

ALGORITMOS PARA LA RESOLUCION NUMERICA DE CIERTOS PROBLEMAS
DE EVOLUCION NO LINEALES

Alfredo Bermúdez de Castro
Departamento de Ecuaciones Funcionales
Universidad de Santiago

1.- Introducción.- Se estudian métodos para la resolución de ecuaciones funcionales, cuando la no linealidad se debe a la presencia de un operador (posiblemente multívoco), maximal monótono en un espacio de Hilbert conveniente.

Con objeto de fijar las ideas vamos a ver, mediante un ejemplo, cómo se plantea el problema.

Consideremos un proceso de transmisión de calor; si tenemos en cuenta que la conductividad calorífica depende de la temperatura, las ecuaciones que permiten representar el fenómeno son:

$$\rho c \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (k(y) \frac{\partial y}{\partial x_i}) = f$$

más condiciones de contorno

más condición inicial.

Como es bien conocido, para resolverlas numéricamente se realiza una discretización, es decir, esencialmente, una aproximación mediante un sistema de ecuaciones numéricas, cuya solución permite construir una aproximación de la función y .

Prescindiendo por el momento de la discretización en las variables espaciales, pueden proponerse diferentes esquemas de discretización en la variable t . Así por ejemplo:

$$1) \quad \rho c \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (k(y^n) \frac{\partial y^n}{\partial x_i}) = f^n$$

$$2) \quad \rho c \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{\Delta t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (k(y^n) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{y^{n+1} + y^n + y^{n-1}}{3}) = f^n$$

$$3) \quad \rho c \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (k(y^{n+1}) \frac{\partial y^{n+1}}{\partial x_i}) = f^{n+\frac{1}{2}}$$

(Para más detalles pueden consultarse los artículos: DUPONT-FAIRWEATHER-JOHNSON [1], LEES [1] [2], DENDY [1]).

El esquema explícito 1 es el más sencillo puesto que, una vez realizada la "discretización en espacio", el avance se realiza sin más que despejar y^{n+1} . Por el contrario, el esquema 2 precisa la resolución de un sistema numérico lineal en cada paso y además su matriz de coeficientes es variable con n . Finalmente el esquema 3 conduce a la resolución de un sistema numérico no-lineal, operación que como es sabido resulta casi siempre costosa.

De este modo, atendiendo a las dificultades de implementación resulta preferible utilizar los esquemas 1 ó 2. Sin embargo, desgraciadamente, razones de inestabilidad numérica bien conocidos hacen aconsejable sustituirlos por el esquema implícito 3, al menos si el intervalo de integración en la variable t es grande.

Para salvar el problema de la no-linealidad en ocasiones se utilizan métodos del tipo "predicor-corrector" (véase DOUGLAS-DUPONT [1], PRICE-VARGA [1], MEYER [1], WHEELER [1]) en los cuales el paso de y^n a y^{n+1} se realiza en varias etapas, por ejemplo:

$$p.c \frac{\hat{y} - y^n}{\Delta t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (k(y^n) \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\hat{y} + y^n}{2})) = f^{n+\frac{1}{2}}$$

$$p.c \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (k(\frac{y^n + \hat{y}}{2}) \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{y^n + y^{n+1}}{2})) = f^{n+\frac{1}{2}}$$

Los algoritmos que proponemos aquí son de tipo iterativo y permiten obtener la solución del problema no-lineal como límite de una sucesión de problemas lineales. Además son independientes de la discretización utilizada para resolver estos problemas lineales, de modo que, en particular, podría utilizarse un esquema totalmente implícito.

2.- El problema general.

a) Sean V , H y E tres espacios de Hilbert reales. Supondremos

$$V \subset H \quad V \text{ denso en } H$$

e identificamos H a su dual topológico de manera que

$$V \subset H \subset V' \quad \text{con inclusiones densas.}$$

b) Sean G un operador maximal monótono en E .

$$B \in L(E', V').$$

Λ_E isomorfismo canónico de E en E' .

c) Sean L_1 un operador lineal (en general no acotado) con dominio $D(L_1) \subset V$ y valores en V' .

