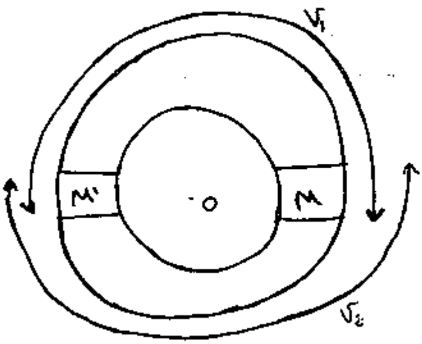
SUPERFICIES DE RIEMANN

J. Cufí

En sus esfuerzos por construir de una manera sólida la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja, Riemann se dió cuenta de que era necesario abandonar el plano complejo como soporte de tales funciones. Ello es debido a que la analiticidad es una propiedad local y es, por tanto, una restricción innecesaria imponer un dominio global con propiedades prefijadas para todas las funciones.

El hecho de que es inadecuado fijar como dominio de todas las funciones analíticas el plano complejo viene ilustrado por la imposibilidad de resolver el problema de la prolongación analítica sin salirse del plano. Puesto que hay muchas funciones holomorfas en una región que pueden extenderse a una región mayor, es natural intentar buscar el mayor dominio posible para una función analítica y es fácil ver, mediante ejemplos, que este problema no tiene solución en el plano: tomemos $\mathcal{U}$ y una determinación de log z en $\mathcal{U}$; esta función se prolonga a los abiertos V_1 y V_2 por medio de determinaciones del log., pero no se puede prolongar a ningún abierto que contenga a $V_1 \cup V_2$, porque las prolongaciones a V_1 y V_2 siempre difieren en $\mathcal{U}$. La solución del problema de la prolongación analítica la proporciona la idea de superficie de Riemann



asociada a una función la cual es el dominio natural máximo de la función construida a partir de su comportamiento local.

Históricamente, la noción de superficie de Riemann se ha utilizado en dos sentidos distintos aunque íntimamente relacionados. Riemann, en su tesis, resolvió la dificultad de construir un dominio natural para las funciones multiformes, equivalente al de la prolongación analítica, con la idea fundamental de hacer variar la variable z sobre un dominio que puede recubrir una parte del plano complejo varias veces. Aunque actualmente se huya del uso de funciones multiformes, la idea de Riemann es básica y se puede axiomatizar fácilmente, ello conduce a la noción de superficie recubridora.

Aunque inicialmente la idea de superficie de Riemann aparece, pues, ligada a una función, posteriormente se ha desarrollado el estudio de las superficies de Riemann de una forma abstracta, como variedades complejas independientes de las funciones que les dieron origen.

Ya el mismo Riemann en sus trabajos sobre los fundamentos de la geometría introdujo lo que se conoce por variedad diferenciable, idea que se generaliza a la de variedad compleja: hoy en día por superficie de Riemann se entiende una variedad compleja de dimensión uno. El punto de partida para la teoría moderna de las superficies de Riemann es la obra de H. Weyl "Die Idea der Riemannschen Fläche" (1913).

La teoría abstracta de las superficies de Riemann tiene una parte algebráica y una parte analítico-geométrica. La parte algebráica es esencialmente, el estudio de las superficies de Riemann compactas y el hecho fundamental es que toda superficie de Riemann compacta está asociada canónicamente a una curva algebráica del plano proyectivo; el estudio de ambas categorías es equivalente y lo es a su vez al estudio de los cuerpos de funciones algebráicas que son así los cuerpos de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann compacta o los cuerpos de funciones racionales sobre una curva algebraica. Todas las nociones y resultados sobre la curva tienen sus análogos en la superficie y en el cuerpo de funciones. El punto de partida para el estudio y clasificación de estas superficies es una importante relación de dualidad, debida a Riemann y Roch que permite calcular en muchos casos, la dimensión de un divisor (o sea de un fibrado sobre la superficie). No nos ocuparemos aquí de esta parte de la teoría de superficies de Riemann.

La parte analítica trata más bien de los problemas de existencia de funciones que tienen un carácter especial en relación con la estructura analítica como son las funciones subarmónicas, armónicas o analíticas, así como de los problemas de construcción, clasificación y representación conforme de superficies de Riemann.

En las dos partes, algebraica y analítica, juegan un papel muy importante las propiedades topológicas de las superficies de Riemann y es quizás uno de los aspectos más sugestivos del tema el observar como muchos conceptos y problemas analíticos se convierten sobre la superficie de Riemann en problemas simplemente topológicos; citemos entre ellos, algunos de los cuales trataremos a continuación, la idea de prolongación analítica a lo largo de una curva; el problema de existencia de una determinación de una función analítica global; la discontinuidad propia como característica de los grupos uniformizantes· la equivalencia entre género topológico de una superficie compacta y el número de diferenciales abelianas independientes; el computo de la clase característica de un fibrado a partir del orden total(ceros y polos) de una sección meromorfa del mismo; etc.

Utilizaremos la noción de superficie de Riemann en el sentido de superficie que posee una estructura conforme, es decir un sistema de cartas locales tal que las funciones de transición sean holomorfas. A partir de esta definición de obtienen ejemplos simples de superficies de Riemann asi como la noción de función analítica entre dos superficies de Riemann. La idea de función analítica está intimamente relacionada con la idea de revestimiento(la otra forma en que se usa el término "superficie de Riemann") como resultado del comportamiento local de una función holomorfa (teorema de la aplicación abierta).

