Pub. Mat. UAB
Nº 17, Febrer 1980

Sobre homologia de grups i classes de grups abelians

Jaume Moncasi Solsona

Memòria presentada per optar
al grau de Llicenciat en
Ciències Matemàtiques

Director: Manuel Castellet Solanas

INDEX

PRÓLEG

Quan hom estudia grups abelians definits mitjançant una propietat P (per exemple, grups abelians de P-torsió o P-locals) s'interessa immediatament per qüestions com: si A compleix P i $B \leq A$, B compleix P ?; si A i $B \leq A$ compleixen P, A/B compleix P ?; etc.

És lògic fer-se les mateixes preguntes traslladades a homologia, és a dir, si G (no necessàriament abelià) és tal que els seus grups d'homologia H_nG per a $n \geq 1$ compleixen tots una determinada propietat (per exemple, ser de P-torsió o P-locals) i $N \triangleleft G$, què passa amb els grups H_nN ?; etc. Per a resoldre aquests problemes cal eines més poderoses que les usuals de grups abelians i així, concretant, als problemes d'extensions s'hi apliquen tècniques de successions espectrals, tècniques que en l'estudi de propietats de finitud són, per exemple, insuficients .

Dins d'aquest context, U. Stammbach en el seu llibre " Homology in Group Theory " estudia la classe dels grups G, anomenats HPL, tals que els seus grups d'homologia (per a $n \geq 1$), H_nG, són P-locals. Algunes de les propietats que demostra són:

i) Si A és abelià, A és HPL si i només si A és P-local

ii) Donada $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ amb N i Q HPL, G també és HPL

iii) Donats $U \leq G_1$ i $U \leq G_2$, els tres HPL, llavors $G_1 *_U G_2$ és HPL

En aquest treball hem volgut estudiar, comparativament amb els grups HPL, altres exemples de grups G tals que els seus grups H_nG, $n \geq 1$, pertanyin a una determinada classe de grups abelians, de manera que almenys les tres propietats anteriors siguin certes, tot esbrinant la possibilitat d'incloure'ls en una formulació general.

Així, concretament en el capítol I, fixada una família de primers, P estudiem la classe dels grups G, que anomenem HPT, tals que H_nG són de P-torsió. Comprovem les esmentades propietats, a més d'algunes altres entre les que citarem:

iV) Si a l'extensió $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, N i G són HPT, també ho és Q.

Aquestes analogies ens varen motivar cap a un estudi més profund dels grups abelians P-locals i de P-torsió, que es concreta en la proposició I-9, la qual els caracteritza com una classe C que compleixi les tres condicions següents:

a) Si $A \in C$ i $f: A \longrightarrow B$ és un morfisme, $B \in C$ si i només si $\operatorname{Ker} f \in C$ i $\operatorname{Coker} f \in C$

b) Si $A \in C$, $\bigoplus_I A \in C$ per a tot conjunt d'indexs I

c) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ és un sistema directe on cada $A_i \in C$, $\varinjlim A_i \in C$

Un nou exemple, el dels grups abelians acotats (Capitol II), ens feu adonar de que no eren aquestes dues les úniques classes de grups abelians, C, per a les quals la classe HC tenia propietats anàlogues i, per tant, que calia considerar, en general, classes de grups abelians amb les propietats a) i b) de la proposició I-9. Per una tal classe, demostrem les propietats estudiades en el Capitol I per la classe HPT i, en particular, provem que IV) és també certa per la classe HPL. Finalment donem exemples de classes C que compleixen l'anterior definició.

Les notacions utilitzades són les usuals a (1) i (2). No hem inclós cap Capítol de resultats previs i quan necessitem resultats ben coneguts en donem la referència.

Finalment, vull manifestar el meu agraiment al Dr. Castellet, que amb tant d'interés ha dirigit aquest treball, d'ençà que em proposà el tema fins a la redacció de la present memòria. Em plau també d'agrair a en Pere Menal, l'interès amb que m'ha ajudat sempre que ha calgut.

CAPITOL I

GRUPS HPT. COMPARACIÓ AMB ELS GRUPS HPL

Al començar aquest capítol, fixarem ja les notacions que més utilitzarem. Així, per P indicarem una familia qualsevol de nombrers primers, i per P' donada P, el conjunt de primers que no pertanyen a P. Un enter m és anomenat un P-número si només es pot dividir pels primers de P.

Donat un grup abelià A, A_P voldrà dir el conjunt de $x \in A$ tals que tenen ordre un P-número. P_A notarà el conjunt de primers, p, pels quals $A_p \neq 0$.

Les demés notacions i definicions, relacionades amb homologia de grups i amb teoria de grups abelians serán les usuals a (1) i a (3) respectivament.

Definició. Un grup G s'anomena un HPT grup, o simplement HPT, si els seus grups d'homologia H_nG són de P-torsió per a tot $n \geq 1$

Proposició I-1. Sigui A un grup abelià. Llavors, A és un HPT grup si i només si A és de P-torsió.

Demostració:

$\Longrightarrow$) No cal fer res, ja que $H_1A = A_{ab} = A$

$\Leftarrow$) Ho veurem primer per un grup A finitament generat.

Suposem A tal que existeix un únic $p \in P_A$, és a dir, tal que $|P_A| = 1$. Aleshores, si $A = \langle x_1 \rangle = Z/p^k$, $H_n A = Z/p^k$, 0 $(n \geq 1)$ segons sigui n senar o parell. Per tant, A és HP_AT. Si $A = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = Z/p^k \oplus \ldots \oplus Z/p^k$, posem $A_1 = Z/p^k$ i $A_2 = Z/p^k \ldots Z/p^k$; per hipòtesi d'inducció sobre el nombre de generadors de A, A_1 i A_2 són HP_AT, i aplicant la succesió de Künneth

$$\bigoplus_{i+k=n} H_i A_1 \otimes H_k A_2 \rightarrowtail H_n A \twoheadrightarrow \bigoplus_{i+k=n-1} \mathrm{Tor}\,(H_i A_1, H_k A_2)$$

deduïm que $H_n A$ és de P_A-torsió, i, en particular, de P-torsió.

Suposem-ho demostrat per $|P_A| < n$ i veiem-ho per $|P_A| = n$. Si $P_A = \{p_1, \ldots, p_n\}$, amb $p_i \neq p_j$, $A \cong A_{p_1} \oplus \ldots \oplus A_{p_n}$. ((3) capítol II). Si fem $A_1 = A_{p_1}$ i $A_2 = \bigoplus_{i=2}^{n} A_{p_i}$, per hipòtesi d'inducció sobre $|P_A|$, cada A_i és $HP_{A_i}T$, i tornant a aplicar la successió de Künneth, tot tenint en compte que $H_i A_1 \otimes H_k A_2 = 0$ si $i,k \neq 0$ i que $\mathrm{Tor}\,(H_i A_1, H_k A_2) = 0$ ((3) capítol A), queda provat que $H_n A$ és de P_A-torsió.

Si A no és finitament generat, n'hi ha prou d'observar que $A = \varinjlim A_i$, on els A_i són tots els subgrups de A f.g. , i per tant, $H_n A = \varinjlim H_n A_i$. Com que els A_i són f.g. , concluim la demostració./.