L_2 un operador lineal (en general no acotado) con dominio $D(L_2) \subset V'$ y valores en V' .

d) Sea $f \in V'$.

Se trata de resolver el problema:

$$L_1(y) + L_2(B\Lambda_E(G(B^*y))) \ni f \quad |1|$$

del cual supondremos que tiene solución única.

Como ya se ha dicho en la introducción, nuestro objetivo es la construcción de algoritmos iterativos que generen sucesiones convergentes a esta solución, y ello resolviendo tan solo problemas lineales. Previamente es preciso recordar ciertos elementos de la teoría de operadores maximales monótonos en espacios de Hilbert.

3.- Resultados previos.

Salvo mención expresa el contenido de este apartado puede encontrarse por ejemplo en A.PAZY [1].

Si G es un operador maximal monótono en E , y ω, λ números reales tales que $\lambda > 0, \lambda\omega < 1$, entonces dado $v \in E$ existe un único $u \in E$ tal que

$$v \in u + \lambda(Gu - \omega u)$$

El operador que a v hace corresponder u se llama resolvente del operador $G^\omega = G - \omega I$ y se designará por J_λ^ω . Puede demostrarse que es lipschitziano de constante $\frac{1}{1 - \lambda\omega}$.

Se llama regularización Yosida del operador G^ω al operador:

$$G_\lambda^\omega = \frac{I - J_\lambda^\omega}{\lambda}$$

Si $\lambda\omega \leq \frac{1}{2}$ entonces G_λ^ω es lipschitziano de constante $\frac{1}{\lambda}$.

Un ejemplo importante de operador maximal monótono lo constituye la subdiferencial de una aplicación

$$\varphi: E \longrightarrow (-\infty, \infty]$$

convexa, semi-continua inferiormente y propia, que se define del siguiente modo:

$$\partial\varphi(u) = \{v \in E: (v, w - u) \leq \varphi(w) - \varphi(u)\}$$

Para finalizar enunciamos una proposición, cuya demostración puede verse en BERMUDEZ-MORENO [1], que constituye el resultado básico para la introducción de los algoritmos que se estudian en el apartado siguiente:

Proposición 1.- Sea G un operador maximal monótono en un espacio de Hilbert E . Son equivalentes:

$$i) \quad u \in G^{\omega} v$$

$$ii) \quad u = G_{\lambda}^{\omega}(v + \lambda u); \quad \omega \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+, \lambda \omega < 1$$

4.- Algoritmos.

La proposición 1 permite escribir el problema |1| de dos formas equivalentes por lo menos.

Una sería

$$I) \quad L_1(y) + \omega L_2(BA_E B^* y) + L_2(BA_E q) = f \quad |2|$$

$$q = G_{\lambda}^{\omega}(B^* y + \lambda q) \quad |3|$$

y la otra:

$$II) \quad L_1(y) + \omega L_2(BA_E B^* y) + L_2(BA_E G_{\lambda}^{\omega}(B^* y + \lambda q)) = f \quad |4|$$

$$q = G_{\lambda}^{\omega}(B^* y + \lambda q) \quad |5|$$

Teniendo en cuenta la definición de G_{λ}^{ω} , |4| y |5| pueden escribirse del siguiente modo:

$$III) \quad L_1(y) + (\omega + \frac{1}{\lambda}) L_2(BA_E B^* y) + L_2(BA_E q - \frac{1}{\lambda} BA_E J_{\lambda}^{\omega}(B^* y + \lambda q)) = f \quad |6|$$

$$q = q + \frac{1}{\lambda} B^* y - \frac{1}{\lambda} J_{\lambda}^{\omega}(B^* y + \lambda q) \quad |7|$$

Estas tres formulaciones sugieren otros tantos algoritmos iterativos:

