PUBL. Mat. UAB
Nº 18 Abril 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales
y Aplicaciones. Valldoreix, Mayo 1979.

CONVOLUCION Y FUNCIONES ANALITICAS DE UN NUMERO FINITO DE OPERADORES LINEALES CONMUTATIVOS DE $L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$.

José Juan Rodríguez Cano.
Universidad del País Vasco. Bilbao

RESUMEN.

El objeto de la presente memoria, es proporcionar un método para obtener en forma polinómica una expresión de $f(A_1,\dots,A_N)$ $(f:(A_1,\dots,A_N)\in(L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))^N \longrightarrow L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))$, cuando f es analítica en un cierto entorno del producto cartesiano de los valores espectrales de cada A_i, y las aplicaciones lineales conmutan dos a dos: $A_i.A_j= A_j.A_i$ 1 i,j N

RESULTADOS.

1. Las hipótesis de conmutatividad de las aplicaciones, es una condición suficiente para extender los resultados obtenidos para el caso de una aplicación lineal, cuando f es analítica en un cierto entorno del producto cartesiano de los valores espectrales de cada A_i. Sean:

$(A_1,\dots,A_N)\in(L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))^N$, $f(A_1,\dots,A_N)\in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$, $A_i.A_j= A_j.A_i, 1\leq i,j\leq N$

$\sigma(A_i)= (\lambda_j^i)$, $1\leq i\leq N$, $1\leq j\leq n$, los valores espectrales de cada A_i.

$V_j^i(\lambda_j^i)$ un entorno de λ_j^i, $\bigcup_{j=1}^{n} V_j^i(\lambda_j^i)$ U_i. U_i, un abierto de $\mathbb{C}$. ∂U_i frontera de U_i, consistente en un número finito de curvas rectificables de Jordan, orientadas en sentido positivo, $1\leq i\leq N$.

$W= U_1 \times \dots \times U_N$, $\partial W= \partial U_1\times\dots\times\partial U_N$ frontera de W.

$\sigma(A_1)\times\ldots\times\sigma(A_N)\subset(\bigcup_{j=1}^{n} V_j^1(\lambda_j^1))\times\ldots\times(\bigcup_{j=1}^{n} V_j^N(\lambda_j^N))\subset U_1\times\ldots\times U_N\subset D_h(f)$

($D_h(f)$,dominio de holomorfía de f.Se tiene con estas hipótesis:

$$(1)\quad f(A_1,\ldots,A_N)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\partial W} f(z_1,\ldots,z_N)(z_1I_n-A_1)^{-1}\ldots(z_NI_n-A_N)^{-1}dz_1\ldots dz_N=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_N=1}^{n}\left(\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\partial W}\frac{f(z_1,\ldots,z_N)}{\prod_{j_1=1}^{k_1}(z_1-\lambda_{j_1}^1)\ldots\prod_{j_N=1}^{k_N}(z_N-\lambda_{j_N}^N)}dz_1\ldots dz_N\right).$$

$$\prod_{j_1=1}^{k_1}(A_1-\lambda_{j_1}^1 I_n)\ldots\prod_{j_N=1}^{k_N}(A_N-\lambda_{j_N}^N I_n),$$

2.Se proporciona una cierta generalizacióndel teorema de HAMILTON-CAYLEY.La siguiente:

Si f y g contienen en su dominio de holomorfía a W (descrito en el resultado 1),siendo $f\neq g$,pero coincidiendo en el producto cartesiano de los valores espectrales de cada A_i,lo cual expresamos en la siguiente forma:

$$f(\sigma(A_1)\times\ldots\times\sigma(A_N))=g(\sigma(A_1)\times\ldots\times\sigma(A_N))$$

y conmutando las aplicaciones lineales A_i,es decir: $A_i.A_j=A_j.A_i$, se tiene:

$$f(A_1,\ldots,A_N)=g(A_1,\ldots,A_N)$$

3. Se establece la relación entre las distintas definiciones que se proporcionan para $f(A_1,\ldots,A_N)$,cuando las aplicaciones lineales A_i,conmutan.

4. Se aplican los resultados anteriormente obtenidos para resolver los sistemas diferenciales lineales de la forma:

$$S\begin{cases}DX(t)=f(t,A_1,\ldots,A_N)X(t)\\ X(t_0)=X_0\end{cases}$$

Cuando f es continua con respecto a t y analitica con respecto a las restantes variables,estando contenido W en el dominio de holomorfía de f con respecto a las variables que es analítica. Continua respecto a t en $J=[t_0,t_1]$ Conmutando además las A_i. Se prueba que con estas hipótesis el sistema S satisface el criterio de Lappo-Dānilevski.

INTRODUCCION.

Para obtener el resultado (1), fundamental entre los de ésta memoria sólo se requiere del obtenido y presentado en: V JORNADAS MATEMATICAS LUSO-ESPANHOLAS. AVEIRO (PORTUGAL). Marzo de 1978, con el título de: CONVOLUCION Y FUNCIONES ANALITICAS DE VARIABLE MATRICIAL (Autor: José Juan Rodríguez Cano), cuyas actas están aún en elaboración y próxima su aparición.

