Pub. Mat. UAB
Nº 19 Maig 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones -Valldoreix, Mayo 1979.

ESPECTRO EN PROBLEMAS INTEGRODIFERENCIALES LIGADOS A LA VISCOELASTICIDAD

Miguel Lobo Hidalgo
Universidad de Santiago de Compostela

INTRODUCCION.-

Los materiales viscoelásticos son aquellos materiales tales que en su ecuación constitutiva, interviene no solo el vector gradiente del desplazamiento en el instante actual t, sino también la historia de dicho deplazamiento.

La forma que toma el tensor de deformación, σ_{ij}, en los materiales viscoelásticos, en el caso de viscoelasticidad lineal, tipo Boltzman, y restrigiendonos, a la dimensión de espacio, n=1, es

$$(1) \qquad \sigma= cu_x-\int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)u_x(\tau)d\tau$$

y su ecuación del movimiento viene dada por la ecuación integro-diferencial

$$(2) \qquad \rho\ddot{u}= \sigma_x$$

donde u(x,t) es el vector desplamiento, y ρ la densidad del cuerpo. Cumpliendo la función $g(\xi)$ del integrando, unas ciertas propiedades de convexidad, y decrecimiento en el infinito.

C.Dafermos, en sucesivos trabajos que van de 1969 a 1975, ha estudiado la ecuación (2) sometida a condiciones iniciales y unicidad de soluciones, así como a la estabilidad asintótica de las mismas.

En concreto el problema de la deformación de un material viscoelástico unidimensional, que ocupa el segmento $[a,b]$, y sujeto en sus extremos, se escribe como sigue:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\rho\ddot{u} = Cu_{xx} - \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)u_{xx}(\tau)d\tau \\
&u(x,t) = \phi(x,t) \qquad t\epsilon(-\infty,0] \\
&u(a,t) = u(b,t) = 0
\end{aligned}
$$

Los sucesivos tratamientos del problema (3) que el propio Dafermos ha utilizado, y que han llegado a nuestro conocimiento, son los siguientes:

1) Reducción a una ecuación integro-diferencial de tipo Volterra.

2) Aplicación de la teoría de semigrupos de contracción.

Hablemos brevemente de cada uno de ellos.

1. <u>Reducción a una ecuación de Volterra</u>.

Este tratamiento consiste únicamente en sustituir en el integrando de la primera ecuación de (3), $u_{xx}(\tau)$ por su valor a partir del dato "espeso", $\phi(\tau,x)$, obteniendose así la ecuación no homogénea de Volterra (4).

$$
(4)\qquad \rho\ddot{u} = cu_{xx} - \int_{0}^{t} g(t-\tau)u_{xx}(\tau)d\tau + f(t)
$$

con $f(t) = -\int_{-\infty}^{0} g(t-\tau)\, u_{xx}(\tau)d\tau$

y dicha ecuación (4) sometida a las condiciones iniciales

$$
(5)\qquad u(0) = \phi_o(x) \quad , \quad u'(0) = \phi_1(x)
$$

donde:

$$
\phi_o(x) = \phi(0,x) \qquad \phi_1(x) = \phi_t'(0,x)
$$

La ecuación (4) con las condiciones iniciales (5), no es mas que la versión infinito-dimensional de la ecuación de Volterra clásica:

$$\rho u'' = -cu + \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad t\in[0,\infty) \tag{6}$$

y que ha sido estudiada sucesivamente por Volterra Friedman Shinbrot [6], [7], Levin y Nohel, [8], [9], y otros. Remitimos para una información bibliográfica complementarios al libro de Hale [11].

Dichos trabajos, vienen a estudiar las condiciones mínimas que debe cumplir $g(\xi)$, $g\colon R^+ \to R$ para garantizar la estabilidad asintótica de la solución a partir de la construcción de una oportuna función de Liapunov, bien mediante técnicas ligadas a la transformación de Laplace.

Inspirado en estos trabajos, y fundamentalmente en el de Levin [9], Dafermos deduce desde un punto de vista matemático, el efecto de amortiguación, en la deformación de un cuerpo viscoelástico, debido a la inclusión del término integral en la ecuación de ondas.

Asi en su trabajo de 1970, Dafermos [3] obtiene como aplicación del teorema de las proyecciones de Lions, existencia, unicidad, asi como estabilidad asintótica de las soluciones mediante la construcción de una conveniente función de Liapunov.

Dicha construcción que asegura la estabilidad, viene condicionada a una hipótesis complementaria, que resulta necesario añadir a las de convexidad y decrecimiento de la función positiva $g(\xi)$, y que consiste en lo siguiente:

$$c - \int_0^\infty g(\xi)d\xi > 0 \tag{7}$$

Esta condición (7) lleva a una interpretación mecanicista muy clara. Consideremos las soluciones estacionarias del problema integro-diferencial no homogéneo

(8) $$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\tau + f(x)$$

y con $u(x,\tau)= u(x) \quad \forall \tau \in (-\infty,t]$.