Algoritmo I. - $q^0 \in E$ cualquiera

$$L_1(y^n) + \omega L_2(BA_E B^* y^n) = f - L_2(BA_E q^n) \quad |8|$$

$$q^{n+1} = G_\lambda^\omega(B^* y^n + \lambda q^n) \quad |9|$$

Algoritmo II. - $q^0 \in E$ cualquiera

$$L_1(y^n) + \omega L_2(BA_E B^* y^n) + L_2(BA_E G_\lambda^\omega(B^* y^n + \lambda q^n)) = f \quad |10|$$

$$q^{n+1} = G_\lambda^\omega(B^* y^n + \lambda q^n) \quad |11|$$

Algoritmo III. - $y^0 \in V$, $q^0 \in E$ cualesquiera

$$L_1(y^{n+1}) + (\omega + \frac{1}{\lambda}) L_2(BA_E B^* y^{n+1}) = f - L_2(BA_E q^n - \frac{1}{\lambda} BA_E J_\lambda^\omega(B^* y^n + \lambda q^n)) \quad |12|$$

$$q^{n+1} = q^n + \frac{1}{\lambda} B^* y^{n+1} - \frac{1}{\lambda} J_\lambda^\omega(B^* y^n + \lambda q^n) \quad |13|$$

Observaciones: 1) Los problemas |8|, |10| y |12| son unívocos; además |8| y |12| son lineales. El problema |10| es no lineal, para resolverlo existen algoritmos iterativos de tipo lineal (véase p. ej. BERMUDEZ-MORENO |2|).

2) En su aplicación a ciertos problemas el algoritmo II coincide con otros del tipo "penalización-dualidad" ó "lagrangiana aumentada" (véase GLOWINSKI-MARROCCO |1|, GABAY-MERCIER |1|).

3) El estudio de la convergencia de los algoritmos I, II, III cuando $L_2 = I$ y L_1 es un operador lineal acotado de V en V' puede encontrarse en BERMUDEZ-MORENO [2].

A continuación vamos a aplicar el algoritmo I a diferentes problemas de evolución.

5.- Ejemplos.

En todos los casos Ω designará un abierto acotado de R^N con frontera Γ "regular", $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

5.1.- Problema de transmisión de calor no lineal.

$$\rho(y) c(y) \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (k(y) \frac{\partial y}{\partial x_i}) = f \quad \text{en } Q$$

$$y = 0 \quad \text{en } \Sigma$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{en } \Omega$$

Sean α y β las funciones

$$\alpha(r) = \int_0^r \rho(x) c(s) ds, \quad \beta(r) = \int_0^r k(s) ds$$

Mediante el cambio de variable $z = \alpha(y)$ (válido si $\rho > 0$, $c > 0$), el problema se transforma en:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta \beta(\alpha^{-1}(z)) = f \quad \text{en } Q$$

$$z = 0 \quad \text{en } \Sigma$$

$$z(x, 0) = z_0(x) \quad z_0(x) = \alpha(y_0(x))$$

Este último ya es del tipo |1| y para él el algoritmo I es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^n}{\partial t} - \omega \Delta z^n &= f + \Delta q^n && \text{en } Q \\ z^n &= 0 && \text{en } \Sigma \\ z^n(x, 0) &= z_0(x) && \text{en } \Omega \\ q^{n+1} &= \gamma_\lambda^\omega (z^n + \lambda q^n) && \text{en } Q \end{aligned}$$

siendo $\gamma = \beta \cdot a^{-1}$.

Otros algoritmos para este problema pueden verse en BERMUDEZ |1|.

5.2.- Problema de control por "feedback a priori". (véase BERMUDEZ-MORENO |2|, |3|)

Se considera un problema de control frontera de una ecuación del calor con condiciones de contorno de tipo Neumann. Si se elige un control en bucle cerrado con consigna z_d (estado deseado) y ley el grafo maximal monótono:

$$\beta(s) = \begin{cases} -M & \text{si } s < 0 \\ [-M, M] & \text{si } s = 0 \\ M & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

las ecuaciones que rigen el proceso son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y &= f && \text{en } Q \\ - \frac{\partial y}{\partial \nu} &\in \beta(y - z_d) && \text{en } \Sigma \\ y(x, 0) &= y_0(x) && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

El algoritmo I para este problema, que es del tipo |1|, es:

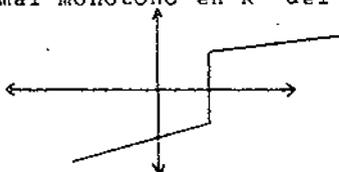
$$\begin{aligned} \frac{\partial y^n}{\partial t} - \Delta y^n &= f && \text{en } Q \\ - \frac{\partial y^n}{\partial \nu} &= \omega(y^n - z_d) + q^n && \text{en } \Sigma \\ y^n(x, 0) &= y_0(x) && \text{en } \Omega \\ q^{n+1} &= \beta_\lambda^\omega(y^n + \lambda q^n) && \text{en } \Sigma \end{aligned}$$

5.3.- Solidificación del acero en colada continua. (véase BERMUDEZ-SAGUEZ |1|).

