Pub. Mat. UAB
Nº 19 Maig 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones -Valldoreix, Mayo 1979 .

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS:

RUIDO BLANCO Y DE COLOR

J.M. Sancho y M. San Miguel

Departamento de Física Teórica
Universidad de Barcelona, Diagonal-647
Barcelona-28,

Presentado en el II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones.Barcelona, 28-31 de Mayo de 1979

1

1. Ecuaciones diferenciales estocásticas

En principio, una ecuación diferencial estocástica es aquella que contiene algun parámetro definido por una función de distribución probabilística. Lo que se pretende entonces es conocer la función de distribución inducida para las variables del problema. Nos limitaremos aquí a las ecuaciones de tipo Langevin en que una fuerza estocástica o "ruido" $\xi(t)$ aparece linealmente en la ecuación:

$$\dot{q}(t) = V(q(t),t) + g(q(t),t)\xi(t) \qquad (1)$$

Este tipo de ecuaciones tienen su justificación mecanico-estadística en el formalismo de Mori [1], aunque más recientemente suelen considerarse en el contexto de ecuaciones fenomenológicas en que ciertos parámetros externos al sistema fluctuan. Los ruidos aditivos [2] (g = cte) solo introducen fluctuaciones en torno a la trayectoria determinista mientras que los ruidos multiplicativos pueden producir efectos insospechados en el análisis determinista [3].

Desde un punto de vista físico suele suponerse que $\xi(t)$ es una fuerza estocástica gaussiana de media nula y tiempo de correlación pequeño. El límite de tiempo de correlación nulo conduce al ruido blanco que es el usualmente utilizado debido a las simplificaciones que introduce. En particular, en este caso (1) define un proceso de Markov [4].

2. Ruido blanco

Para este caso,

$$\langle \xi(t)\,\xi(t')\rangle = 2D\,\delta(t-t') \tag{2}$$

$$\xi(t) = \frac{dW(t)}{dt} \tag{3}$$

donde W(t) es el proceso de Wiener. Obviamente las ecuaciones (1)-(3) suponen un claro abuso de notación por no estar unívocamente definida la derivada del proceso de Wiener. Las diferentes interpretaciones de la integral estocástica asociada a (1) dan entonces lugar a diferentes interpretaciones de (1). Las mas conocidas son las de Itô y Stratonovich [4]. La diferencia física esen esencial está en el valor dado en ambas a la correlación de W(t) con su incremento en el mismo tiempo. Mientras Itô asigna un incremento hacia adelante en el tiempo que conduce a una correlación nula, Stratonovich considera un incremento simétrico con correlación no nula [5].

Estas diferencia se aprecian en las ecuaciones de Fokker Planck asociadas a (1) en ambas interpretaciones

Itô :

$$\frac{\partial P(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q}V(q,t)\,P(q,t) + \frac{\partial^2}{\partial q^2}D\,g^2(q,t)\,P(q,t) \tag{4}$$

Stratonovich:

$$\frac{\partial P(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q}\Big(V(q,t) + g'(q,t)g(q,t)\Big)P(q,t) + \frac{\partial^2}{\partial q^2}D\,g^2(q,t)\,P(q,t) \tag{5}$$

El término de arrastre que aparece en (5) y no en (4) para ruidos no aditivos es el llamado arrastre "espúreo" objeto de cierta reciente controversia [6] .

La interpretación de Stratonovich es la preferida en un contexto físico y ello por dos razones principales: a) Invariancia de los términos de arrastre y difusión por cambios de variables [6] . b) Teorema de

Wong y Zakai [4]: Esta interpretación corresponde al límite de una sucesión de ecuaciones con ruidos de tiempos de correlación finitos pero tendiendo a cero.

Las ecuaciones de Fokker Planck así obtenidas [7] son el punto de arranque de todos los estudios actuales sobre dinámica crítica y transiciones de fase de no equilibrio [2]. Para su tratamiento práctico existen desarrolladas sofisticadas técnicas que incluyen los formalismos operacional [8] y de integrales de camino [9].

3. Ruido de color

En muchos casos la idealización de ruido blanco puede ser demasiado fuerte y obscurecer totalmente fenómenos causados por un tiempo de correlación no nulo [10-12]. La principal dificultad asociada con el ruido de color es la pérdida del caracter Markoviano de (1) y como consecuencia la dificultad de encontrar la ecuación maestra asociada [13]. Una primera aproximación al problema consiste en limitarse a ruidos $\xi(t)$ dados por un proceso de Orstein-Uhlenbeck:

$$d\xi(t) = -\tau^{-1}\left(\xi(t)dt - dw(t)\right) \tag{6}$$

$$\gamma(t,t') = \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{D}{\tau} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}} \tag{7}$$

donde τ es el tiempo de correlación.