En esencia el resultado requerido es el siguiente:

Si por F(A), anotamos la familia de funciones complejas de variable compleja, cuyo dominio de holomorfía contiene un cierto entorno de los valores espectrales de A. $\sigma(A)=(\lambda_j)$ $1\leq j\leq n$ $V_i(\lambda_i)$, entorno de λ_i, $\sigma(A)\subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i(\lambda_i)\subset U\subset D_h(f)$. U un abierto de $\mathbb{C}$. $D_h(f)$, dominio de holomorfía de f. ∂U, frontera de U consistente en la unión de un número finito de curvas rectificables de Jordan, orientadas en sentido positivo. Con estas hipótesis para toda $f\in F(A)$, f(A) queda definida, haciendo previamente uso de la definición dada por N. DUNFORD, para f(A), por:

$$f(A)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\lambda_j)}dz\right)\prod_{j=1}^{k-1}(A-\lambda_j I_n)$$

A continuación se proporciona una definición de $f(A_1,\ldots,A_N)$, extendiendo la de N. DUNFORD, cuando las A_i conmutan.

DEFINICION EN FORMA INTEGRAL DE FUNCIONES DE UN NUMERO FINITO DE OPERADORES LINEALES CONMUTATIVOS DE $L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$.

Sean $(A_i)_{i=1}^{i=N}$, $A_i \in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$, un conjunto de aplicaciones lineales conmutativas: $(A_i . A_j) = A_j . A_i)_{i,j=1}^{i,j=N}$, $\sigma(A_i)=(\lambda^i_{j_i})_{j_i=1}^{j_i=n}$ el espectro de A_i, con $i=(1,2,\ldots,N)$.

Se designa por $F(A_1,A_2,\ldots,A_N)$ el conjunto de funciones $f: \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$, holomorfas en algún entorno de $\sigma(A_1)\times\sigma(A_2)\times\ldots\times\sigma(A_N)$.

Sea $f \in F(A_1,A_2,\ldots,A_N)$ y $W = U_1\times U_2\times\ldots\times U_N \subset \mathbb{C}^p$, un abierto, tal que

$$W \supset \Big(\bigcup_{j_1=1}^{n} V_1(\lambda^1_{j_1})\Big)\times\Big(\bigcup_{j_2=1}^{n} V_2(\lambda^2_{j_2})\Big)\times\ldots\times\Big(\bigcup_{j_N=1}^{n} V_N(\lambda^N_{j_N})\Big) \supset \sigma(A_1)\times\sigma(A_2)\times\ldots\times\sigma(A_N)$$

(siendo $V_i(\lambda^i_j)$, algún entorno de λ^i_j), W estando contenido en el dominio de holomorfía de f.

Sea Ω la frontera de W, $\Omega = \Gamma^1\times\Gamma^2\times\ldots\times\Gamma^N$, donde cada Γ^i, es la frontera de U_i, y consiste en un número finito de curvas cerradas simples rectificables de Jordan, orientadas en el sentido positivo.

Se define, en forma integral con Poincaré-Dunford, la aplicación lineal $f(A_1,A_2,\ldots,A_N) \in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$, por:

$$(26)\quad f(A_1,\ldots\ldots,A_N)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_\Omega f(z_1,z_2,\ldots,z_N)(z_1I_n-A_1)^{-1}\cdots(z_NI_n-A_N)^{-1}dz_1\ldots\ldots dz_N$$

A partir de esta definición y empleando el resultado obtenido en el teorema 2, y de la conmutatividad de las aplicaciones A_i, resulta la siguiente:

DEFINICION CONVOLUCIONAL DE $f(A_1,A_2,\dots,A_N)$

$\forall f \in F(A_1,A_2,\dots,A_N)$, con $A_i \in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$, $\forall i$ y $(A_iA_j=A_jA_i)_{i,j=1}^{i,j=N}$ y las condiciones establecidas para Ω , se tiene:

$$(27)\qquad f(A_1,\dots,A_N) =$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\Omega} f(z_1,\dots,z_N)\left(\sum_{k_1=1}^{n}\frac{\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(A_1-\lambda^1_{j_1}I_n)}{\prod_{j_1=1}^{k_1}(z_1-\lambda^1_{j_1})}\right)\dots\left(\sum_{k_N=1}^{n}\frac{\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(A_N-\lambda^N_{j_N}I_n)}{\prod_{j_N=1}^{k_N}(z_N-\lambda^N_{j_N})}\right)dz_1\dots dz_N$$

que se conocerá como la definición convolucional de $f(A_1,A_2,\dots A_N)$.

RELACION ENTRE LA DEFINICION CONVOLUCIONAL Y POLINOMICA CARACTERISTICA

Aplicando el teorema generalizado de los residuos a (27) , se tiene:

$$(28)\qquad f(A_1,\dots,A_N) =$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\dots\sum_{k_N=1}^{n}\left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1}\dots\mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\lambda^1_{j_1},\dots,\lambda^N_{j_N})\right)\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(A_1-\lambda^1_{j_1}I_n)\dots\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(A_N-\lambda^N_{j_N}I_n)$$

que se conocerá como la definición polinómica característica de $f(A_1, A_2, \ldots, A_N)$.