Esta solución satisface a la ecuación

(9) $$\left(c-\int_0^\infty g(\xi)d\xi\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)$$

y la ecuación (7) establece simplemente que el "módulo estático de elasticidad" es positivo.

2. Aplicación de la teoría de semigrupos.

Otra aproximación al problema que estamos tratando, consiste en recurrir a la teoría general de semigrupos de contracción, Dafermos [5].

La orientación es la siguiente: Es posible obtener una formulación débil del problema (3) en términos de una ecuación de evolución del tipo

(10) $$\frac{du}{dt} = Au \qquad u(0)= u_o$$

en un espacio de Hilbert, H, donde A es un operador maximal disipativo, y por tanto generador de un semigrupo de contracción $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, donde $T(t)u_o$ es la solución única del problema (9); y por tanto consideramos la estabilidad asintótica de la solución dentro del comportamiento asintótico de dicho semigrupo.

En efecto: Basta introducir una variable auxiliar en la ecuación (3), $w(x,\xi,t)= u(x,t-\xi)$, $\xi \in R^+$; es decir, llamamos w a la historia del desplazamiento, y si denotamos por $v(x,t)= \dot{u}(x,t)$ la velocidad, la primera ecuación de (3) puede ser escrita en la forma:

$$
\begin{aligned}
& \dot{u}= \rho^{-1}v \\
(11) \qquad & \dot{v}= cu_{xx}-\int_0^{\infty} g(\xi)w_{xx}d\xi \\
& \dot{w}= -\frac{\partial w}{\partial \xi}
\end{aligned}
$$

y si considereamos al operador integro-diferencial del segundo miembro de (11) en el espacio de Hilbert

$$(12) \qquad H= H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L_g^2(R^+;H_0^1(\Omega))$$

donde indicamos por L_g^2, al espacio de las funciones de cuadrado integrable con peso g. Si dotamos al espacio H, de un producto escalar equivalente, donde va a intervenir la condición (7); entonces al cierre de dicho operador en H, nos lleva a la definición de un operador A: $D(A) \longrightarrow H$, $\overline{D(A)}= H$ y $A^{-1}0= \{0\}$, concretamente

$$D(A)= \{(u,v,w)\epsilon H,\ v\epsilon H_0^1(\Omega),\ \frac{\partial w}{\partial \xi}\ \epsilon L_g^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)),\quad w(\cdot,0)= u(\cdot)\}$$

Además se verifica, no sin dificultad:

$$(13) \qquad \langle A(u,v,w),\ (u,v,w)\rangle \leq 0$$

$$(14) \qquad R(I-A)= H$$

Es decir, que A es maximal disipativo y por tanto generador de un semigrupo de contracción, T(t), cuyo comportamiento es preciso estudiar.

Una manera de abordar el problema consiste en demostrar, que el conjunto ω-lîmite $\omega(\phi)$, para cualquiera de sus orbitas $\gamma(\phi)$ con $\phi\epsilon D(A)$ esta formado por un solo punto, y ese punto es el $0\epsilon H$.

Bajo la condición de que $A^{-1}0=\{0\}$, que verifica nuestro operador, es decir que el único punto fijo del semigrupo $T(t)$, es el 0, el problema esta resuelto en Brezis [1], para el caso en que $-A$ es la subdiferencial de una función convexa s.c.i., propia, con una hipótesis complementaria que omitimos.

Por otra parte Dafermos-Slemrod [4], han tratado el problema para operadores maximales disipativos, bajo la hipótesis de que el conjunto ω-límite, para las orbitas del semigrupo, sea no vacío; condición que se verifica si las órbitas son precompactas. Este último hecho viene ligado a su vez al comportamiento del operador resolvente $(I-A)^{-1}$: La compacidad de dicho operador garantiza la precompacidad de las órbitas.

Asi, la aplicación de estos resultados a nuestro operador, siempre teniendo en cuenta que $A^{-1}0=\{0\}$, permite demostrar que en efecto, el conjunto ω-límite para cada una de sus órbitas $\gamma(\phi)=\{0\}$, y por tanto la estabilidad asintótica de las soluciones. Unicamente cabe mencionar de manera especial, que la compacidad de las órbitas para nuestro problema, hay que demostrarla directamente, porque el operador resolvente, $(I-A)^{-1}$ no es compacto en H.

OBSERVACION. En [5] se demuestra que $\{T(t)\}$ restringido al conjunto $\overline{co\omega(\phi)}$, coincide con un grupo lineal de isometrías, por lo cual la relación

$$\langle Ax,x\rangle=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,||T(t)x||^2=0$$

nos permite a veces caracterizar los elementos de $\omega(\phi)$, $\phi\in D(A)$.

3. Espectro de A.

Para finalizar, permitasenos contar una pequeña aportación al problema de la viscoelasticidad.