La següent proposició ens permet de definir un functor ($A \longmapsto A_p$) dels grups abelians de torsió en ells mateixos que commuta amb el functor H_n

<u>Proposició I-2</u>. Sigui A un grup abelià de torsió. Aleshores, $(H_n A)_P = H_n(A_P)$ per a tota familia de nombres primers P i $n \geq 1$

Demostració: Per ser A de torsió, $A = A_P \oplus A_{P'}$. Aplicant la successió de Künneth a aquesta descomposició tenim la successió exacta

$$\bigoplus_{j+k=n} H_j A_p \otimes H_k A_{p'} \rightarrowtail H_n A \twoheadrightarrow \bigoplus_{j+k=n-1} \mathrm{Tor}\,(H_j A_p\ ,\ H_k A_{p'}).$$

Per la proposició anterior, quan $j,k \neq 0$, $H_j A_p$ i $H_k A_{p'}$ són respectivament, de P-torsió i de P'-torsió, que ens permet concloure que $H_n A = H_n A_p \oplus H_n A_{p'}$.

Un altre cop per la proposició anterior,

$$(H_n(A))_p \cong (H_n A_p)_p \oplus (H_n A_{p'})_p = H_n(A_p)$$

La hipòtesi " A de torsió " no es pot suprimir, com ho demostra l'exemple $A = Z \oplus Z/p$. En aquest cas $H_2 A$, per la successió de Künneth, conté un subgrup Z/p i, en canvi, $H_2(A_p) = H_2(Z/p) = 0$

La següent proposició ens permetrà estendre aquestes dues proposicions a grups nilpotents.

<u>Proposició I-3</u>. Sigui $E: N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ una successió exacta de grups. Si N i Q són HPT grups, també ho és G.

Demostració: L'eina principal que utilitzarem és la successió espectral de L.H.S. per homologia de grups, aplicada a l'extensió E, que convergeix finitament a $H_n G$. És a dir, existeix un $r \in Z$ i una filtració de $H_{p+q}G$, $F_n = H_{p+q}G \supseteq \ldots\ F_p \supseteq F_{p-1} \supseteq \ldots\ F_0 \supseteq F_{-1} = 0$ de manera que $E^r_{p,n-p} = F_p/F_{p-1}$, essent $E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q N)$

Si $q = 0$, $E^2_{p,q} = H_p Q$, que és, per hipòtesi, de P-torsió. Si $p = 0$, $H_0(Q, H_q N) \cong (H_q N)_Q = H_q N / H_q N IQ$, que és de P-torsió per ser-ho $H_q N$. Si $p,q \neq 0$, per a calcular $H_p(Q, H_q N)$, prenem una resolució Q-projectiva de Z, $P \twoheadrightarrow Z$, i avaluem l'homologia del complex $P \otimes H_q N \twoheadrightarrow Z \otimes H_q N$, que és de P-torsió per ser-ho $P \otimes H_q N$. En conseqüència $E^2_{p,q}$ és de P- torsió si $p \neq 0$ ó $q \neq 0$, i per tant $E^r_{p,q}$ és de P-torsió si $p \neq 0$ ó $q \neq 0$

Com que $F_0 = F_0/F_{-1} = E^r_{0,n}$ és de P-torsió, fent inducció sobre la filtració de $H_n G$, concluim que aquest és de P-torsió ./.

<u>Proposició I-4</u>. Sigui G nilpotent. G és HPT si i només si G és de P-torsió.

Demostració:

$\Longrightarrow$) Si G_{ab} és de P-torsió, també ho és G ((5) capítol I)

$\Longleftarrow$) Per inducció sobre la classe de nilpotència, $\bar{c}$, de G. Si $\bar{c} = 1$, G és abelià i podem aplicar I-1. Suposem $\bar{c} > 1$, i considerem la sèrie central inferior $G_0 = G \triangleright G_1 = [G,G] \triangleright \ldots G_{\bar{c}} \triangleright G_{\bar{c}+1} = 1$. A l'extensió $G_{\bar{c}} \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{c}}$ i $G/G_{\bar{c}}$ són HPT, per inducció, i aplicant I-3, G és, també, HPT ./.

<u>Proposició I-5</u>. Sigui G nilpotent de torsió. Llavors $(H_nG)_p = H_nG_p$

Demostració: Per ser G de torsió, $G = G_p \times G_{p'}$, ((5) capitol 3). Aleshores la demostració és fà igual que la de la Proposició I-2 ./.

El següent resultat, ja de tipus general, afirma que la classe dels grups HPT és tancada per quocients quan el grup i el subgrup són HPT

<u>Proposició I-6</u>. Si $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ és una extensió de grups tal que N i G són HPT, aleshores Q també és HPT

Demostració: Utilitzarem una altra vegada la successió espectral de L.H.S., junt amb les consideracions i notacions explicades a I-3.

Fixat $n \in Z$, $n > 0$, considerem la filtració de $H_n G$
$H_n G = F_n \supseteq \dots \supseteq F_0 \supseteq F_{-1} = 0$. $E^r_{n,0} = Z^{r-1}_{n,0} / B^{r-1}_{n+r-1,2-r} = F_n / F_{n-1}$
és de P-torsió per ser-ho $H_n G$. D'altra banda, per ser sempre $r \geq 3$, $2-r < 0$ i $B^{r-1}_{n+r-1,2-r} = 0$, $Z^{r-1}_{n,0}$ és de P-torsió.
De la successió $Z^{r-1}_{n,0} \rightarrowtail E^{r-1}_{n,0} \longrightarrow E^{r-1}_{n-r+1,\, r-2}$ i del fet que $r-2 > 0$, deduim que $E^{r-1}_{n,0}$ és de P-torsió.
Si $r = 3$, ja hem acabat, ja que aleshores $E^2_{n,0} = H_n Q$ és de P-torsió. Si $r > 3$,
$E^{r-1}_{n,0} = Z^{r-2}_{n,0} / B^{r-2}_{n+r-2,\, 3-r} = Z^{r-2}_{n,0}$, Per ser $3-r < 0$, i, per tant, $Z^{r-2}_{n,0}$ és de P-torsió. Seguint el procés r-2 cops, concloem, que $H_n Q$ és de P-torsió ./.

<u>Corol.lari</u>. $G_1 \rtimes G_2$ i $G_1 \times G_2$ són HPT si i només si G_1 i G_2 ho són.

Demostració:

$\Rightarrow$) Designem per p_i: $G_1 \rtimes G_2 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow G_1$ i j_i: $G_1 \rightarrowtail G_1 \rtimes G_2$, els morfismes naturals. Llavors $(p_i \circ j_i)_* : H_n G_1 \longrightarrow H_n(G_1 \rtimes G_2)$ és la identitat i, en consequència, $(j_i)_*$ és injectiva i G_1 és HPT. Aplicant la darrera proposició, G_2 també és HPT.

Anàlogament pot fer-se per a $G_1 \times G_2$.

$\Leftarrow$) Es suficient aplicar I-3 a la successió exacta $G_1 \rightarrowtail G_1 \rtimes G_2 \twoheadrightarrow G_2$ ./.

El comportament dels grups HPT respecte a productes lliures amalgamats, el resumim en la següent Proposició.

