Pub. Mat. UAB
Nº 19 Maig 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones- Valldoreix, Mayo 1979.

PROBLEMA DE CONTORNO PARA UNA ECUACION DIFERENCIAL FUNCIONAL DE TIPO MIXTO Y CONSIDERACIONES SOBRE PROBLEMAS NO LOCALES(*)

por José Luis ANDRES YEBRA
E.T.S.de I. de Telecomunicación
U. Politécnica de Barcelona

INTRODUCCION.

Hale [1] sugiere considerar condiciones de contorno para estudiar ecuaciones de la forma

$$u'(x) + au(x-\alpha) + bu(x+\alpha) = 0$$

Pero de hecho, para estudiar problemas de contorno debemos considerar ecuaciones de 2º orden como ya habían hecho Grimm y Schmitt [1] y [2] en un contexto diferente (más general, y con resultados aparentemente más completos pero obtenidos bajo hipótesis fortísimas). Así llegamos a plantearnos el siguiente problema

"Determinar una función $u(x)$, $-\alpha < x < l+\alpha$, que satisfaga

$$- u''(x) + \frac{1}{2} b \left[u(x-\alpha) + u(x+\alpha)\right] = f(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

$$u(x) = \phi_0(x) \qquad -\alpha < x \leq 0$$

$$u(x) = \phi_l(x) \qquad l \leq x \leq l+\alpha$$

para funciones $f(x)$, $\phi_0(x)$, $\phi_l(x)$ dadas.

Damos a continuación un resultado de existencia y unicidad de solución para este problema a partir del cual hacemos posteriormente diversas observaciones y consideraciones sobre problemas no locales.

(*) Texto de las conferencias dadas en el 1$^{\text{er}}$ y 2º congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones.

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES.

Veamos a continuación el resultado principal de existencia y unicidad de solución para el problema de contorno anterior, contenido en el siguiente

TEOREMA: Sean $c_0, c_l \in \mathbb{R}$,

$\phi_0(x) \in L^2(-\alpha, 0)$, $\phi_l(x) \in L^2(l, l+\alpha)$, $f(x) \in H^{-1}(0,l)$

Entonces, si $|b| < \pi^2/l^2$ existe una única función $u(x)$, $-\alpha < x < l+\alpha$, solución de

(1) $-u''(x) + \frac{1}{2}b\,[u(x-\alpha) + u(x+\alpha)] = f(x)$ en $H^{-1}(0,l)$

(2) $u(x) = \phi_0(x)$ en $(-\alpha, 0)$ y $u(0) = c_0$

(3) $u(x) = \phi_l(x)$ en $(l, l+\alpha)$ y $u(l) = c_l$

DEMOSTRACION.

En primer lugar reducimos las condiciones (2) y (3) a homogeneas de la forma habitual, considerando la función

$$\Psi(x) = \begin{cases} \phi_0(x) & -\alpha < x < 0 \\ c_0 + \dfrac{c_l - c_0}{l}\,x & 0 \leq x \leq l \\ \phi_l(x) & l < x < l+\alpha \end{cases}$$

y descomponiendo u en la forma $u = v + \Psi$, con lo que v debe satisfacer

$$-v''(x) + \frac{1}{2}b\,[v(x-\alpha) + v(x+\alpha)] = \tilde{f}(x)$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2}b\,[\Psi(x-\alpha) + \psi(x+\alpha)]$$

$$v(x) = 0 \qquad -\alpha < x \leq 0$$
$$v(x) = 0 \qquad l \leq x < l+\alpha$$

A continuación escribimos de nuevo u en lugar de v y f en lugar de $\tilde{f}$, obteniendo el problema homogeneo

$$(4)\quad -u''(x)+\frac{1}{2}b\left[u(x-\alpha)+u(x+\alpha)\right]=f(x)\qquad 0<x<l$$

$$(5)\qquad u(x)=0\qquad -\alpha<x\leqslant 0$$

$$(6)\qquad u(x)=0\qquad l\leqslant x<l+\alpha$$

del que nos ocuparemos en lo sucesivo.