En esta situación, (1) y (6) constituyen un proceso de Markov degenerado. Es decir que doblando el número de variables podemos continuar con procesos de Markov. No obstante el precio pagado por ello es muy alto, pues en el caso usual de que (1) sea una ecuación unidimensional, para $\xi(t)$ ruido blanco, la solución estacionaria es siempre conocida, mientras que para procesos en dos dimensiones hay pocos casos en que sea conocida. Una alternativa a este problema es contruir una ecuación de Fokker Planck unidimensional válida para tiempos de correlación pequeños [12,14]. Con ello pueden incluirse los efectos de tiempos de correlación pequeños sin salirse del contexto de las ecuaciones de Fokker Planck cuyas propiedades matemáticas son bien conocidas. Debe quedar claro que la existencia de una ecuación de Fokker Planck no está reñida con el carácter no markoviano [15]. Estas ecuaciones deben interpretarse como ecuaciones maestras, pero su solución fundamental no es la probabilidad condicional del proceso.

La deducción de tales ecuaciones [12,14] parte de la ecuación de Liouville estocástica [16] asociada a (1)

$$\frac{\partial \rho(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q}\Big(V(q,t) + g(q,t)\xi(t)\Big)\rho(q,t) \tag{8}$$

que promediada sobre la distribución de $\xi(t)$ conduce a

$$\frac{\partial P(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q}V(q,t)P(q,t) + \frac{\partial}{\partial q}g(q,t)\frac{\partial}{\partial q}\int_0^t dt'\,\gamma(t,t')\left\langle \delta(q(t)-q)\,\frac{\delta q(t)}{\delta \xi(t')}\right\rangle \tag{9}$$

donde

$$P(q,t) = \langle \delta(q(t)-q)\rangle \tag{10}$$

Dado que

$$\frac{\delta q(t)}{\delta \xi(t)} = g(q(t),t) \tag{11}$$

en el límite de ruido blanco $\gamma(t,t') = 2D\,(t-t')$ se recupera la ecuación (5).

Para ecuaciones lineales $V(q,t) = a(t)q + b(t)$, $g(q,t) = 1$, se tiene que

$$\frac{\partial P(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q}\Big(a(t)q + b(t)\Big)P(q,t) + \frac{\partial^2}{\partial q^2}D(t)P(q,t) \tag{12}$$

$$D(t) = \int_0^t dt'\,\gamma(t,t')\,e^{\int_{t'}^{t} a(z)dz} \tag{13}$$

Para problemas mas generales no hay ecuaciones cerradas tan sencillas y hay que desarrollar $\gamma(t,t')$ en (9) en potencias de z [12]. En primer orden en z se obtiene

$$\frac{\partial P(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q}\left[V(q,t) + D g'(q,t)\left(g(q,t) - z V^2(q,t)\left(\frac{g(q,t)}{V(q,t)}\right)'\right)\right] P(q,t) + \qquad (14)$$
$$+ D\frac{\partial^2}{\partial q^2} g(q,t)\left[g(q,t) - z V^2(q,t)\left(\frac{g(q,t)}{V(q,t)}\right)'\right] P(q,t)$$

En orden z^2 en general aparecen derivados terceras de P respecto a q y no existe ecuación de Fokker Planck. Esto no es así en el caso especial en que

$$\left[g\,(V/g)'\right]' = 0 \qquad (15)$$

Esta condición [17] define precisamente la clase de ecuaciones del tipo (1) que son transformables mediante cambios de coordenadas en forma lineal, y por tanto para ellos es aplicable en las nuevas coordenadas la ecuación exacta (12).

4. Aplicaciones

En este apartado aplicamos los resultados anteriores a dos situaciones físicas distintas: Transiciones de fase de no equilibrio y movimiento browniano.

a) Transiciones de fase de no equilibrio: Ha sido establecido recientemente [3,10] que el ruido externo puede introducir nuevas transiciones de fase de no equilibrio que no aparecen en el análisis determinista de la ecuación de partida. Por ello se puede asegurar que el efecto del ruido externo no es únicamente de correcciones cualitativas de la ecuación determinista. Una forma sencilla de apreciar esto es estudiando los extremos relativos de la solución estacionaria de la ecuación (14).