<u>Proposició I-7</u>. Suposem G_1, G_2, U grups amb U subgrup de G_1 i de G_2. Llavors si tres dels grups G_1, G_2, U, $G_1 *_U G_2$ són HPT grups, també ho és el quart.

Demostració: Si denotem, com és usual, per $h_i : U \rightarrowtail G_i$ les injeccions canòniques i per $g_i : G_i \longrightarrow G_1 *_U G_2$ els morfismes naturals, la successió de Mayer-Vietoris s'escriu

$$\cdots \xrightarrow{\{h_1^* - h_2^*\}} H_n G_1 \oplus H_n G_2 \xrightarrow{\langle g_{1*}, g_{2*} \rangle} H_n(G_1 *_U G_2) \longrightarrow H_{n-1} U \longrightarrow \cdots$$

Llavors, tenint en compte que per a $n = 1$ l'aplicació $H_0 U = Z \longrightarrow H_0 G_1 \quad H_0 G_2 = Z \quad Z$ és injectiva, concloem la demostració ./.

<u>Corol.lari</u>. $G_1 * G_2$ és un HPT grup si i només si G_1 i G_2 ho són tots dos

Demostració:

$\Longleftarrow$) Es la darrera proposició

$\Longrightarrow$) Si $p_i : G_1 * G_2 \longrightarrow G_i$ i $j_i : G_i \longrightarrow G_1 * G_2$ indiquen els morfismes naturals,

$(p_i \circ j_i)_* = (id)_* = id : HG_i \longrightarrow HG_i$, i per tant $(j_i)_*$ és injectiva ./.

Cal dir també que aquesta proposició ens proporciona un exemple de que els HPT grups no són tancats per subgrups normals, fins i tot en el cas en què el quocient sigui un HPT grup. Per veure això n'hi ha prou en fixar-se en l'extensió

$$Z = [Z/2 * Z/2 \ , \ Z/2 * Z/2] \rightarrowtail Z/2 * Z/2 \longrightarrow Z/2 \oplus Z/2$$

En la següent proposició, però, ens preocupem de donar, sota hipòtesis prou fortes, una condició necessària i suficient perquè el nucli d'un morfisme entre HPT grups sigui un HPT grup.

Definició. Donada una extensió de grups $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, direm que és K-central si $N \subseteq Z_k G$

Observem que amb aquesta definició les extensions 1-centrals no són altra cosa que les extensions centrals.

També val a dir que, si definim $N_1 = [G,N]$ i $N_{i+1} = [G,N_i]$, N és K-central si i només si $N_k = 1$ La demostració d'això és òbvia ja que només cal aplicar la definició de centre k-èssim d'un grup.

Proposició I-8. Sigui E: $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ una extensió de grups, amb G HPT. Llavors Q és HPT si i només si $N/[G,N]$ és de P-torsió i $G/[G,N]$ és un HPT grup.

Demostració:

$\Rightarrow$) Considerem la successió dels cinc termes associada a E,

$H_2G \longrightarrow H_2Q \longrightarrow N/[G,N] \longrightarrow G_{ab} \twoheadrightarrow Q_{ab}$. Com que H_2Q i G_{ab} són de P-torsió, $N/[G,N]$ és de P-torsió.

Per acabar, només cal considerar la successió exacta $N/[G,N] \rightarrowtail G/[G,N] \twoheadrightarrow Q$ i aplicar-li la Proposició I-3.

$\Leftarrow$) N'hi ha prou d'aplicar I-6 a la successió $N/[G,N] \rightarrowtail G/[G,N] \twoheadrightarrow Q$

Corol.lari. Si $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ és K-central, i G és HPT, Q és HPT si i només si N és un grup de P-torsió.

Demostració: Podem aplicar reiteradament k cops seguits la proposició anterior. Així la primera vegada obtenim el resultat I-8: Q és HPT si i només si N/N_1 és de P-torsió i G/N_1 és HPT.

Aplicant I-8 a $N_1 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/N_1$, tenim que G/N_1 és un HPT grup $\Leftrightarrow$ N_1/N_2 és de P-torsió i G/N_2 és un HPT grup. És a dir, tornant endarrera, Q és HPT si i només si N/N_1 i N_1/N_2 són de P-torsió i G/N_2 és un HPT grup. A la k-èssima aplicació ens quedaria, Q és HPT si i només si N/N_1 , ... , N_{k-1}/N_k són de P-torsio i G es un HPT grup. Com que $N_k = 1$ i G per hipòtesi és ja un HPT grup, la demostració és acabada ./.

Com hem dit en el pròleg, observem que les proposicións I-1, I-2, I-3, I-7, són molt semblants, fins i tot en les demostracións, a les anàlogues estudiades a (2) per grups HPL, això és, per grups G tals que els grups H_nG, $n \geq 1$, són P-locals. La proposició I-6 i l'estudi fet per extensions K-centrals no és troba a (2), malgrat que, segons veurem en el capítol següent també té validesa encara que la demostració hagi de ser diferent perquè els grups abelians de P-torsió són tancats per subgrups i en canvi els P-locals no.

Sigui com sigui, aquestes analogies ens han menat cap a la següent proposició, que, bàsicament ha tingut importància dins del context general perquè ha estat un graó importantissim cap a la formulació general que donem en el capítol II.

<u>Proposició I-9</u>. Sigui C una classe de grups abelians que compleix

a) Si $A \in C$ i $f\colon A \longrightarrow B$ és un morfisme, $B \in C$ si i només si $\mathrm{Ker}\, f \in C$ i $\mathrm{Coker}\, f \in C$

b) Si $A \in C$, $\bigoplus_{i\in I} A \in C$ per a tot conjunt d'indexs I

c) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ és un sistema directe on cada $A_i \in C$, $\varinjlim A_i \in C$.

Aleshores existeix una família de primers P tal que o bé C és la classe dels grups abelians P-locals o bé C és la classe dels grups abelians de P-torsió.

Lema I-9. Si C és una classe de grups abelians que compleix les condicions anteriors a) i b), llavors

(i) Si $A \in C$ i $B \cong A \Rightarrow B \in C$

(ii) Si $A, B \in C$ i $f\colon A \longrightarrow B$ és un morfisme, $\mathrm{Im}\, f \in C$

(iii) Si $A \overset{\varepsilon}{\rightarrowtail} B \overset{\mu}{\twoheadrightarrow} D$ és exacta amb $A, D \in C$, llavors $B \in C$

(iV) Si $\bigoplus_{i\in I} A_i \in C$ i $J \subset I$, llavors $\bigoplus_{j\in J} A_j \in C$

(V) Si $A, B \in C$, $A \oplus B \in C$

(Vi) Si $A \in C$; $A \otimes B$, $\mathrm{Tor}(A,B) \in C$ per a tot grup abelià B

Demostració:

(i) Si $f\colon A \longrightarrow B$ és isomorfisme, $\mathrm{Ker}\, f = 0$ i $\mathrm{Coker}\, f = 0$. Com que $0 \in C$, (és el nucli de $id\colon A \longrightarrow A$), aplicant (a) $B \in C$.

(ii) N'hi ha prou d'aplicar a) a la successió $\mathrm{Im}\, f \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/\mathrm{Im}\, f$.