La demostración de la existencia y unicidad de solución de este problema se basará en su equivalencia con un problema de minimización. Para plantear este último vamos a considerar el espacio

$$H_0^1(0,l)=\{u(x)\in L^2(0,l)\,|\,u'(x)\in L^2(0,l)\,,\ u(0)=u(l)=0\}$$

Así si $u(x)\in H_0^1(0,l)$, $u(x)$ prolongada por cero a $(-\alpha,0)$ y $(l,l+\alpha)$ satisfará (5) y (6). Supondremos siempre que esta prolongación ha sido realizada. Recordamos aquí que sobre $H_0^1(0,l)$ se puede tomar como norma

$$\|u\|_{H_0^1(0,l)}=\left(\int_0^l u'(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

y que

$$H^{-1}(0,l)=(H_0^1(0,l))'=\text{dual de } H_0^1(0,l)$$

espacio de distribuciones que, identificando $L^2(0,l)$ con su dual, admite la representación

$$H^{-1}(0,l)=\{f(x)=f_0(x)+f_1'(x)\quad;\quad f_0\ ,\ f_1\in L^2(0,l)\}$$

Comenzamos estableciendo el siguiente

LEMA 1 : La ecuación (4) $(=(1))$ es la ecuación de Euler del funcional sobre $H_0^1(0,l)$

$$(7)\quad J(u)=\int_0^l u'(x)^2dx+b\int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2}u(x-\tfrac{\alpha}{2})\,u(x+\tfrac{\alpha}{2})dx-2\int_0^l f(x)u(x)dx.$$

En efecto, para $\eta\in C^1(0,l)$, $\eta(0)=\eta(l)=0$, se tiene

$$<J'(u),\ \eta>=\lim_{\varepsilon\to 0}\ \frac{J(u+\varepsilon\eta)-J(u)}{\varepsilon}=$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^l \{[u'(x) + \varepsilon\eta'(x)]^2 - u'(x)^2\} \, dx + \right.$$

$$+ b \int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2} \{ [u(x- \tfrac{\alpha}{2}) + \varepsilon\eta(x- \tfrac{\alpha}{2})] [u(x+ \tfrac{\alpha}{2}) + \varepsilon\eta(x+ \tfrac{\alpha}{2})]$$

$$-u(x- \tfrac{\alpha}{2}) \, u(x + \tfrac{\alpha}{2})\} \, dx - 2\varepsilon \int_0^l f(x) \, \eta(x) dx =$$

$$= 2 \int_0^l u'(x)\eta'(x)dx + b \int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2} u(x- \tfrac{\alpha}{2}) \, \eta(x + \tfrac{\alpha}{2})dx +$$

$$\left. + b \int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2} u(x+ \tfrac{\alpha}{2}) \, \eta(x- \tfrac{\alpha}{2})dx - 2 \int_0^l f(x) \, \eta(x)dx \right] =$$

$$= u'(x) \, \eta(x) \Big|_0^l - 2 \int_0^l u''(x) \, \eta(x)dx - 2 \int_0^l f(x) \, \eta(x)dx +$$

$$+ b \int_\alpha^l u(x-\alpha) \, \eta(x)dx + b \int_0^{l-\alpha} u(x+\alpha) \, \eta(x)dx.$$

y en virtud de (5) y (6), es decir, teniendo en cuenta que $u(x - \alpha) = 0$ para $0 < x \leqslant \alpha$, $u(x + \alpha) = 0$ para $l - \alpha \leqslant x < l$, y que $\eta(0) = \eta(l) = 0$

$$\frac{1}{2} < J'(u), \eta > \; = - \int_0^l u''(x) \, \eta(x) + \frac{1}{2} b \int_0^l u(x-\alpha) \, \eta(x)dx +$$

$$+ \frac{1}{2} b \int_0^l u(x+\alpha) \, \eta(x)dx - \int_0^l f(x) \, \eta(x)dx =$$

$$= \int_0^l \{-u''(x) + \frac{1}{2} b \, [u(x-\alpha) + u(x+\alpha)] - f(x)\} \, \eta(x)dx$$

luego $J'(u) = 0 \;\; \forall\eta$ equivale a

$$-u''(x) + \frac{1}{2} b \, [u(x-\alpha) + u(x+\alpha)] - f(x) = 0 \qquad 0 < x < l.$$