Se trata de un problema de Stefan con dos fases que puede formularse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(y) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) &= 0 && \text{en } Q \\ u &\in H(y) && \text{en } Q \\ y &= 0 && \text{en } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[\\ k(y) \frac{\partial y}{\partial \nu} &= g && \text{en } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[\\ y(x, 0) &= y_0(x) && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

Donde $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ y H es un grafo maximal monótono en \mathbb{R}^2 del tipo que muestra la figura, y que



es la función que relaciona temperatura con entalpia.

Definiendo β como en el ejemplo 5.1 y efectuando el cambio de variable $z = \beta(y)$, el problema se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta z &= 0 && \text{en } Q \\ w &= (H \circ \beta^{-1})(z) && \text{en } Q \\ z &= 0 && \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} &= g && \text{en } \Sigma_2 \\ z(x, 0) &= z_0(x) && \text{en } \Omega, \quad z_0(x) = \beta(y_0(x)) \end{aligned}$$

para el cual el algoritmo I es el siguiente:

$$\begin{aligned} \omega \frac{\partial z^n}{\partial t} - \Delta z^n &= - \frac{\partial q^n}{\partial t} && \text{en } Q \\ z^n &= 0 && \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial z^n}{\partial \nu} &= g && \text{en } \Sigma_2 \\ z^n(x, 0) &= z_0(x) && \text{en } \Omega \\ q^{n+1} &= G_\lambda^\omega(z^n + \lambda q^n) && \text{en } Q \end{aligned}$$

siendo $G = H \circ \beta^{-1}$.

5.4.- Ecuaciones de Stokes. (TEMAN [1], THOMASSET [1]).

Se trata del problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{y}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{y} + \text{grad } p &= \vec{f} && \text{en } Q \\ \text{div } \vec{y} &= 0 && \text{en } Q \\ \vec{y} &= 0 && \text{en } \Sigma \\ \vec{y}(x, 0) &= \vec{y}_0(x) && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

Si χ designa la función indicatriz del subconjunto de $(L^2(\Omega))^N$ formado por el cero, este problema puede formularse de la manera siguiente:

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial t} + A\vec{y} + \text{grad}(\partial \chi(-\text{div } \vec{y})) = \vec{f}$$

$$\vec{y} = 0 \quad \text{en } \Sigma$$

$$\vec{y}(x, 0) = \vec{y}_0(x) \quad \text{en } \Omega$$

siendo A el operador de $(H_0^1(\Omega))^N$ en $(H^{-1}(\Omega))^N$ definido por:

$$(A\vec{y}, \vec{z}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{y}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_i} dx$$

El algoritmo I es en este caso:

$$\frac{\partial \vec{y}^n}{\partial t} - \nu \Delta \vec{y}^n - \omega \text{grad}(\text{div } \vec{y}^n) + \text{grad } p^n = \vec{f} \quad \text{en } Q$$

$$\vec{y}^n = 0 \quad \text{en } \Sigma$$

$$\vec{y}^n(x, 0) = \vec{y}_0(x) \quad \text{en } \Omega$$

$$p^{n+1} = p^n - \frac{1}{\lambda} \text{div } \vec{y}_n \quad \text{en } Q$$

y coincide con el algoritmo de Uzawa para la lagrangiana aumentada.

5.5.- Problemas de tiempo de parada óptimo. (Véase

J.L.LIONS [1]).