(iii) Es suficient veure que $\mathrm{Ker}\,\varepsilon \in C$ i $\mathrm{Coker}\,\varepsilon \in C$; $\mathrm{Ker}\,\varepsilon = 0 \in C$ i $\mathrm{Coker}\,\varepsilon = D$, que per hipòtesi és de C. Per tant $B \in C$.

(iV) Definim $f\colon \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ per $f|_{A_i} = id$ si $i \notin J$ i 0 si $i \in J$. Llavors $\mathrm{Ker}\, f \cong \bigoplus_{j\in J} A_j$, i per tant

$\bigoplus_{j\in J} A_j \in C.$

(V) Considerem $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow B$ una presentació Z-lliure de B, és a dir, amb $F \cong \bigoplus Z$ i $R \cong \bigoplus Z$. Llavors tenim la successió exacta

$Tor(A,B) \rightarrowtail R\otimes A \longrightarrow F\otimes A \twoheadrightarrow B\otimes A$ on

$R\otimes A \cong \bigoplus A \in C$ i $F\otimes A \cong \bigoplus A \in C$. Per tant $B\otimes A \in C$ i $Tor(A,B) \in C$.

Demostració de la Proposició I-9:

Donat un grup abelià A, definim $P_{A/T(A)}$ com el conjunt de primers p, tals que A/T(A) té un subgrup p-bàsic diferent de zero. Fixada la classe C de grups abelians, definim $P_C = \bigcup_{A\in C} P_A$, $P_{C/T(C)} = \bigcup_{A\in C} P_{A/T(A)}$, $P = P_C \cup P_{C/T(C)}$. Dividirem la demostració en diferents apartats.

(i) Suposem $P \neq \emptyset$

i_1) $P_C \neq \emptyset$ amb C sense grups lliures de torsió.

Anem a veure que, en aquest cas, $A \in C$ si i només si A és de P_C = P-torsió.

$\Rightarrow$) Si $A \in C$, per construcció de P_C és ben clar que A és de P_C-torsió.

$\Leftarrow$) Sigui $p \in P_C$, llavors existeix $A \in C$ amb $A_p \neq 0$. Per ser $A_p = Tor(Z/p^\infty, A)$, $A_p \in C$. Considerem $A_p \otimes Z/p$. Si $A_p \otimes Z/p = 0$, A_p és divisible i per tant és isomorf a una suma directa de Z/p^∞. Aplicant el

Lema, $Z/p^{\infty} \in C$ i tot grup de P-torsió és de C.

Si $A_p \otimes Z/p \neq 0$, $A_p \otimes Z/p \cong \bigoplus Z/p$ i, tornant al Lema, $Z/p \in C$. Per hipòtesi d'inducció i per la condició a), aplicada al morfisme
$$\begin{array}{ccc} Z/p & \longrightarrow & Z/p^{\alpha} \\ x & \longrightarrow & p^{\alpha-1}x \end{array}$$
, concloem que $Z/p^{\alpha} \in C$ per tot $\alpha \in Z$. Per tant, per c, $Z/p^{\infty} \in C$ i tot grup de P-torsió és de C.

Si A és de P-torsió i f.g., $A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Z/p_i^{\alpha_i}$ on cada $p_i \in P$. Com que hem vist ja que $Z/p_i^{\alpha} \in C$, aplicant el lema, $A \in C$; si no és f.g., $A = \varinjlim A_i$, amb cada A_i f.g., i per c, $A \in C$.

i_2) $P_C \neq \emptyset$, $P_{C/T(C)} = \emptyset$ i C conté algun grup, A, lliure de torsió.

En aquest cas, tot A lliure de torsio de C és divisible, és a dir, isomorf a $\bigoplus Q$. Sigui $p \in P_C$ i considerem l'extensió $Z_p \rightarrowtail Q \twoheadrightarrow Q/Z_p$

Q/Z_p és de P-torsió, i per tant, per un argument ja utilitzat a i), és de C, d'on $Z_p \in C$, que és contra-deix amb que $P_{C/T(C)} = \emptyset$

i_3) Suposem $P_C \neq \emptyset$ i $P_{C/T(C)} \neq \emptyset$

En aquest cas demostrarem que $A \in C$ si i només si A és P-local

$\Longrightarrow$) A sempre pot posar-se com l'extensió $T(A) \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/T(A)$. T(A) és de P-torsió i per tant P-local. $A/T(A)$ té unicitat de P-arrels ja que $P_{A/T(A)} \subset P_{C/T(C)} \subset P$. Com que la classe dels grups abelians P-locals és tancada per extensions, acabem la demostració.

$\Leftarrow$) En primer lloc demostrarem que tot grup de P-torsió pertany a C.

Sigui $p \in P_C$. Aplicant l'argument de sempre tenim que tot grup de p -torsió és de C. Si $p \in P_{C/T(C)}$, vol dir que existeix $A/T(A) \in C$, amb el seu subgrup p-bàsic, B_p, diferent de zero, i per tant isomorf a $\oplus Z$. Tensorialitzant l'extensió

$\oplus Z \rightarrowtail A/T(A) \twoheadrightarrow A/T(A)/\oplus Z$, per un grup de p -torsió és manté l'exactitud (veure Fuchs, capítol X) i $A/T(A)/\oplus Z \otimes G = 0$.

Concloem que $G \in C$ i utilitzant que C és tancada per límits inductius, que tot grup de P-torsió pertany a C.

Per existir a C grups A-lliures de torsió, $A \otimes Q \cong \oplus Q$, per ser lliure de torsió i divisible, i $Q \in C$. Llavors, com que Q/Z_P és de P-torsió $Z_P \in C$ i, en conseqüència, tots els grups P-locals són de C

ii) Si $P = \emptyset$, $A \in C$ si i només si A és divisible i lliure de torsió, és a dir, C està formada pels grups $Z_\emptyset$ -locals.

CAPÍTOL II

En aquest capítol, dividit en dos apartats, considerem en primer lloc una nova classe de grups abelians: els acotats, per a la qual repetim l'estudi fet en el capitol anterior per als grups HPT. La comparació d'aquesta classe amb els grups abelians P-locals i de P-torsio a través de les condicions de la proposicio I-9 ens porta a definir, en general, una classe adequada C de grups abelians de manera que la classe HC té propietats anàlogues.

I. Grups amb homología acotada.

Un grup abelià A direm que és acotat si existeix un enter m tal que $mA = 0$. Un grup G (no necessàriament abelià), direm que és un HA grup, o simplement HA, si els grups H_nG són acotats per a tot $n \geq 1$.

Proposició II-1. Un grup abelià A és un HA grup si i només si és acotat.

Demostració: Si A és un HA grup és evident que és acotat, car $H_1A = A$.

Suposem A acotat i finitament generat. En aquest cas, si $mA = 0$, la successió de Künneth i la hipòtesi d'inducció sobre el nombre de generadors de A proven que $mH_nA = 0$, $n \geq 1$. Si A no es finitament generat, $A = \varinjlim A_i$ on cada A_i és f.g., $mA = 0$ implica $mA_i = 0$, i per tant $mH_nA = m.\varinjlim H_nA_i = 0$ ./.

<u>Proposició II-2</u>. Sigui $E: N \longrightarrow G \longrightarrow Q$ una successió exacta de grups amb N i Q HA grups. Llavors, G és un HA grup.