Deseamos ver a continuación que el funcional $J(u)$ es convexo, para lo cual lo escribimos en la forma

(8) $\qquad J(u) = a(u,u) - 2L(u)$

(9) $\qquad a(u,v) = \int_0^l u'(x) \, v'(x) \, dx +$

$$+ \quad \frac{b}{2} \cdot \int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2} [u(x-\tfrac{\alpha}{2})v(x+\tfrac{\alpha}{2})+v(x-\tfrac{\alpha}{2})u(x+\tfrac{\alpha}{2})] \; dx$$

$$(10) \qquad L(v) = \int_0^l f(x)\; v(x)dx$$

donde $a(u,v)$ es una forma bilineal continua y simétrica y $L(v)$ una forma lineal y contínua sobre $H\,(0,l)$. Teniendo en cuenta la linealidad de L bastará verificar la convexidad del término $a(u,u)$, para el que se tiene, utilizando la bilinealidad y simetría

$$a(\lambda u +(1-\lambda)v \;,\; \lambda u +(1-\lambda)v) + \lambda(1-\lambda)\; a(u-v,u-v) =$$

$$= \lambda\; a(u,u) + (1-\lambda)\; a(v,v)$$

por lo que si $a(w,w) \geq 0$ se tendrá $\forall \lambda \in (0,1)$

$$a(\lambda u +(1-\lambda)v,\; \lambda u +(1-\lambda)v) \leq \lambda a(u,u) + (1-\lambda)\; a(v,v)$$

La convexidad de $J(u)$ será así una consecuencia particular del siguiente

LEMA 2: Si $|b| < \pi^2/l^2$, la forma bilineal $a(u,v)$ es coerciva, es decir,

$$(11) \;\exists\; \alpha>0 \;\mid\; a(u,u) > \alpha \|u\|^2_{H^1_0(0,l)} \qquad \forall\, u \in H^1_0(0,l)$$

En efecto,

$$a(u,u) = \int_0^l u'(x)^2dx + b\int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2} u(x-\tfrac{\alpha}{2})\; u(x+\tfrac{\alpha}{2})\; dx \geq$$

$$\geq \int_0^l u'(x)^2dx - |b|\left|\int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2} u(x-\tfrac{\alpha}{2})\; u(x+\tfrac{\alpha}{2})\; dx\right| \geq$$

$$\geq (1 - |b|\,\frac{l^2}{\pi^2})\int_0^l u'(x)^2dx = (1 - |b|\,\frac{l^2}{\pi^2})\,\|u\|^2_{H^1_0(0,l)}$$

pues

$$\left| \int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2} u(x-\frac{\alpha}{2})\, u(x+\frac{\alpha}{2})dx \right| \leq$$

$$\leq \left(\int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2} u(x-\frac{\alpha}{2})^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\alpha/2}^{l-\alpha/2} u(x+\frac{\alpha}{2})\, dx \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \int_0^l u(x)^2 dx \leq \frac{l^2}{\pi^2} \int_0^l u'(x)^2 dx$$

habiendo utilizado en este último paso la desigualdad de Poin_ caré. Por lo tanto si $|b| < \pi^2/l^2$ se satisface (11) con $\alpha = 1 - |b|\, l^2/\pi^2$.

Basta ahora utilizar el siguiente resultado (vease Lions [1]) con $V = H_0^1(0,l)$.