En (28) se ha puesto:

$$(29) \quad \left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1} \mathop{*}_{j_2=1}^{k_2} \cdots \mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\lambda^1_{j_1}, \lambda^2_{j_2}, \ldots, \lambda^N_{j_N})\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\Omega} \frac{f(z_1, z_2, \ldots, z_N)}{\prod_{j_1=1}^{k_1} (z_1 - \lambda^1_{j_1}) \prod_{j_2=1}^{k_2} (z_2 - \lambda^2_{j_2}) \cdots \prod_{j_N=1}^{k_N} (z_N - \lambda^N_{j_N})} \, dz_1 \, dz_2 \ldots dz_N =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N} \oint_{\Gamma^1} \oint_{\Gamma^2} \cdots \oint_{\Gamma^N} \frac{f(z_1, z_2, \ldots, z_N)}{\prod_{j_1=1}^{k_1} (z_1 - \lambda^1_{j_1}) \prod_{j_2=1}^{k_2} (z_2 - \lambda^2_{j_2}) \cdots \prod_{j_N=1}^{k_N} (z_N - \lambda^N_{j_N})} \, dz_1 dz_2 \ldots dz_N$$

<u>PROPIEDADES DE:</u> $\left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1} \mathop{*}_{j_2=1}^{k_2} \cdots \mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\lambda^1_{j_1}, \lambda^2_{j_2}, \ldots, \lambda^N_{j_N})\right)$.

1. Sí $\lambda^i_{j_e} \neq \lambda^i_{j_m}$, $i = (1, 2, \ldots, N)$, $j_e \neq j_m$

$$(30) \quad \left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1} \mathop{*}_{j_2=1}^{k_2} \cdots \mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\lambda^1_{j_1}, \lambda^2_{j_2}, \ldots, \lambda^N_{j_N})\right) =$$

$\ldots (30)$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N} \oint_{\Omega} \frac{f(z_1, z_2, \ldots, z_N)}{\prod_{j_1=1}^{k_1} (z_1 - \lambda^1_{j_1}) \prod_{j_2=1}^{k_2} (z_2 - \lambda^2_{j_2}) \ldots \prod_{j_N=1}^{k_N} (z_N - \lambda^N_{j_N})} \, dz_1 \, dz_2 \ldots dz_N =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \ldots \sum_{j_N=1}^{k_N} \frac{f(\lambda^1_{j_1}, \lambda^2_{j_2}, \ldots, \lambda^N_{j_N})}{\prod_{\substack{s_1=1 \\ s_1 \neq j_1}}^{k_1} (\lambda^1_{j_1} - \lambda^1_{s_1}) \prod_{\substack{s_2=1 \\ s_2 \neq j_2}}^{k_2} (\lambda^2_{j_2} - \lambda^2_{s_2}) \ldots \prod_{\substack{s_N=1 \\ s_N \neq j_N}}^{k_N} (\lambda^N_{j_N} - \lambda^N_{s_N})}$$

2. Sea:

$$(\lambda^i_{j_i})_{j_i=1}^{j_i=n} = (\underbrace{\bar{\lambda}^i_1, \ldots, \bar{\lambda}^i_1}_{p^i_1}, \underbrace{\bar{\lambda}^i_2, \ldots, \bar{\lambda}^i_2}_{p^i_2}, \ldots, \underbrace{\bar{\lambda}^i_{r_i}, \ldots, \bar{\lambda}^i_{r_i}}_{p^i_{r_i}}), \quad i = (1, 2, \ldots, N)$$

$$p^i_1 + p^i_2 + \ldots + p^i_{r_i} = n, \qquad \forall i.$$

Se tiene de (21) y (30):

$$(31) \qquad (\overset{n}{\underset{j_1=1}{*}} \ldots \overset{n}{\underset{j_N=1}{*}} f(\lambda^1_{j_1}, \ldots, \lambda^N_{j_N})) =$$

$$= \frac{D^{p^1_1-1}_{\bar{\lambda}^1_1} D^{p^1_2-1}_{\bar{\lambda}^1_2} \ldots D^{p^1_{r_1}-1}_{\bar{\lambda}^1_{r_1}} \ldots D^{p^N_1-1}_{\bar{\lambda}^N_1} D^{p^N_2-1}_{\bar{\lambda}^N_2} \ldots D^{p^N_{r_N}-1}_{\bar{\lambda}^N_{r_N}}}{(p^1_1-1)!(p^1_2-1)! \ldots (p^1_{r_1}-1)! \ldots (p^N_1-1)!(p^N_2-1)! \ldots (p^N_{r_N}-1)!} (\overset{r_1}{\underset{j_1=1}{*}} \ldots \overset{r_N}{\underset{j_N=1}{*}} f(\bar{\lambda}^1_{j_1}, \ldots, \bar{\lambda}^N_{j_N}))$$

SOLUCION DE UN PROBLEMA DE INTERPOLACION

Encontrar un polinomio de las variables $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, de grado $N(n-1)$, $P(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_N=1}^{n} a_{k_1 k_2 \ldots k_N} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2-1} \cdots x_N^{k_N-1}$;

que en el conjunto de puntos: $(\lambda^1_{j_1}, \lambda^2_{j_2}, \ldots, \lambda^N_{j_N})_{j_1, j_2, \ldots, j_N=1}^{j_1, j_2, \ldots, j_N=n}$ $\mathbb{C}^N$,

teniendo además:

$$(\lambda^i_{j_i})_{j_i=1}^{j_i=n} = (\underbrace{\bar{\lambda}^i_1, \ldots, \bar{\lambda}^i_1}_{p^i_1}, \underbrace{\bar{\lambda}^i_2, \ldots, \bar{\lambda}^i_2}_{p^i_2}, \ldots, \underbrace{\bar{\lambda}^i_{r_i}, \ldots, \bar{\lambda}^i_{r_i}}_{p^i_{r_i}}) \qquad \begin{array}{l} p^i_1 + p^i_2 + \ldots + p^i_{r_i} = n \\ i = (1, 2, \ldots, N) \end{array}$$