La ecuación para dichos extremos es

$$V(q) - D\,g(q)g'(q) + Dz\,g(q)\left(g''(q)V(q) - g(q)V''(q)\right) = 0 \qquad (16)$$

donde se aprecian claramente los diferentes efectos del ruido blanco y de color. El primer término es el determinista, el segundo es el efecto del ruido blanco y el último es la primera corrección debido al ruido de color. Evidentemente nuevas soluciones pueden aparecer debidas a estos dos últimos términos lo que puede indicar nuevas fases macroscópicas.

Como ejemplo ilustrativo consideremos la ecuación de Verhulst que aparece en diversos problemas físicos, químicos y biológicos [2].

$$\dot{q}(t) = \alpha q - q^2 + q\xi(t) \qquad (17)$$

$\xi(t)$ es el ruido descrito en el primer apartado y puede ser blanco o de color. Las ecuaciones de FP para ruido blanco (4) y para ruido de color en primer orden en τ (14) tienen como solución estacionaria respectivamente [12]

$$P_{st_1}(q) = \frac{N_1}{D} q^{\alpha/D - 1} e^{-q/D}, \quad q \in (0,\infty); \quad P_{st_2}(q) = \frac{N_2}{D} q^{\alpha/D - 1} (1-\tau q)^{\frac{1}{\tau D} - \frac{\alpha}{D} - 1}, \quad q \in (0, 1/\tau) \qquad (18)$$

Donde la primera es el límite de la segunda para $\tau \to 0$.

En la figura 1 y 2 observamos los diferentes comportamientos de estas dos soluciones, correspondiendo la primera al ruido blanco, en función de los parámetros del sistema

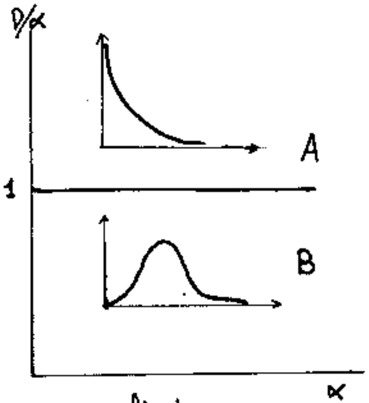

fig. 1

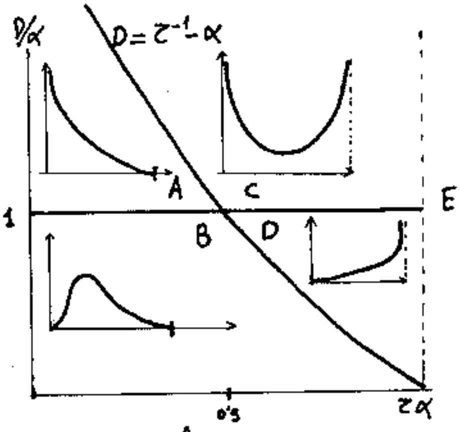

fig. 2

Para el caso determinista solo hay transición para el valor $\alpha = 0$ que aquí no estudiamos. Podemos observar que para el caso $\alpha > 0$ el ruido blanco introduce una transición para el valor crítico $D/\alpha = 1$. La introducción del ruido de color amplia las posibilidades de las transiciones de fase como puede apreciarse en la fig. 2 donde existen las nuevas zonas C,D,E. Como se puede observar las fases A,B corresponden a las del ruido blanco para τ pequeños. Otros efectos del ruido coloreado son la variación del dominio de las variables q (de $q \in (0, \infty)$ pasamos a $q \in (0, \sqrt{2})$) y el desplazamiento del máximo de la zona B, $q_m = \frac{\alpha - D}{1 - 2\tau D}$ con respecto al caso de ruido blanco $q_m = \alpha - D$. Estos resultados son cualitativamente coincidentes con los de [11], en donde se considera este modelo con un ruido $\xi(t)$ representado por un proceso dicotómico de Markov. La artificialidad de este ruido permite obtener una ecuación maestra exacta.

b) Movimiento browniano. Partimos de las ecuaciones del movimiento clásicas para la posición q y el momento p de una partícula de masa unidad en un fluido sometido a los choques aleatorios de la partícula del medio. Las ecuaciones del movimiento con un potencial $\phi(q)$, son

$$\dot{p}(t) = -\lambda p(t) - \phi'(q(t)) + \xi(t) \quad ; \quad \dot{q}(t) = p(t) \tag{19}$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2 k_B T \, \delta(t - t') \tag{20}$$

donde λ es el coeficiente de fricción y $\xi(t)$ es la fuerza estocástica que dá cuenta de los choques de las partículas del medio o fluctuaciones térmicas y que es de media nula.

Para este problema es bien conocida la ecuación de FP para P(q,p,t). Una cuestión ya propuesta por Uhlenbeck y Ortein [18] es la de encontrar la ecuación exacta que satisface P(q,t) donde se ha eliminado el momento.