TEOREMA: Si $a(u,v)$ es una forma bilineal continua y coerciva y $L(v)$ una forma lineal y continua sobre V espa_ cio de Hilbert real, existe un único $u \in V$ tal que

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v) \qquad , \qquad J(v) = a(v,v) - 2L(v)$$

y u está caracterizado como la solución (única) de la ecua_ ción variacional

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall\, v \in V$$

Como es sabido por la teoría de ecuaciones variacio_ nales (vease Lions-Magenes [1] o Andrés Yebra |1|) esta ecua_ ción nos dá en nuestro caso la forma débil de la ecuación de Euler

$$-u''(x) + \frac{1}{2} b \left[u(x-\alpha) + u(x+\alpha)\right] = f(x) \quad \text{en} \quad H^{-1}(0,l)$$

mientras que (5) y (6) se satisfacen pues $u \in H_0^1(0,l)$ y u ha sido prolongado por cero a $(-\alpha,0)$ y $(l,l+\alpha)$.

CONSIDERACIONES SOBRE PROBLEMAS NO LOCALES.

El estudio anterior nos sugiere las dos consideraciones siguientes.

1. El problema anterior es *no local* en el sentido de que la ecuación diferencial relaciona los valores de f y u'' en el punto x y los de u en los puntos $x-\alpha$ y $x+\alpha$

2. El procedimiento seguido en la demostración de la existencia y unicidad de solución es claramente generalizable a situaciones de la forma

$$Lu + Mu = f$$

donde L es un operador diferencial (local) y M un operador no local del tipo anterior, en las que podemos dominar la influencia del término no local, Mu ,mediante el término local Lu , para lo que basta, con la formulación anterior que, en el espacio adecuado , la forma bilineal

$$a(u,v) = \langle Lu\ ,\ v\rangle + \langle Mu\ ,\ v\rangle$$

además de continua sea coerciva.

Así, por ejemplo, dado un dominio acotado y "regular" $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de frontera Γ , consideremos

$$\Omega_\alpha = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,\overline{\Omega}) < \alpha\}$$

y un operador diferencial elíptico L definido a través de una forma bilineal continua y coerciva sobre $V = H_0^1(\Omega)$, $l(u,v)$:

$$L \in \mathcal{L}(V,V') \quad \langle Lu,v\rangle_{V'V} = l(u,v) \quad \forall\ v \in V$$

$$l(v,v) \geq \alpha\ \|v\|_V^2 \qquad \alpha > 0.$$

Sean por otra parte $B_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < \alpha\ \}$ y $m(y) \in L^1(B_\alpha)$, y consideremos al operador no local $m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_\alpha)), L^2(\Omega))$ dado por

$$(Mu)\ (x) = \int_{B_\alpha} u(x-y)\ m(y)dy$$

para $c.t.\ x \in \Omega.$

Consideremos ahora el problema de contorno

$$Lu + Mu = f \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega)$$
$$u = g \quad \text{en} \quad H^{-1/2}(\Gamma)$$
$$u = \phi \quad \text{en} \quad L^2(\Omega\alpha - \overline{\Omega})$$

Por el procedimiento anterior se puede demostrar que este problema admite una única solución si $\| m \|_1 < \alpha/C^2$ siendo C una constante de Poincaré para Ω , es decir,

$$\| v \|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \| v \|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

De esta forma el estudio realizado en el apartado anterior parece aplicable a una amplia clase de problemas no locales. Desgraciadamente no conocemos problemas no locales de este tipo que se presenten en las aplicaciones.

Los problemas no locales que aparecen en diferentes situaciones prácticas corresponden a ecuaciones integrodiferenciales, es decir, se relaciona el valor de u y de sus derivadas en el punto x con el de u (y posiblemente sus derivadas) en *todos* los puntos del dominio Ω y no solo en un cierto entorno del punto x considerado.

A continuación se da un ejemplo de esta situación así como un ejemplo, el único que conocemos en este caso , de problema local pero con condiciones de contorno no locales.

Ecuaciones integrodiferenciales.