Puesto que la resolvente del operador A, y por tanto del operador maximal acretivo, -A, no es compacta, como es su espectro.

Es conocido, que la parte puntual de dicho espectro, si existe, esta ligada a las frecuencias propias de vibración de un cuerpo, o también, desde otro punto de vista, a las soluciones de tipo exponencial.

Bien, pues una aproximación a dicho problema es la siguiente:

a.- Consideremos el problema de perturbaciones singulares siguiente:

$$I_\varepsilon, \text{ en } H \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{d\psi}{dt} = A_\varepsilon \psi \\ \\ \psi(0) = \psi_0 \end{array} \right. \qquad A_\varepsilon \psi = \left| \begin{array}{l} \rho^{-1} v \\ c u_{xx} - \varepsilon \displaystyle\int_0^\infty g(\xi) w_{xx} d\xi \\ -\dfrac{\partial w}{\partial \xi} \end{array} \right.$$

con $\psi = (u,v,w)$.

Como problema reducido consideramos

$$I_0, \text{ en } H_0 = H_0^1(\Omega) x L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} \dfrac{d\theta}{dt} = A_0 \theta \\ \theta(0) = \theta_0 \end{array} \right. \qquad A_0 \theta = \left| \begin{array}{l} \rho^{-1} v \\ c u_{xx} \end{array} \right.$$

con $\theta = (u,v)$; es decir el problema mixto de condiciones iniciales para la ecuación de ondas.

No es difícil demostrar la convergencias de soluciones del problema I_ε a I_0, en $L^\infty(0,T;H_0)$.

b.- Hay razones para pensar, por tanto que el operador $-A_\varepsilon$ cuyo espectro desconocemos admite espectro puntual, próximo al espectro, discreto, del operador antiautoadjunto A_0, y cuyos valores propios están todos en el eje imaginario, denotandolos por $\{\pm i b_k\}$ $\quad b_k \longrightarrow \infty$, si $k \longrightarrow \infty$.

En efecto, si nosotros queremos calcular los valores propios de $-A_\varepsilon$ directamente, nos encontramos con una ecuación del tipo

$$\zeta^2+b_k^2\left(1-\varepsilon\int_0^\infty g(\xi)e^{\zeta\xi}d\xi\right)=0 \qquad k=1,2,\ldots.$$

donde se ha supuesto $c=1$, $\rho=1$, $\int_0^\infty g(\xi)d\xi<1$.

La manipulación de dicha ecuación, nos lleva a las siguientes conclusiones:

1) Si $g(\xi)$ es de tipo exponencial.

$$g(\xi)\leq\mu\ e^{-\lambda\xi} \quad , \qquad \xi\leq\frac{\lambda}{2}$$

el espectro de $-A_\varepsilon$ $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño consta de las siguientes partes.

a) El conjunto $\{\zeta\epsilon C,\ R_e\zeta\geq\frac{1}{2}\}$ constituye lo que se llama el espectro residual de A_ε

$$\overline{R(A_\varepsilon+\zeta)}\neq H$$

b) Existen valores propios complejos $\zeta_k(\varepsilon)$, próximos a ib_k, y a $-ib_k$, y no existen valores propios reales.

c) Los puntos $\zeta\epsilon C$, $R_e\zeta<\frac{\lambda}{2}$, salvo el espectro puntual σ_p, constituyen el conjunto resolvente $\rho(A_\varepsilon)$.

d) Estos resultados pueden hacerse extensivos a $\varepsilon\epsilon(0,1]$ por un argumento del tipo de la invariancia del grado topológico de Brouwer.

Si $g(\xi)$ no fuese de tipo exponencial todo el conjunto de los ϵC, $R_e>0$, pertenecen al conjunto residual, y sin interés, parece ser, desde el punto de vista físico.

BIBLIOGRAFIA

1. BREZIS, Operateurs Maximaux Monotones. North Holland (1973).

2. DAFERMOS, Asymptotic Stability in Viscoelasticity. Arch. Rat. Mech. ANalysis, 37 (1970), 297-308.

3. DAFERMOS, An Abstract Volterra equation with applications to linear viscoeslaticity. J. Diff. Eqs. 7 (1970), 554-569.

4. DAFERMOS-SLEMROD, Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroup. J. Functional Analysis, 13 (1973), 97-106.

5. DAFERMOS, Contraction semigroups and trend to equilibrium in continuum mechanic. Lecture Notes, 503 (1975).

6. FRIEDMAN, J. Analyse Math. 11 (1963). 381-413.

7. FRIEDMAN-SHINBROT, Trans. Amer. Math. Soc. 126 (1967), 131-179.

8. LEVIN, J. Analyse Math. 11 (1963), 381-413.

9. LEVIN, J. Differential Equations 4 (1968) 176-186.

10. MCCAMY-WONG, Stability theorems for some functional differential equations. Trans. A.M.S. 164 (1972), 1-37.

11. HALE, Functional Differential Equations. Springer-Verlag (1971).