Demostració: Fixat un $n \in Z$, anem a veure que existeix m tal que $mH_nG = 0$. Considerem, amb les notacions de sempre, la filtració de H_nG,

$F_nG = H_nG \supseteq F_{n-1} \supseteq \dots \quad F_0 \supseteq F_{-1} = 0$, per a la qual $E^r_{p,n-p} = E^{\infty}_{p,n-p} = F_p/F_{p-1}$. $E^r_{p,n-p}$ és originat per quocients d'un subgrup de

$E^2_{p,n-p} = H_p(Q, H_{n-p}N)$. Si $n-p = 0$,

$H_p(Q,H_{n-p}N) = H_pQ$ i existeix, per hipòtesi, $m_{n,0}$ tal que $m_{n,0}\, H_nQ = 0$. Si $n-p = 0$, notem per $m_{p,n-p}$ un enter tal que $m_{p,n-p}\,(H_{n-p}N) = 0$, i per al qual, en conseqüència, es compleix

$m_{p,n-p}\,(H_p(Q,H_{n-p}N)) = 0$.

Si $m = \max\, m_{p,n-p}$, $p = 0,\dots, n$, és ben clar que $m\, F_p/F_{p-1} = 0$, i per tant que $m^{n+1}H_nG = 0$ ./.

Com hem dit, seguint la mateixa linia que per als grups HPT, estudiem en la següent proposició els grups nilpotents HA.

Proposició II-3. Sigui G un grup nilpotent. G és un HA grup si i només si G és acotat.

Demostració:

$\Rightarrow$) Que G és acotat és conseqüència de que G_{ab} ho és (vegis (5))

$\Leftarrow$) És ben clar per inducció sobre la classe de nilpotència de G, tot aplicant la proposició II-2

Proposició II-4. A l'extensió $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ si N i G són HA grups, Q també ho és.

Demostració: Els termes de la successió espectral $E^k_{m,n}$, $n \neq 0$, tenen el seu origen a $E^2_{m,n}$, i per tant són acotats. El que volem demostrar és que també els $E^2_{n,0} = H_nQ$ són acotats. Suposem $E^r_{n,0} = Z^{r-1}_{n,0} = E^\infty_{n,0} = F_n/F_{n-1}$ que és acotat per ser-ho H_nG. De la successió $Z^{r-1}_{n,0} \rightarrowtail E^{r-1}_{n,0} \longrightarrow E^{r-1}_{n-r+1,r-2}$, per ser $r-2 \geq 0$ i per les consideraciòns fetes abans, $E^{r-1}_{n,0}$ és acotat. Si $r = 3$ ja hem acabat, i si no $E^{r-1}_{n,0} = Z^{r-2}_{n,0}$, i repetim el mateix raonament per a la successió $Z^{r-2}_{n,0} \rightarrowtail E^{r-2}_{n,0} \longrightarrow E^{r-2}_{n-r+2,r-3}$. Si $r = 4$, ja hem acabat, i si no anem fent ./.

Corol.lari. $G_1 \rtimes G_2$ i $G_1 \times G_2$ són HA si i només si G_1 i G_2 ho són.

Demostració: Val la mateixa que per als grups HPT ./.

Per evitar repetir el que ja hem fet en el Capítol I, les següents proposicions les donem sense demostració, fent esment, només, de que les dificultats són les mateixes que les anàlogues per grups HPT.

Proposició II-5. Suposem G_1, G_2, U grups amb U subgrup de G_1 i de G_2. Llavors si tres dels grups G_1, G_2, U, $G_1 *_U G_2$ són HA grups, també ho és el quart

Corol.lari. $G_1 * G_2$ és un HA grup si i només si G_1 i G_2 són els dos HA grups.

Proposició II-6. Donada $E: N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ extensió amb G HA, Q és HA si i només si $N/[G,N]$ és acotat i $G/[G,N]$ és un HA grup.

Corol.lari. Si E és K-central, i G un HA grup, Q també ho és si i només si N és acotat.

Així doncs, gairebé, l'estudi dels grups HA ha estat una repetició del que hem fet en el Capítol anterior per als grups HPT. El seu màxim interés, però, és que ens proporciona un exemple d'una classe de grups abelians que compleix les condicions a) i b) de la proposició I-9 i per la qual la classe HA és tan similar com hem vist a les classes HPT i HPL. Això és el que sugereix el següent apartat, on comprovem que per a una classe C de grups abelians amb les condicions a) i b), la classe HC és tancada per extensions, productes lliures, etc.

II. Una formulació general.

En tot el que fem a continuació l'expressió " classe de grups abelians C " voldrà dir una família de grups abelians amb les propietats

a) Si $A \in C$ i $f: A \longrightarrow B$ és un morfisme, $B \in C$ si i només si $\operatorname{Ker} f \in C$ i $\operatorname{Coker} f \in C$

b) Si $A \in C$, $\bigoplus_{i \in I} A_i \in C$ per a tot conjunt d'indexs I

<u>Proposició II-7</u>. Sigui G un grup i A un G-mòdul tal que com a grup abelià pertany a C. Llavors $H_n(G,A) \in C$ per a tot $n \geq 1$.

Demostració: Sigui $F_n \twoheadrightarrow Z$ una presentació G-lliure de Z, això és, $F_n = \bigoplus ZG$. Considerem el complex $A \otimes_G F_n \twoheadrightarrow A \otimes_G Z$, que ens serveix per a definir $H_n(G,A)$ com $\operatorname{Ker} \delta_{n-1} / \operatorname{Im} \delta_n$ on $\delta_{n-1}: A \otimes_G F_n \longrightarrow A \otimes_G F_{n-1}$. Com que $A \otimes_G F_n = \bigoplus A \in C$, acabem la demostració ./.

<u>Definició</u>. Direm que G és un HC grup si els grups $H_n G \in C$ per a tot $n \geq 1$.

<u>Proposició II-8</u>. Si $E: N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ és exacta i N i Q són HC, G és HC.

Demostració: N'hi ha prou de veure que els $E^k_{p,q} \in C$, ja que en aquest cas, considerant la filtració de H_nG, $F_n = H_nG \supseteq \dots\ F_0 \supseteq F_{-1} = 0$, $F_n/F_{n-1} = E^r_{n,0} \in C$, i $F_{n-1} \in C$ per inducció.

Si $k = 2$, $E^2_{p,q} = H_p(Q,H_qN)$, que, si $q \neq 0$, per la proposició II-7, pertany a C; si $q = 0$, $E^2_{p,q} = H_pQ$ i pertany a C per hipòtesi. Suposem que $E^k_{p,q} \in C$ i anem a veure que $E^{k+1}_{p,q} \in C$ per a tots els enters p i q $E^{k+1}_{p,q} = Z^k_{p,q}/B^k_{p+k,q-k+1}$, i per hipòtesi d'inducció $Z^k_{p,q}$ i $B^k_{p+k,q-k+1}$ pertanyen els dos a C ./.

Aquesta proposició ens simplifica la següent, en la que demostrem que C és tancada per homologia.

<u>Lema II-1</u>. Si $A \in C$, $T(A)$ i $A/T(A)$ pertanyen a C

Demostració: $T(A) = \mathrm{Tor}(Q/Z,A)$ (vegis (3) Capitol X) i podem aplicar el lema I-9.