Diferentes problemas llevan a ecuaciones integrodiferenciales. Así Piest [1] desarrolla una teoría de turbulencia por medio de mecánica estadística. A partir de la ecuación de Reynolds (formalmente equivalente a la de Navier-Stokes añadiendo el término denominado tensión de Reynolds), llega a una formulación en la que este término es reempla_ zado por un término no local en espacio y tiempo de la forma

$$G(u(x,t)) = \nabla\cdot\int_0^t dt' \int_V f(x,x',t-t',u)dx'$$

Condiciones de contorno no locales.

En Pattanayak-Wolf [1] se presenta una formulación del problema de difracción de una onda electromagnética en un medio con respuesta arbitraria que incluye condiciones de contorno no locales.

Normalmente el problema debe ser considerado como un problema de transmisión debiendo satisfacerse las ecuaciones de Maxwell en el interior y en el exterior del medio junto con condiciones de acoplamiento en la superficie de separación, lo que implica que los campos en el exterior y en el interior deben obtenerse simultaneamente.

La formulación antes citada permite sin embargo determinar la onda difractada (es decir los campos E y H en el interior del medio en cuestión) a partir de la onda incidente, sin referencia alguna a la onda en el exterior, la cual se determina posteriormente por integración directa sobre la superficie de separación. Así se consigue un desacoplamiento de los problemas exterior e interior a cambio de la no localidad de las condiciones de contorno.

Para el campo eléctrico, E , la condición de contorno no local tiene la forma

$$E^{i}(r^-) + \frac{1}{4\pi}\int_S \{[n\times(\nabla\times E)+f]\cdot G(r^-,r) + (n\times E)\cdot\nabla\times G(r^-,r)\}\, dS = 0$$

donde E^{i} representa(la transformada de Fourier de) el campo eléctrico incidente (para la frecuencia $\omega = Kc$) en el punto interior r^-, $E = E(r)$ el campo eléctrico en el interior del medio (expresado ahí en S), n la normal exterior a la superficie de separación S y $G(r',r)$ la función de Green diá dica, asociada al operador $L = - K^2 + \nabla \times \nabla \times$ con la condición (vectorial) de radiación de Sommerfeld en el infinito, y finalmente $f = f(r)$ es una función dada. El campo magnético H satisface una condición de contorno no local análoga.

Que sepamos, este problema no ha sido estudiado directamente, pero Dialetis [1] establece la equivalencia entre esta formulación y la usual, es decir, ecuaciones de Maxwell con condiciones de contorno (locales) de transmisión, demostrando así que el problema no local tiene solución única.

BIBLIOGRAFIA.

J.L.Andrés Yebra [1] .- Soluciones débiles de problemas de contorno. Dto. de Ec. Func. Madrid 1971 (y 1979).

D.Dialetis [1] .- Equivalence of The Ewald-Oseen extinction theorem as a nonlocal boundary value problem with Maxwell's equations and boundary conditions. J.Opt. Am.*68*,602-610, 1978.

L.J.Grimm - K.Schmitt [1] .- Boundary value problems for de_ lay differential equations. Bull. Amer. Math., Soc. *74* , 997-1000, 1968.

L.J.Grimm - K Schmmitt [2] .- Boundary value problems for differential equations with deviating arguments. Aequa_ tions Math. *3* (1969) 321-322, *4* (1970) 176-190.

J.Hale [1] .- Functional Differential Equations. Springer (A.M.S.3) 1971.

J.I.Lions - E. Magenes [1] .- Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol 1. Dunod, Paris, 1968.

J.L.Lions [1] .- Control optimal de systèmes gounermés par équations aux derivées partielles. Dunod, Paris , 1968.

D.N. Pattanayak - E. Wolf [1] .- General form and a new in_ terpretation of the Ewald-Oseen extinction theorem. Opt. Comm. *6* (1972), 217-220.

J.Piest [1] .- Molecular fluid dynamics and theory of tur_ bulent motions. Physica *73* (1974) 474-494.