Toma respectivamente los valores:

$$\frac{\partial^{t^1_{s_1}-1} \partial^{t^2_{s_2}-1} \cdots \partial^{t^N_{s_N}-1}}{(\partial x_1)^{t^1_{s_1}-1} (\partial x_2)^{t^2_{s_2}-1} \cdots (\partial x_N)^{t^N_{s_N}-1}} P(\bar{\lambda}^1_{s_1}, \bar{\lambda}^2_{s_2}, \ldots, \bar{\lambda}^N_{s_N}) =$$

$$= \frac{\partial^{t^1_{s_1}-1} \partial^{t^2_{s_2}-1} \cdots \partial^{t^N_{s_N}-1}}{(\partial x_1)^{t^1_{s_1}-1} (\partial x_2)^{t^2_{s_2}-1} \cdots (\partial x_N)^{t^N_{s_N}-1}} f(\bar{\lambda}^1_{s_1}, \bar{\lambda}^2_{s_2}, \ldots, \bar{\lambda}^N_{s_N}),$$

$s_i = (1, 2, \ldots, r_i)$, $\quad i = (1, 2, \ldots, N) \quad$ (n^N, condiciones)

$t^i_{s_i} = (1, 2, \ldots, p^i_{s_i})$.

Abreviadamente:

P.I.-(2)
$$\begin{cases} P(x_1,x_2,\ldots,x_N)=\displaystyle\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_N=1}^{n} a_{k_1k_2\ldots k_N}x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\cdots x_N^{k_N-1} \\[2em] \dfrac{\partial^{t^1_{s_1}-1}\partial^{t^2_{s_2}-1}\cdots\partial^{t^N_{s_N}-1}}{(\partial x_1)^{t^1_{s_1}-1}(\partial x_2)^{t^2_{s_2}-1}\cdots(\partial x_N)^{t^N_{s_N}-1}} P(\bar{\lambda}^1_{s_1},\bar{\lambda}^2_{s_2},\ldots,\bar{\lambda}^N_{s_N}) = \\[2em] = \dfrac{\partial^{t^1_{s_1}-1}\partial^{t^2_{s_2}-1}\cdots\partial^{t^N_{s_N}-1}}{(\partial x_1)^{t^1_{s_1}-1}(\partial x_2)^{t^2_{s_2}-1}\cdots(\partial x_N)^{t^N_{s_N}-1}} f(\bar{\lambda}^1_{s_1},\bar{\lambda}^2_{s_2},\ldots,\bar{\lambda}^N_{s_N}) \\[2em] t^i_{s_i} = (1,2,\ldots,p^i_{s_i}) \;,\quad s_i = (1,2,\ldots,r_i),\quad i = (1,2,\ldots,N). \end{cases}$$

Este problema posee por solución:

(32)

$$P(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_N=1}^{n}\left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1}\cdots\mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\lambda^1_{j_1},\ldots,\lambda^N_{j_N})\right)\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(x_1-\lambda^1_{j_1})\cdots\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(x_N-\lambda^N_{j_N}).$$

Donde:

$$\left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1} \mathop{*}_{j_2=1}^{k_2} \cdots \mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\lambda^1_{j_1}, \lambda^2_{j_2}, \ldots, \lambda^N_{j_N}) \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\Omega} \frac{f(z_1, z_2, \ldots, z_N)}{\prod_{j_1=1}^{k_1} (z_1 - \lambda^1_{j_1}) \prod_{j_2=1}^{k_2} (z_2 - \lambda^2_{j_2}) \cdots \prod_{j_N=1}^{k_N} (z_N - \lambda^N_{j_N})} \, dz_1 dz_2 \ldots dz_N \, .$$

Donde Ω , tiene el significado dado con anterioridad.

La relación entre los λ^i_j y $\bar{\lambda}^i_k$, se establece al comienzo del problema. La demostración de este resultado es iterar el proceso de demostración empleado para obtener (22).

La observación hecha después de (23), puede trasladarse igualmente a (32).

UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA DE HAMILTON-CAYLEY

Sean $(A_i)_{i=1}^{i=N}$, $A_i \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ un conjunto de aplicaciones lineales conmutativas: $(A_i A_j = A_j A_i)_{i,j=1}^{i,j=N}$ y $\sigma(A_i) = (\lambda^i_{j_i})_{j_i=1}^{j_i=n}$ el espectro de A_i, con $i = (1,2,\ldots,N)$. $f,g \in F(A_1, A_2, \ldots, A_N)$, con $f \neq g$. Sí f y g toman el mismo valor sobre el conjunto: $\sigma(A_1) \times \sigma(A_2) \times \ldots \times \sigma(A_N)$, abreviadamente:

$$f(\sigma(A_1)\times\sigma(A_2)\times\ldots\times\sigma(A_N)) = g(\sigma(A_1)\times\sigma(A_2)\times\ldots\times\sigma(A_N)) \quad ,$$

se satisface entonces:

$$f(A_1,A_2,\ldots A_N) = g(A_1,A_2,\ldots,A_N).$$

Se precisa, el que f y g tomen el mismo valor en $\sigma(A_1)\times\sigma(A_2)\times\ldots\times\sigma(A_N)$, de la siguiente manera:

$$\sigma(A_i)=(\lambda^i_{j_i})_{j_i=1}^{j_i=n}=(\underbrace{\bar\lambda^i_1,\ldots,\bar\lambda^i_1}_{p^i_1},\underbrace{\bar\lambda^i_2,\ldots,\bar\lambda^i_2}_{p^i_2},\ldots,\underbrace{\bar\lambda^i_{r_i},\ldots,\bar\lambda^i_{r_i}}_{p^i_{r_i}}), \qquad \begin{array}{l} p^i_1+p^i_2+\ldots+p^i_{r_i}=n \\ i=(1,2,\ldots,N) \end{array}$$