Aplicant la condicio a) de definició de C, $A/T(A)$ C ./.

<u>Proposició II-9</u>. Si $A \in C$, $A \in HC$.

Demostració: Dividirem la demostració en dues parts

1ª) Suposem A de torsió

Considerem l'extensió

$\oplus B_p \rightarrowtail \bigoplus_{p\in P_A} A_p \twoheadrightarrow \bigoplus_{p\in P_A} A_p/B_p$ (*), on B_p és zero si A_p és divisible o acotat, i un subgrup p-bàsic en cas contrari. Posem $D = \bigoplus_{p\in P_A} D_p$, on cada $D_p = Z/p \oplus Z/p^2 \oplus \ldots \oplus Z/p^k \oplus \ldots$ si $B_p \neq 0$ i 0 en cas contrari. Tensorialitzant l'extensió (*) per D tenim que es conserva la injectivitat per ser cada $B_p \rightarrowtail A_p \twoheadrightarrow A_p/B_p$ p-pura ((3) Capitol X) i ens queda la successió exacta

$\bigoplus_{p\in P_A} B_p \otimes D_p \rightarrowtail \oplus A_p \otimes D_p \twoheadrightarrow \oplus A_p/B_p \otimes D_p$. Per ser B_p p-bàsic, és clar que cada B_p és un sumand directe de $B_p \otimes D_p$, i com que, $A_p/B_p \otimes D_p = 0$ per ser A_p/B_p divisible, $\oplus B_p \otimes D_p \cong A_p \otimes D_p \in C$, $\oplus B_p$ és un sumand directe de $\oplus B_p \otimes D_p$ i concloem que $\oplus B_p \in C$. En conseqüencia $\bigoplus_{p\in P_A} A_p/B_p \in C$. Si A_p/B_p és divisible $A_p/B_p \cong \oplus Z/p^\infty$; en cas contrari A_p és acotat i $A_p = \bigoplus_{i=1}^{\alpha_p} E_i$ on cada $E_i \cong \oplus Z/p^i$. Per tant $F = \bigoplus_{p\in P_A} F_p$, on $F_p = Z/p^\infty$ si A_p/B_p és divisible i Z/p^{α_p} en cas contrari, és un sumand directe de $\bigoplus_{p\in P_A} A_p/B_p$ i pertany a C.

$Tor(F,HA) \cong \bigoplus_{p\in P_A} Tor(F_p,HA) \cong \oplus Tor(F_p,(HA)_p)$; si $F_p = Z/p^\infty$ $Tor(F_p,HA) = (HA)_p$ i si $F_p = Z/p^{\alpha_p}$, com que $p^{\alpha_p}.A_p = 0$, $0 = p^{\alpha_p} H(A_p) = p^{\alpha_p}(H(A))_p$ (pel que ja sabem dels grups HPT). En tots els casos $Tor(F_p,HA) \cong (HA)_p$, i concloem que $HA \cong \bigoplus_{p\in P_A} (HA)_p \in C$.

2^{ona}) Suposem A lliure de torsió

Posem P_A el conjunt de primers p per als quals existeix un subgrup p-bàsic, B_p, diferent de zero. Aleshores, és clar que A i H_nA $(n \geq 1)$ són P_A-locals i, en conseqüencia, n'hi ha prou de demostrar que

$Z_{P_A} \in C$.

A l'extensió $Z_{P_A} \rightarrowtail Q \twoheadrightarrow Q/Z_{P_A}$, $Q \in C$ ja que $Q \otimes A \cong \oplus Q$, i $Q/Z_{P_A} \cong \bigoplus_{p \in P_A} Z/p^\infty$ per ser divisible i de P_A-torsio. Llavors $A \otimes Q/Z_{P_A} \cong \oplus A \otimes Z/p^\infty$ i si ens fixem en l'extensio $B_p \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/B_p$, concloem que $A \otimes Z/p^\infty \cong \oplus Z/p^\infty$ i que Q/Z_{P_A} que és un sumand directe de $A \otimes Q/Z_{P_A}$, pertany à C.

Val a dir que si $P_A = \emptyset$, llavors A i H_nA són $Z_\emptyset$ -locals (divisibles i lliures de torsio) i el resultat és, també, vàlid ja que H_nA és una suma directa de Q, i com que $Q \in C$, hem acabat ./.

En les següents proposicions estudiem condicions necessàries i suficients perquè un grup nilpotent sigui HC. Val a dir que els resultats, encara que força senzills, no ho són tant com els obtinguts per grups HPT i HA, degut a que en general, com veurem, la classe C no és tancada per subgrups.

Aclarim, abans, que donat un grup G, per G_1 entenem el mateix grup G i per G_{i+1} el grup definit per $[G,G_i]$.

<u>Proposició II-10.</u> Sigui G nilpotent. G és un HC grup si i només si $G_i/G_{i+1} \in C$ per a tot i.

Demostració:

$\Rightarrow$) Ho farem per inducció sobre i.

Si i = 1, $G_1/G_2 = G_{ab} = H_1G$, $G_1/G_1 = 0$. Si $i \geq 2$, considerem, l'extensió

$G_{i-1}/G_i \rightarrowtail G/G_i \twoheadrightarrow G/G_{i-1}$. Aplicant hipòtesi d'inducció i que HC és tancada per extensions, concloem que G/G_i és un HC grup. Per demostrar que $G_i/G_{i+1} \in C$ és suficient considerar la successió dels 5-termes associada a l'extensió $G_i \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/G_i$,

$$H_2G \longrightarrow H_2G/G_i \longrightarrow G_i/G_{i+1} \longrightarrow G_{ab} \xrightarrow{\sim} G_{ab} \longrightarrow 0$$

i tenir en compte la condició a) de definició de C.

$\Leftarrow$) Per i = c a l'extensió

$G_c \rightarrowtail G_{c-1} \twoheadrightarrow G_{c-1}/G_c$, G_c i G_{c-1}/G_c són de C (i per tant de HC) per hipòtesi. Llavors, fent inducció G és un HC grup./.

<u>Proposició II-11.</u> Sigui G nilpotent. G és HC si i només si H_1G i H_2G pertanyen els dos a C.

Demostració:

$\Longrightarrow$) No cal fer res.

$\Longleftarrow$) La successió dels cinc-termes aplicada a l'extensió $G_i \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/G_i$, és

$$H_2G \longrightarrow H_2G/G_i \longrightarrow G_i/G_{i+1} \longrightarrow G_{ab} \xrightarrow{\sim} G_{ab} \longrightarrow 0.$$

Per inducció sobre i, podem suposar $G/G_i \in HC$ (pensis que $G/G_2 = H_1G$ que és HC per hipotesi) i concloure que $G_i/G_{i+1} \in C$. Llavors de l'extensió $G_i/G_{i+1} \rightarrowtail G/G_{i+1} \twoheadrightarrow G/G_i$ tenim que G/G_{i+1} és HC, i de la proposició anterior que G és HC ./.

Si comparem aquesta proposició darrera amb les demostracions de les proposicions II-3 i I-4 veurem que perquè G, nilpotent, fos HPT o HA bastava que H_1G fos de P-torsió o acotat. En general cal, però, la condició de que H_2G també sigui de C, com demostra el següent exemple.