En ciertos problemas de tiempo de parada óptimo

aparecen inecuaciones del tipo siguiente

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - f \leq 0 \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - f \right) (y - \psi) = 0$$

$$y = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{en } \Omega$$

$$\text{donde } Ay = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

y ψ es una función dada tal que $\psi \geq 0$ en Σ .

Sea K el subconjunto de $L^2(\Omega)$

$$K = \{y \in L^2(\Omega) : y \leq \psi \quad \text{c.p.d.}\}$$

y χ_K su función indicatriz; entonces el problema planteado puede formularse del modo siguiente:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \partial \chi_K(y) = f$$

$$y = 0 \quad \text{en } \Sigma$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{en } \Omega$$

y para él, el algoritmo I es:

$$\frac{\partial y^n}{\partial t} + Ay^n + \omega y^n = f - q^n$$

$$y^n = 0 \quad \text{en } \Sigma$$

$$y^n(x, 0) = y_0(x) \quad \text{en } \Omega$$

$$q^{n+1} = q^n + \frac{1}{\lambda} y^n - \frac{1}{\lambda} P_K \left(\frac{1}{1-\lambda\omega} (y^n + \lambda q^n) \right)$$

BIBLIOGRAFIA

- A. BERMUDEZ-C. MORENO | 1 | "Applications of pursuit methods to optimal control problems". Aparecerá en Applied Mathematics and Optimization. Springer.
- | 2 | "Duality methods for solving variational inequalities". Aparecerá en Computer and Math. with Applications.
- | 3 | "Sur l'optimalité et la mise en oeuvre de certaines commandes à retour de type "plus ou moins"". R.A.I.R.O. Automatique vol. 12 n° 3. 1978.
- A. BERMUDEZ-C. SAGUEZ | 1 | Congreso IFAC. 1979.
- A. BERMUDEZ | 1 | "Dos algoritmos para la resolución numérica de una ecuación parabólica casi-lineal". Aparecerá en Collectanea Matemática. Barcelona.
- J. R. DENDY, Jr. | 1 | "Penalty Galerkin methods for partial differential equations". SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 11 n° 3 1974.

- J.DOUGLAS, Jr.-T.DUPONT | 1 | "Galerkin methods for parabolic equations" SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 7 n° 4 1970.
- T.DUPONG-G.G.FAIRWEATHER-J.P.JOHNSON | 1 | "Three-level Galerkin methods for parabolic equations". SIAM Journal on Numerical Analysis Vo. 11 n° 2.
- D.GABAY-M.MERCIER | 1 | "A dual algorithm for the solution of non linear variational problems via finite element approximation" Computer and Math. with Applications 2 1976, pags. 17-40.
- R.GLOWINSKI-A.MARROCCO | 1 | "Approximation par éléments finis d'ordre un et résolution par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes non linéaires". R.A.I.R.O. Analyse Numérique 1975 pags. 41-76.
- M.LEES | 1 | "A three-level difference scheme for quasi-linear parabolic equations". Mathematics of Computation Vol. 20 (1966).
- M.LEES | 2 | "A priori estimates for the solutions of difference approximations to parabolic differential equations". Duke Mathematical Journal Vol. 27. 1960.

- J.L.LIONS | 1 | "Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de Contrôle optimal". Les presses de l'Université de Montreal 1976.
- H.D.MEYER | 1 | "The numerical solution of nonlinear parabolic problems by variational methods". SIAM Journal on Numerical Analysis. Vol. 10 n° 4 1973.
- A.PAZY | 1 | "Semi-groups of nonlinear contractions in Hilbert space" C.I.M.E. Edizione Cremonese. Roma. 1971.
- H.S.PRICE-R.S.VARGA | 1 | "Error bounds for semidiscrete Galerkin approximations of parabolic problems with applications to petroleum reservoir mechanics". En Numerical Solution of field problems in Continuum physics, A.M.S. Providence 1970.
- M.H.WHEELER | 1 | "A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations". SIAM Journal on Numerical Analysis. Vol. 10 n° 4, 1973.
- R.TEMAM | 1 | "Navier-Stokes equations". North-Holland 1977.
- F.THOMASSET | 1 | "Applications d'une méthode d'éléments finis d'ordre un à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes". Rapport LABORIA n° 150. 1975.