$f(\sigma(A_1)\times\sigma(A_2)\times\ldots\times\sigma(A_N)) = f(\sigma(A_1)\times\sigma(A_2)\times\ldots\times\sigma(A_N))$, equivalente a las n^N condiciones:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^{t^1_{s_1}-1}\partial^{t^2_{s_2}-1}\cdots\partial^{t^N_{s_N}-1}}{(\partial x_1)^{t^1_{s_1}-1}(\partial x_2)^{t^2_{s_2}-1}\cdots(\partial x_N)^{t^N_{s_N}-1}} f(\bar\lambda^1_{s_1},\bar\lambda^2_{s_2},\ldots,\bar\lambda^N_{s_N}) = \\ \\ = \dfrac{\partial^{t^1_{s_1}-1}\partial^{t^2_{s_2}-1}\cdots\partial^{t^N_{s_N}-1}}{(\partial x_1)^{t^1_{s_1}-1}(\partial x_2)^{t^2_{s_2}-1}\cdots(\partial x_N)^{t^N_{s_N}-1}} g(\bar\lambda^1_{s_1},\bar\lambda^2_{s_2},\ldots,\bar\lambda^N_{s_N}) \\ \\ t^i_{s_i}=(1,2,\ldots,p^i_{s_i}), \quad s_i=(1,2,\ldots,r_i), \quad i=(1,2,\ldots,N). \end{array}\right.$$

DEMOSTRACION

De (26), (27), (28), (29), (30) y (31) se obtienen las siguientes igualdades:

$$f(A_1,\ldots,A_N)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\Omega} f(z_1,\ldots,z_N)(z_1I_n-A_1)^{-1}\ldots(z_NI_n-A_N)^{-1}dz_1\ldots dz_N =$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\Omega} f(z_1,\ldots,z_N)\Big(\sum_{k_1=1}^{n}\frac{\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(A_1-\lambda^1_{j_1}I_n)}{\prod_{j_1=1}^{k_1}(z_1-\lambda^1_{j_1})}\Big)\ldots\Big(\sum_{k_N=1}^{n}\frac{\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(A_N-\lambda^N_{j_N}I_n)}{\prod_{j_N=1}^{k_N}(z_N-\lambda^N_{j_N})}\Big)\,dz_1\ldots dz_N =$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_N=1}^{n}\Big(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1}\ldots\mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\lambda^1_{j_1},\ldots,\lambda^N_{j_N})\Big)\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(A_1-\lambda^1_{j_1}I_n)\ldots\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(A_N-\lambda^N_{j_N}I_n) =$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_N=1}^{n}\Big(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1}\ldots\mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} g(\lambda^1_{j_1},\ldots,\lambda^N_{j_N})\Big)\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(A_1-\lambda^1_{j_1}I_n)\ldots\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(A_N-\lambda^N_{j_N}I_n) =$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\Omega} g(z_1\ldots z_N)\Big(\sum_{k_1=1}^{n}\frac{\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(A_1-\lambda^1_{j_1}I_n)}{\prod_{j_1=1}^{k_1}(z_1-\lambda^1_{j_1})}\Big)\ldots\Big(\sum_{k_N=1}^{n}\frac{\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(A_N-\lambda^N_{j_N}I_n)}{\prod_{j_N=1}^{k_N}(z_N-\lambda^N_{j_N})}\Big)\,dz_1\ldots dz_N =$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\Omega} g(z_1\ldots z_N)(z_1I_n-A_1)^{-1}\ldots(z_NI_n-A_N)^{-1}dz_1\ldots dz_N = g(A_1,\ldots,A_N).$$

DEFINICION POLINOMICA MINIMAL DE $f(A_1, A_2, \ldots, A_N)$.

Después de la generalización dada del teorema de Hamilton-Cayley, existirá un polinomio $r(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, tal que:

$$r(A_1, A_2, \ldots, A_N) = P(A_1, A_2, \ldots, A_N) = f(A_1, A_2, \ldots, A_N),$$

con grado de $r \leq \mathrm{gr}\, P$.

Si los polinomios característicos de A_i son, respectivamente:

$$C_i(x_i) = \det(A_i - x_i I_n) = (-1)^n \prod_{j_i=1}^{r_i} (x_i - \lambda^i_{j_i})^{p^i_{r_i}}, \qquad i=(1,2,\ldots N) \qquad p^i_1 + p^i_2 + \ldots + p^i_{r_i} = n$$

los polinomios mínimos de A_i, serán:

$$m_i(x_i) = \prod_{j_i=1}^{r_i} (x_i - \lambda^i_{j_i})^{q^i_{r_i}}, \qquad i=(1,2,\ldots N), \quad q^i_1 + q^i_2 + \ldots + q^i_{r_i} = m_i \leq n.$$