Exemple (*): Sigui p un nombre primer qualsevol. Definim $G = \langle z_0, x_i, y_i, i = 0,1,\ldots : z_0^p = 1, x_i = x_{i+1}^p, y_i = y_{i+1}^p, [x_i, y_j] = 1 \text{ si } i \neq j, [x_i, z_0] = [y_i, z_0] = 1, [x_i, y_i] = z_0 \rangle$. Llavors, amb

(*) Aquest exemple té el seu origen en un exemple del treball d'en Pere Menal " Sobre radicales finitos i linealidad residual de grupos nilpotentes ". Publ. Mat. U.A.B. nº 7.

aquestes relacions, és clar que $G_2 = [G,G] = \langle z_0 \rangle = Z/p$ i que G és un grup nilpotent de classe 2. H_1G en aquest cas seria el grup abelià generat per $\bar{x}_i$ i $\bar{y}_i$ amb les relacions $\bar{x}_i = \bar{x}_{i+1}^{\,p}$ i $\bar{y}_i = \bar{y}_{i+1}^{\,p}$, és a dir, és un grup isomorf a $Q_p \oplus Q_p$, on Q_p és el grup additiu dels racionals que tenen per denominadors potències de p, i per tant H_1G és P'-local i en canvi G no ho és (pensis que $z_0^p = 1$, i que z_0 no té p-arrels a G).

La següent proposició assegura, però, que per a classes C tancades per subgrups aquest cas no pot donar-se.

<u>Proposició II-12</u>. Si C és tancada per subgrups, G nilpotent és HC si i només si, H_1G pertany a C.

Demostració: Segons (5) peracada i tenim un morfisme $\overset{i}{\otimes} G_{ab} \xrightarrow{f} G_i/G_{i+1}$. Per un lema anterior $\overset{i}{\otimes} G_{ab} \in C$, i per ser C tancada per subgrups Ker $f \in C$, i en conseqüencia $G_i/G_{i+1} \in C$ ./.

En la següent proposició demostrem que la classe HC és tancada per quocients quan el grup i el subgrup mòdul són els dos HC. Volem aclarir que, en la demostració, usarem sense cap mena de definició ni de consideració les notacions referents a successions espectrals ja utilitzades en el capítol I.

Proposició II-13. Donada l'extensió

$E: N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ on N i G són HC, Q també és HC.

Lema II-2. $E^r_{p,q} \in C$ per a tot enter $r \geq 2$ i tot $q \geq r-1$.

Demostració: Si $r = 2$ i $q \geq 1$, $E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q N)$ i ja hem vist en el lema II-1 que pertany a C. Continuem la demostració fent inducció sobre r.

$E^r_{p,q} = Z^{r-1}_{p,q}/B^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$, $Z^{r-1}_{p,q}$ és el nucli del morfisme $E^{r-1}_{p,q} \longrightarrow E^{r-1}_{p-r+1,q+r-2}$, i per inducció pertany a C. Anem a veure que $B^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \in C$. Considerem la successió (no exacta !)

$N^0_{r-2} = Z^{r-2}_{p+r-1,q-r+2} \xrightarrow{g_{r-2}} E^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \xrightarrow{f_{r-1}} E^{r-1}_{p,q}$, on g_{r-2} és la projecció (pensis que $E^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$ és un quocient de $Z^{r-2}_{p+r-1,q-r+2}$) i f_{r-1} l'aplicació que amb bona notacio s'hauria de posar com $d^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$ però que per facilitar l'escritura posem simplement com f_{r-1}

Llavors $B^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} = \mathrm{Im}\, f_{r-1} = \mathrm{Im}\,(f_{r-1} \circ g_{r-2})$.

Considerem la successió (no exacta !)

$N^0_{r-3} = Z^{r-3}_{p+r-1,q+2-r} \xrightarrow{g_{r-3}} E^{r-2}_{p+r-1,q+2-r} \xrightarrow{f_{r-2}} E^{r-2}_{p+1,q-1}$

on per les f i g valen (i valdran a partir d'ara), les mateixes consideracions que abans. Llavors tenim una aplicació exhaustiva

$N^1_{r-3} = \mathrm{Ker}\,(f_{r-2} \circ g_{r-3}) \xrightarrow{g_{r-3}} N^0_{r-2} \xrightarrow{g_{r-2}} E^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$

i $\mathrm{Im}\, f_{r-1} = \mathrm{Im}\,(f_{r-1} \circ g_{r-2} \circ g_{r-3})$.

Considerem en un següent pas, les successións

$$N^0_{r-4} = Z^{r-4}_{p+r-1,q+2-r} \xrightarrow{g_{r-4}} E^{r-3}_{p+r-1,q+2-r} \xrightarrow{f_{r-3}} E^{r-3}_{p+2,q}$$

$$N^1_{r-4} = \mathrm{Ker}\,(f_{r-3} \circ g_{r-4}) \xrightarrow{g_{r-4}} N^0_{r-3} \xrightarrow{f_{r-2}\circ g_{r-3}} E^{r-2}_{p+1,q-1}$$

$$N^2_{r-4} = \mathrm{Ker}\,(f_{r-2} \circ g_{r-3} \circ g_{r-4}) \longrightarrow N^1_{r-3}$$

$$N^2_{r-1} \longrightarrow N^1_{r-3} \longrightarrow N^0_{r-2} \longrightarrow E^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \xrightarrow{f_{r-1}} E^{r-1}_{p,q}$$

Així podem anar seguint per inducció fins que arribariem, en un nombre finit de pasos, a les successions

$$N^0_2 = Z^2_{p+r-1,q+2-r} \xrightarrow{g_2} E^3_{p+r-1,q+2-r} \longrightarrow E^3_{p+r-4,q+4-r}$$

on $N^0_2 \in C$ per ser $q \geq r-1$, $q+2-r \geq 1$. Llavors $N^1_2 = \mathrm{Ker}\,(f_3 \circ g_2) \in C$, perque $q+4-r \geq 3-1 = 2$, i tenim la successió

$$N^1_2 \xrightarrow{g_2} N^0_3 \xrightarrow{g_3} E^4_{p+r-1,q+2-r} \xrightarrow{f_4} E^4_{p+r-5,q+5-r} \in C$$

d'on deduim $N^2_2 = \mathrm{Ker}\,(f_4 \circ g_3 \circ g_2) \in C$.

Al final, tindriem que $\mathrm{Im}\, f_{r-1}$ és la imatge d'un cert morfisme $N^k_2 \longrightarrow E^{r-1}_{p,q}$, amb $N^k_2 \in C$ i $E^{r-1}_{p,q} \in C$ per inducció. Concloem que $\mathrm{Im}\, f_{r-1} \in C$ ./.

<u>Lema II-3</u>. Fixat $n \in Z$, $n \geq 1$, considerem la filtració de H_nG, $F_n = H_nG \supseteq F_{n-1} \cdots \supseteq F_0 \supseteq F_{-1} = 0$. Llavors els grups abelians F_n/F_{k-1}, F_k/F_{k-1}, F_k, pertanyen a C peratot $k \leq n-1$.