Resolviendo formalmente (18) y sustituyendo (19) llegamos a una ecuación cerrada para q

$$\dot{q}(t) = -\int_0^t e^{-\lambda(t-t')}\phi'(q(t'))dt' + \int_0^t e^{-\lambda(t-t')}\xi(t')dt' \qquad (20)$$

Debido a esta eliminación tenemos un proceso no markoviano caracterizado por la aparición del primer término con memoria y de una nueva fuerza estocástica $\bar{\xi}(t)$ (el segundo término) de ruido coloreado (7). Caso de ser $\phi(q)$ cuadrático en q, la ecuación (20) es reducible a una lineal sin memoria, con coeficientes dependientes de t pero con ruido coloreado, pero para la que existe ecuación exacta de F.P. dada por una ecuación análoga a (12) [14].

Para un potencial no armónico la manera de abordar la memoria es desarrollarla en potencias λ^{-1} (inversos de τ).

$$\dot{q}(t) = -\lambda^{-1}\phi'(q(t))\left(1+\lambda^{-2}\phi''(q(t))\right) + \left(1+\lambda^{-2}\phi''(q(t))\right)\bar{\xi}(t) \qquad (21)$$

A (21) corresponde una ecuación de F.P. (14) dado por

$$\frac{\partial P(q,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}\left[\lambda^{-1}\phi'(q)\left(1+\lambda^{-2}\phi''(q)\right) - \lambda^{-2}\phi'''(q)\right]P(q,t) + $$
$$+\lambda^{-1}k_BT\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(1+\lambda^{-2}\phi''(q)\right)P(q,t) + O(\lambda^{-5}) \qquad (22)$$

que conserva los términos hasta el orden λ^{-3}. Para el caso de primer orden a λ^{-1} equivale a hacer $\dot{p}$ = o en (19) es decir aproximación de ruido blanco. Esta ecuación (22) está de acuerdo con el resultado de las ref. [19, 20]. En estos trabajos se obtiene (22) mediante algún tipo de proyección de la ecuación en espacio fase, mientras que aquí se ha abordado directamente el problema no markoviano en el espacio de posición. Además de un mayor sentido físico se pueden así obtener resultados exactos como el del oscilador que no son conseguibles mediante los métodos de proyección en los que el régimen transitorio desaparece siempre.

Cabe por último citar que el problema de perdida de markovicidad por eliminación de variables, del que el movimiento browniano es un claro ejemplo, es de gran relevancia en las aproximaciones adiabáticas usuales en el estudio de transiciones de fase [2].

REFERENCIAS

1. H. Mori, Progr. Theor. Phys. 33,423(1965)
2. H. Haken, "Synergetics, An Introduction". Springer Verlag (1977).
3. W. Horsthemke, M. Mansour, Z.Phys. B24,307(1976)
4. L. Arnold, "Stochastic differential equation". Wiley and Sons (1974)
5. R.L. Stratonovich, "Conditional Markov Processes and their application to the theory of optimal control" Elsevier (1968)
6. D.Ryter, Z.Phys. B30,219(1978).
7. R.L. Stratonovich, "Topics in the theory of ramdom noise", vol. I, Gordon and Reach (1967)
8. L. Garrido, M. San Miguel, Progr. Theor. Phys. 59,40,55(1978)
9. L. Garrido, D. Lurié, M. San Miguel, J. Stat. Phys. (en prensa 1979)
10. L. Arnold, W. Horsthemke, R. Lefever, Z. Phys. B29, 367(1978)
11. K. Kitahara, W. Horsthemke, R. Lefever, Phys. Lett. 70A, 377(1979)
12. J.M. Sancho, M. San Miguel, "External non-white noise and nonequilibrium phase transitions" Preprint Univ. Barcelona (1979).
13. P. Hänggi, Z. Phys. B31, 407(1978)
14. M. San Miguel, J.M. Sancho, "A colored noise approach to brownian motion in position space: Corrections to Smoluchowski equation". Prerpint, Univ. de Barcelona (1979)

15. P. Hänggi, H. Thomas, H. Grabert, P. Talkner J. Stat.. Phys. 18,155(1978).
16. N.G. Van Kampen, Phys. Rep. 24C,171(1976)
17. M. San Miguel, Z. Phys. B(en prensa 1979)
18. G.E. Uhlenbeck and L.S. Orstein, Phys. Rev. 26,823(1930)
19. G. Wilemski, J. Stat. Phys. 14,153(1976)
20. U.M. Titulaer, Physica, 91A,321(1978).