Después de estas consideraciones, si se anota por $\sigma(A_i) = (\hat{\lambda}^i_{j_i})_{j_i=1}^{j_i=n}$ el espectro de A_i y se ordena en la siguiente forma:

$$(\hat{\lambda}^i_{j_i})_{j_i=1}^{j_i=n} = (\underbrace{\lambda^i_1, \ldots, \lambda^i_1}_{p^i_1}, \underbrace{\lambda^i_2, \ldots, \lambda^i_2}_{p^i_2}, \ldots, \underbrace{\lambda^i_{r_i}, \ldots, \lambda^i_{r_i}}_{p^i_{r_i}}) =$$

$$= (\underbrace{\lambda^i_1, \ldots, \lambda^i_1}_{q^i_1}, \underbrace{\lambda^i_2, \ldots, \lambda^i_2}_{q^i_2}, \ldots, \underbrace{\lambda^i_{r_i}, \ldots, \lambda^i_{r_i}}_{q^i_{r_i}}, \underbrace{\lambda^i_1, \ldots, \lambda^i_1}_{p^i_1 - q^i_1}, \underbrace{\lambda^i_2, \ldots, \lambda^i_2}_{p^i_2 - q^i_2}, \ldots, \underbrace{\lambda^i_{r_i}, \ldots, \lambda^i_{r_i}}_{p^i_{r_i} - q^i_{r_i}}) =$$

$$= (\bar{\lambda}^i_1, \bar{\lambda}^i_2, \dots, \bar{\lambda}^i_{m_i}, \underbrace{\lambda^i_1, \dots, \lambda^i_1}_{p^i_1 - q^i_1}, \underbrace{\lambda^i_2, \dots, \lambda^i_2}_{p^i_2 - q^i_2}, \dots, \underbrace{\lambda^i_{r_i}, \dots, \lambda^i_{r_i}}_{p^i_{r_i} - q^i_{r_1}}), \quad i=(1,2,\dots,N)$$

Entonces, la definición (28), adopta la siguiente forma:

$$(33) \qquad f(A_1,\dots,A_N) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_N=1}^{n} \left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1} \dots \mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\hat{\lambda}^1_{j_1}, \dots, \hat{\lambda}^N_{j_N}) \right) \prod_{j_1=1}^{k_1-1} (A_1 - \hat{\lambda}^1_{j_1} I_n) \dots \prod_{j_N=1}^{k_N-1} (A_N - \hat{\lambda}^N_{j_N} I_n) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{m_1} \dots \sum_{k_N=1}^{m_N} \left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1} \dots \mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\bar{\lambda}^1_{j_1}, \dots, \bar{\lambda}^N_{j_N}) \right) \prod_{j_1=1}^{k_1-1} (A_1 - \bar{\lambda}^1_{j_1} I_n) \dots \prod_{j_N=1}^{k_N-1} (A_N - \bar{\lambda}^N_{j_N} I_n),$$

que se conocerá como la definición polinómica minimal de $f(A_1, A_2, \dots A_N)$.

RELACION ENTRE LAS DISTINTAS DEFINICIONES DE $f(A_1, A_2, \dots, A_N)$.

Sí $f \in F(A_1, A_2, \dots, A_N)$, $(A_i A_j = A_j A_i)_{i,j=1}^{i,j=N}$, $A_i \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, $i = (1,2,\dots,N)$ y Ω como en las hipótesis que preceden a (16), se tienen las siguientes igualdades:

$$\sigma(A_i) = (\hat{\lambda}^i_{j_i})_{j_i=1}^{j_i=n}$$

$$f(A_1,\dots,A_N) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\Omega} f(z_1,\dots,z_N)(z_1 I_n - A_1)^{-1}\dots(z_N I_n - A_N)^{-1}\, dz_1\dots dz_N =$$

INTEGRAL POINCARE-DUNFORD (RODRIGUEZ CANO)

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\Omega} f(z_1,\dots,z_N)\left(\sum_{k_1=1}^{n}\frac{\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(A_1-\hat{\lambda}^1_{j_1})}{\prod_{j_1=1}^{k_1}(z_1-\hat{\lambda}^1_{j_1})}\right)\dots\left(\sum_{k_N=1}^{n}\frac{\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(A_N-\hat{\lambda}^N_{j_N})}{\prod_{j_N=1}^{k_N}(z_N-\hat{\lambda}^N_{j_N})}\right) dz_1\dots dz_N =$$

CONVOLUCIONAL (RODRIGUEZ CANO)

$$= \sum_{k_1=1}^{n}\dots\sum_{k_N=1}^{n}\left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1}\dots\mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\hat{\lambda}^1_{j_1},\dots,\hat{\lambda}^N_{j_N})\right)\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(A_1-\hat{\lambda}^1_{j_1}I_n)\dots\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(A_N-\hat{\lambda}^N_{j_N}I_n) =$$

POLINOMICA CARACTERISTICA (RODRIGUEZ CANO)

$$= \sum_{k_1=1}^{m_1}\dots\sum_{k_N=1}^{m_N}\left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1}\dots\mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\bar{\lambda}^1_{j_1},\dots,\bar{\lambda}^N_{j_N})\right)\prod_{j_1=1}^{k_1-1}(A_1-\bar{\lambda}^1_{j_1}I_n)\dots\prod_{j_N=1}^{k_N-1}(A_N-\bar{\lambda}^N_{j_N}I_n).$$

POLINOMICA MINIMAL (RODRIGUEZ CANO)

¡ OBSERVACION !