Demostració: Per inducció sobre k. Si $k = -1$, $F_n/F_{-2} = H_n G$ i $F_{-1}/F_{-2} = F_{-1} = 0$. Suposem-ho cert fins a k-1, i demostrem-ho per k. Llavors, per hipòtesi d'inducció, $F_n/F_{k-2} \in C$ i $F_{k-1}/F_{k-2} \in C$ i com que $F_n/F_{k-1} = F_n/F_{k-2} \big/ F_{k-1}/F_{k-2}$ també pertany a C, $F_k/F_{k-1} = E^r_{k,n-k} = Z^{r-1}_{k,n-k}/B^{r-1}_{k+r-1,n-k+1-r}$, i tenim una aplicació exhaustiva $Z^{r-1}_{k,n-k} \xrightarrow{g_{r-1}} F_k/F_{k-1}$

Considerem la successió (no exacta !)

$Z^2_{k,n-k} \xrightarrow{g_2} E^3_{k,n-k} \xrightarrow{f_3} E^3_{k-3,n-k+2}$. Pel lema anterior $E^3_{k-3,n-k+2} \in C$ i per ser $k \leq n-1$, $Z^2_{k,n-k} \in C$; Llavors $N^1_2 = \mathrm{Ker}\ (f_3 \circ g_2) \in C$ i tenim una aplicacio exhaustiva $N^1_2 \xrightarrow{g_2} \mathrm{Ker}\ f_3 = Z^3_{k,n-k}$.

En un següent pas considerem la successio

$N^1_2 \xrightarrow{g_2} Z^3_{k,n-k} \xrightarrow{g_3} E^4_{k,n-k} \xrightarrow{f_4} E^4$

pel lema anterior $E^4_{k-4,n-k+3} \in C$, i, en conseqüencia, $N^2_2 = \mathrm{Ker}\ (f_4 \circ g_3 \circ g_2) \in C$, i tenim una aplicacio exhaustiva $N^2_2 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ f_4 = Z^4_{k,n-k}$.

Continuant amb el mateix procés, tindriem $N^2_{r-3} \in C$ i una aplicació exhaustiva

$$N^2_{r-3} \longrightarrow Z^{r-1}_{k,n-k} \longrightarrow F_k/F_{k-1} \rightarrowtail F_n/F_{k-1}$$

Per inducció, $F_{k-1} \in C$, que implica $F_n/F_{k-1} \in C$, i per tant $F_k/F_{k-1} = \mathrm{Im}\ (N^2_{r-3} \longrightarrow F_n/F_{k-1}) \in C$, i F_k C ./.

Demostració de la Proposició:

En primer lloc demostrarem que si k és un enter tal que $k+2 \leq r$, llavors $E^{r-k+1}_{n-r+k,r-k-1} \in C$.

Si $K = 1$, es tracta de provar que $E^{r}_{n-r+1,r-2} \in C$. Però

$E^{r}_{n-r+1,r-2} = E^{r}_{n-r+1,(n-1)-(n-r+1)} \in C$.

Suposem $k > 1$. Llavors $E^{r}_{n-r+k,r-k-1} = Z^{r-1}_{n-r+k,r-k-1}/B^{r-1}_{n-2r+k+1,-k+1}$

Per ser $k > 1$, $B^{r-1}_{n-2r+k+1,-k+1} = 0$, i

$E^{r}_{n-r+k,r-k-1} = Z^{r-1}_{n-r+k,r-k-1} \in C$. Considerem ara la successió

$$Z^{r-1}_{n-r+k,r-k-1} \rightarrowtail E^{r-1}_{n-r+k,r-k-1} \longrightarrow E^{r-1}_{n-2r+k+1,2r-k-3}$$

Com que, $2r-k-3 \geq r-1 \geq r-2$, $E^{r-1}_{n-r+k,r-k-1} \in C$, pel lema II-2. Si $k = 2$, ja hem acabat. Si $k \geq 3$, fent el de sempre $E^{r-1}_{n-r+k,r-k-1} = Z^{r-2}_{n-r+k,r-k-1} \in C$ i considerem la successió

$$Z^{r-2}_{n-r+k,r-k-1} \rightarrowtail E^{r-2}_{n-r+k,r-k-1} \longrightarrow E^{r-2}_{n-2r+k+2,2r-k-4}$$

Com que $2r-k-4 \geq r-2 \geq r-3$, $E^{r-2}_{n-r+k,r-k-1} \in C$.

Si $k = 3$, $r-2 = r-k+1$ i hem acabat. Si no, anem fent. Pel lema II-3, $E^{r}_{n,0} = F_n/F_{n-1} \in C$, i $E^{r}_{n,0} = Z^{r-1}_{n,0}/B^{r-1}_{n+r-1,-r+2}$. Si $r = 2$, $E^{2}_{n,0} = H_nQ$ i hem acabat, si no ($r \geq 3$), $E^{r}_{n,0} = Z^{r-1}_{n,0} \in C$, i podem considerar la successió

$Z^{r-1}_{n,0} \rightarrowtail E^{r-1}_{n,0} \xrightarrow{f_{r-1}} E^{r-1}_{n-r+1,r-2}$. Per les consideracions fetes just abans i pel lema II-2, $\mathrm{Im}\, f_{r-1} \in C$ i $E^{r-1}_{n,0} \in C$. Llavors si $r = 3$, ja hem acabat i si no anem fent fins arribar a una successió del tipus $Z^2_{n,0} \rightarrowtail E^2_{n,0} \longrightarrow E^2_{n-2,1}$, de la que deduiriem $E^2_{n,0} = H_nQ \in C$ com voliem veure ./.

<u>Corol.lari</u>. $G_1 \rtimes G_2$ i $G_1 \times G_2$ són HC si i només si G_1 i G_2 ho són.

Demostració: És gairebé la mateixa que la feta en el capitol I per a grups HPT ./.

<u>Proposició II-14</u>. Suposem G_1, G_2, U grups amb U subgrup de G_1 i de G_2. Llavors si tres dels grups G_1, G_2, U, $G_1 *_U G_2$ són HC, també ho és el quart.

Demostració: N'hi ha prou de tenir en compte la successió de Mayer-Vietoris adequada i que donats dos grups abelians A, B; $A \oplus B \in C \Leftrightarrow A, B \in C$ ./.

<u>Corol.lari</u>. $G_1 * G_2$ és un HC grup si i només si G_1 i G_2 ho són ./.

En les demostracions de la proposició I-8 i del seu corol.lari en cap moment hem utilitzat cap fet específic dels grups de P-torsió, i , per tant, mitjançant un canvi adequat de llenguatje continuarant sent certes per grups HC, és a dir:

<u>Proposició II-15</u>. Si en una extensió de grups $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, G és HC, Q també ho és si i

només si $N/[G,N] \in C$ i $G/[G,N]$ és un HC grup.

<u>Corol.lari</u>. Si $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ és k-central i G és HC, Q és HC si i només si $H_1 N$ i $H_2 N$ pertanyen a C

Finalment donarem alguns exemples de famílies de grups abelians que compleixen les condicions de definició del que hem anomenat " Classe de grups abelians " en tot aquest capítol.

1- Grups de torsió amb un nombre finit de p-components.

2- Grups de torsió amb cada p-component acotada.

3- Grups de cotorsió i reduits. (Per a veure que aquests darrers grups formen realment una "Classe de grups abelians " es pot consultar (3)).