen de la aplicación natural $H_c^p(X) \longrightarrow H^p(X)$ sea finito generada para todo entero p. Siendo $H_c^p(X)$ la cohomología singular de X y tomando cualquier anillo de ideales principales como anillo de coeficientes.

Este teorema puede utilizarse en particular para dar ejemplos de poliedros no compactos que no sean abiertos de ningún poliedro compacto. También puede utilizarse para dar ejemplos de variedades diferenciables compactas.

Puesto que la cohomología de un poliedro compacto es finito generada, el teorema anterior será consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición: Una condición necesaria para que un espacio topológico X sea abierto de algún espacio regular cuyo p-ésimo módulo de cohomología sea finito generado es que la imagen de la aplicación natural $H_c^p(X) \longrightarrow H^p(X)$ sea finito generada (tomando como anillo de coeficientes cualquiera de ideales principales).

Antes de demostrar esta proposición veremos un lema.

Sea O un subconjunto abierto de un espacio regular M. Designemos mediante $i^*:H^p(M) \longrightarrow H^p(O)$ el morfismo inducido por la inclusión $i:O \longrightarrow M$, y sea $f:H_c^p(O) \longrightarrow H^p(O)$ el morfismo canónico.

<u>Lema</u>: $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, i^*$.

Demostración del lema:

Sea $a \in H_c^p(O)$. Puesto que $H_c^p(O) = \varinjlim_K H^p(O,O-K)$ (K recorriendo los subconjuntos compactos de O), existe $a_K \in H^p(O,O-K) \longrightarrow H_c^p(O)$.

Elijamos un subconjunto abierto U de O tal que $K \subset U \subset \bar{U} \subset O$, lo cual puede hacerse por ser M regular, y consideremos el recubrimiento abierto de M, $= \{O, M-\bar{U}\}$.

El siguiente triángulo es evidentemente conmutativo, siendo f_1 y f_2 las aplicaciones obvias.

$$\begin{array}{ccc} H^p(O) & \xleftarrow{\ i^*\ } & H^p(M) \\ & {}^{f_1} \quad H^p(M, \ ) \quad {}^{\cong\, f_2} & \end{array}$$

Sea z_K un p-cociclo en O que se anule en los p-símplices singulares de O-K y represente a_K. Sea $\bar{z}_K$ el p-cociclo de M relativo al recubrimiento que vale o en los p-símplices singulares de M-U y coincide con z_K en los símplices singulares de O.

Si $\bar{a}$ designa a la clase de cohomología determinada por $\bar{z}_K$ en $H^p(M, \ )$, tenemos $f_1(\bar{a}) = f(a)$. Pero $f_1(\bar{a}) = i^*(f_2^{-1}(a))$, luego $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, i^*$.

Demostración de la proposición:

Supongamos que X es un abierto de un espacio regular M con $H^p(M)$ finito generado, entonces $\mathrm{Im}\, i^*$ será finito generado y por el lema anterior la imagen de f también lo será.