Las definiciones polinómica característica y polinómica minimal, tienen sentido cuando se toma por definición de :

$$\left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1} \mathop{*}_{j_2=1}^{k_2} \cdots \mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\hat{\lambda}^1_{j_1}, \hat{\lambda}^2_{j_2}, \ldots, \hat{\lambda}^N_{j_N}) \right) \quad \text{ó de}$$

$$\left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1} \mathop{*}_{j_2=1}^{k_2} \cdots \mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} f(\bar{\lambda}^1_{j_1}, \bar{\lambda}^2_{j_2}, \ldots, \bar{\lambda}^N_{j_N}) \right),$$ la que proporciona los

resultados (30) y (31), cuando

$$f \in C^{n-1}\left(\left(\bigcup_{j_1=1}^{n} V_1(\hat{\lambda}^1_{j_1}) \right) \times \ldots \times \left(\bigcup_{j_N=1}^{n} V_N(\hat{\lambda}^N_{j_N}) \right) \supset \sigma(A_1) \times \ldots \times \sigma(A_N), \mathbb{C} \right),$$

y éstas serán las definiciones que se adoptarán para $f(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ cuando f, pertenezca a este conjunto de definiciones

TEOREMA 3

Sean $(A_i)_{i=1}^{i=N}$, $A_i \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, aplicaciones lineales conmutativas. $(A_i . A_j = A_j . A_i)_{i,j=1}^{i,j=N}$. $\sigma(A_i) = (\lambda_{j_i})_{j_i=1}^{j_i=n}$, el espectro de A_i, $i = (1,2,\ldots,N)$.

Sea $f\colon I \times W \subset R \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. $I = \bigcup_{j=1}^{p} (a_j, b_j)$, intervalo abierto acotado de R. $f \in C(I) \times F(A_1, A_2, \ldots, A_N)$. C(I), funciones continuas es I. $F(A_1,A_2,\ldots,A_N)$ y W como en las hipótesis que preceden a (26). $f(t,A_1,A_2,\ldots,A_N) \in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$, $\forall t \in I$.

Sea el sistema diferencial:

$$(34) \quad \begin{cases} X'(t) = f(t,A_1,A_2,\ldots,A_N)\ X(t) \\ X(t_o) = X_o, \quad t_o \in I. \end{cases} \qquad (x_i(t))_{i=1}^{i=N} = X(t), \quad \forall t \in I.$$

En las condiciones exigidas para f, el sistema diferencial (34) satisface el criterio de Lappo-Danilevski, es decir:

$$(35) \quad \int_{t_o}^{t} f(s,A_1\ldots,A_N)ds \ .\ f(t,A_1,\ldots,A_N) = f(t,A_1,\ldots,A_N) \ .\ \int_{t_o}^{t} f(s,A_1,\ldots,A_N)ds$$

por lo que la solución de (34), viene expresada por:

$$(36) \qquad X(t) = \exp\left(\int_{t_o}^{t} f(s,A_1,A_2,\ldots,A_N)ds\right) X(t_o).$$

<u>DEMOSTRACION</u>

Aplicando el resultado (26) a $f(t,A_1,A_2,\ldots,A_N)$ y a $\int_{t_o}^{t} f(s,A_1,A_2,\ldots,A_N)ds$, se obtiene:

$$(37) \quad \begin{aligned} f(t,A_1,\ldots,A_N) &= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\Omega} f(t,z_1,\ldots,z_N)(z_1I_n-A_1)^{-1}\ldots(z_NI_n-A_N)^{-1}dz_1\ldots dz_N \\ \int_{t_o}^{t} f(s,A_1,\ldots,A_N)ds &= \int_{t_o}^{t} \left(\frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\Omega} f(s,z_1\ldots,z_N)(z_1I_n-A_1)^{-1}\ldots(z_NI_n-A_N)^{-1}dz_1\ldots dz_N\right)ds \end{aligned}$$

Después de (37), el primer término de (35) se escribe en la forma:

$$\int_{t_o}^{t} f(s,A_1,\ldots,A_N)ds \, . \, f(t,A_1,\ldots,A_N) =$$

$$(38) \quad = \int_{t_o}^{t} \left(\frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\Omega} f(s,z_1,\ldots,z_N)(z_1 I_n - A_1)^{-1} \ldots (z_N I_n - A_N)^{-1} dz_1 \ldots dz_N \right) ds \, .$$

$$. \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\Omega} f(t,z_1,\ldots,z_N)(z_1 I_n - A_1)^{-1} \ldots (Z_N I_n - A_N)^{-1} dz_1 \ldots dz_N)$$

De la expresión que resulta para $(z_i I_n - A_i)^{-1}$ del teorema 2, y de la hipótesis de conmutatividad para $A_i . A_j$, aplicada a (38), se obtiene (35).

El resultado (36), después de (26) se puede escribir en la forma:

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_o}^{t} f(s,A_1,\ldots,A_N)ds \right) X(t_o) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N} \quad \exp\left(\int_{t_o}^{t} f(s,z_1,\ldots,z_N)ds \right) (z_1 I_n - A_1)^{-1} \ldots (z_N I_n - A_N)^{-1} dz_1 \ldots dz_N =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_N=1}^{n} \left(\mathop{*}_{j_1=1}^{k_1} \cdots \mathop{*}_{j_N=1}^{k_N} \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(s, \hat{\lambda}^1_{j_1}, \ldots, \hat{\lambda}^N_{j_N}) ds \right) \prod_{j_1=1}^{k_1-1} (A_1 - \hat{\lambda}^1_{j_1} I_n) \cdots \prod_{j_N=1}^{k_N-1} (A_N - \hat{\lambda}^N_{j_N} I_n) \right.$$

ALGUNOS SISTEMAS EN LOS QUE f ES PECULIARMENTE INTERESANTE

1. $f(t,A_1,A_2,\ldots,A_N) = g(t,A_1)$

- SISTEMAS DIFERENCIALES EULER

$$g(t,A) = \frac{A}{t-\alpha}\ , \quad \alpha \neq t_0\ , \quad \forall A \in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n).$$

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{A}{s-\alpha} ds\right) X(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{z}{s-\alpha} ds\right) (z\, I_n - A)^{-1} dz \ .\ X(t_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(\frac{t-\alpha}{t_0-\alpha}\right)^{z} (zI_n - A)^{-1} dz \ .\ X(t_0) = \left(\frac{t-\alpha}{t_0-\alpha}\right)^{A} X(t_0).$$

Γ, es la unión de un número finito de curvas cerradas simples, rectificables de Jordan, orientadas en sentido positivo, que contienen en su interior $\sigma(A)$.

2. $f(t,A_1,A_2,\ldots,A_N) = g_1(t,A_1) + g_2(t,A_2) + \ldots + g_N(t,A_N)$

- SISTEMAS DIFERENCIALES BESSEL

$$g_1(t,A_1)+ g_2(t,A_2) = \left(\frac{A}{t-\alpha} + wI_n\right), \quad \forall A \in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$$

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_o}^{t} \frac{A}{s-\alpha} + wI_n)ds\right)X(t_o) = \exp(w(t-t_o)I_n).\exp\left(\int_{t_o}^{t} \frac{A}{s-\alpha}ds\right)X(t_o) =$$

$$= \exp(w(t-t_o)).\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\left(\frac{t-\alpha}{t_o-\alpha}\right)^{z}(zI_n-A)^{-1}dz.X(t_o) = \exp(w(t-t_o)).\left(\frac{t-\alpha}{t_o-\alpha}\right)^{A}X(t_o),$$

Γ, como en los sistemas Euler.

- SISTEMAS DIFERENCIALES GAUSS CONMUTATIVOS

$$f(t,A_1,A_2,\ldots,A_N) = \frac{A_1}{t-t_1} + \frac{A_2}{t-t_2} +\ldots+ \frac{A_n}{t-t_n}, \qquad t_o \neq t_i \quad ,$$

$i = (1,2,\ldots,n)$, $\qquad \forall A_i \in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$.

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_o}^{t}\left(\frac{A_1}{s-t_1} + \frac{A_2}{s-t_2} +\ldots+ \frac{A_n}{s-t_n}\right)ds\right) X(t_o) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^k}\left(\frac{t - t_k}{t_o- t_k}\right)^{z_k}(z_kI_n - A_k)^{-1} dz_k.X(t_o)$$

Γ^k, como en los anteriores sistemas, respecto a A_k.

$$X(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^k} \left(\frac{t-t_k}{t_o-t_k}\right)^{z_k} (z_k I_n - A_k)^{-1} dz_k \right) X(t_o) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{t-t_k}{t_o-t_k} \right)^{A_k} . X(t_o).$$

- SISTEMAS DIFERENCIALES CIRCULANTES. (AMATO).

$$f(t,A_1,A_2,\ldots,A_k) = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \ldots & a_n(t) \\ a_n(t) & a_1(t) & a_2(t) \ldots & a_{n-1}(t) \\ a_{n-1}(t) & a_n(t) & a_1(t) \ldots & a_{n-2}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2(t) & a_3(t) & a_4(t) \ldots & a_1(t) \end{pmatrix} = \quad (a_i(t) \text{continuas en } I)$$

$$= a_1(t)A_1 + a_2(t)A_2 + \ldots + a_n(t)A_n =$$

$$= a_1(t)I_n + a_2(t)A + a_3(t)A^2 + \ldots + a_n(t)A^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)A^{k-1}$$

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_o}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_k(s)A^{k-1} ds \right) X(t_o) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\int_{t_o}^{t} a_k(s)ds A^{k-1} \right) \right) X(t_o) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^k} \exp\left(\int_{t_o}^{t} a_k(s)ds \,.\, z_k \right) (z_k I_n - A^{k-1})^{-1} dz_k \right).$$

Se tiene $\sigma(A^p) = (w_i)_{i=1}^{i=n}$, siendo w_i, raíces de la ecuación $w^n - 1 = 0$, $p = 1,2,\ldots,n-1$, $p = 0$, $\sigma(A^o) = \sigma(I_n) = (a_i)_{i=1}^{i=n}$,

$a_i = 1$, $\forall i$.

Γ^k, como en los sistemas Gauss conmutativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- APOSTOL, T.M: "Calculus", Vol. 2, Ed. Reverté, Barcelona, 1973.

2.- BELLMAN, R.: "Introducción al análisis matricial", Ed. Reverté. Barcelona, 1965.

3.- ERUGIN, N.I.: "Linear systems of ordinary differential equations". Ed. Academic Press. New York, 1966.

4.- GANTMACHER, F.R.: "Theorie des matrices", Vol. 1 y 2. Ed. Dunod. Paris, 1966.

5.- LAPPO-DANILEVSKY: "Theorie des systemes des equations diffe rentielles linéaires". Ed. Chelsea, New York, 1953.

6.- MACDUFFEE, C.C.: "The theory of matrices". Ed. Chelsea. New York, 1946.

7.- MALSEV, A.I.: "Fundamentos de Algebra Lineal". Ed. Siglo XXI. Madrid, 1970.

8.- RODRIGUEZ CANO, J.J.: "Resolución de ecuaciones funcionales plan teadas mediante operadores lineales". Sevilla 1970. Publicaciones de la Universi dad de Sevilla.

9.- YOSIDA, K.: "Functional Analysis". Third Ed. Springer-Verlag. New York, 1971.