Un espacio separado $\tilde{W}$ y una aplicación f de $\tilde{W}$ en una superficie W determinan un revestimiento liso de W si cada punto $p \in \tilde{W}$ tiene un entorno que es homeomorfo por f a un entorno de $p_0 = f(\tilde{p}_0)$. En el caso de que la aplicación continua $f: \tilde{W} \to W$ sea tal que para cada punto $p_0 \in \tilde{W}$ hay un entorno $\tilde{V}$ de modo que $\tilde{V} - \tilde{p}_0$ es un revestimiento liso de $W - f(\tilde{p}_0)$, se dice que $(\tilde{W}, f)$ es un revestimiento (ramificado) de W.

Si (W_1, Φ_1), (W_2, Φ_2) con dos superficies de Riemann (Φ_1, Φ_2 indican las estructuras conformes respectivas) y $f: W_1 \to W_2$ analítica no constante, entonces f realiza a W_1 como un revestimiento de W_2 siendo en cada punto liso o ramificado según sea o no distinto de cero la derivada de f. Si $q_2 = f(q_1)$ y h_1, h_2 son coordenadas locales $\varphi = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$ y $\varphi'(h_1(q_1)) \neq 0$, entonces f es un homeomorfismo local (analítico). En caso contrario, como el cero de φ' es aislado se puede tomar un entorno V_1 de modo que $V_1 - q_1$ son revestimiento liso de $W_2 - q_2$.

Es interesante el hecho de que vale el recíproco de esta situación: si (W_1, f) es un revestimiento (W_1 es una superficie) de W_2 y W_2 tiene una estructura conforme Φ_2, entonces existe una única estructura conforme en W_1 que hace analítica a la función f, esta estructura se obtiene al tomar los homeomorfismos locales h_1 de W_1 tales que $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$ son analíticas para toda h_2 coordenada local de W_2. Diremos que la estructura de W_1 está inducida por la de W_2; más adelante consideraremos el problema de cuando una estructura en W_1 está inducida por una estructura de W_2.

Veamos ahora como las dos nociones básicas de estructura conforme en una superficie y de una superficie como revestimiento de otra aparecen al construir la superficie de Riemann de una función.

En primer lugar, dado el carácter local de la analiticidad, es conveniente, siguiendo a Weierstrass, dar como definición de función analítica global (aunque digamos simplemente función analítica) la de un conjunto $\mathcal{F}$ de elementos analíticos de modo que dos de ellos siempre sean prolongación analítica directa uno de otro por medio de un número finito de elementos de $\mathcal{F}$. Para cada punto a del plano, si se establece entre los elementos analíticos cuyo dominio contiene al punto a la relación de equivalencia que consiste en iden tificar los elementos que coinciden en un entorno del punto a, se obtiene el anillo de los germenes de funciones analíticas en el punto a. Si $\mathcal{F}$ es una función analítica en el sentido de Weierstrass, la superficie de Riemann $\mathcal{R}$ asociada a $\tilde{\mathcal{F}}$ está formada por los germenes de funciones analíticas determinadas por elementos analíticos pertenecientes a la función $\mathcal{F}$ y la proyección $\pi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ que asocia a cada punto (f,a) (germen alrededor de a) el punto $a \in \mathbb{C}$ y π es un homeomorfismo local dotando a $\mathcal{R}$ de la topología que induce sobre cada fibra la topología discreta; asi $\mathcal{R}$ es un revestimiento liso del dominio de la función $\mathcal{F}$ y posee, por tanto, una estructura analítica; para élla la función $F(\xi) = f(\pi(\xi))$ si ξ es el punto $(f, \pi(\xi))$ es analítica. Así la superficie de Riemann $\mathcal{R}$ convierte a la función multiforme $\mathcal{F}$ en una función uniforme F.

Además, la construcción anterior resuelve el problema de la prolongación analítica para una función f uniforme en un dominio: la superficie de Riemann $\mathcal{R}$ asociada en la forma anterior a la función analítica global $\mathcal{F}$ obtenida al considerar los elementos analíticos determinados por f y todas sus posibles prolongaciones analíticas directas es el máximo dominio para la función f en el sentido que $\mathcal{R}$ contiene un dominio isomorfo el campo de definición de f y f se extiende a una función analítica en $\mathcal{R}$; además toda otra superficie de Riemann que goce de estas propiedades se aplica analíticamente en la superficie $\mathcal{R}$. Para obtener una descripción más completa de la función $\tilde{\mathcal{F}}$ es conveniente añadir a la superficie de Riemann $\mathcal{R}$ nuevos puntos que corresponden a las singularidades algebraicas de $\mathcal{F}$ obteniendose una nueva superficie que es un revestimiento ramificado del dominio de $\mathcal{F}$. El problema de la prolongación analítica se puede resolver también buscando la máxima superficie de Riemann ramificada.

Veamos, ahora, como se traduce la idea de prolongación analítica sobre la superficie de Riemann:

Si $\mathcal{F}$ es una función analítica (global) y $\gamma(t)$ $a \leq t \leq b$ una curva continua en el plano y para cada $t \in [a,b]$ tenemos un germen analítico $(f,\gamma(t))$ de la función de modo que para cada t_0 existe un $\delta > 0$ tal que para $|t - t_0| < \delta$ el germen $(f,\gamma(t))$ está determinado por el mismo elemento analítico que determina el germen $(f,\gamma(t_0))$, se dice que los elementos $(f,\gamma(t))$ se han obtenido por prolongación analítica del elemento correspondiente a $(f,\gamma(a))$ a lo largo de la curva γ. La correspondencia $t \to \Gamma(t) = (f,\gamma(t))$ define una curva en $\mathcal{R}$ y la condición de continuidad exigida equivale precisamente a que esta curva $\Gamma(t)$ sea continua; además Γ se proyecta sobre γ, es decir $\pi(\Gamma(t)) = f(t)$ para $a \leq t \leq b$. Es natural, pues, ya sea sobre la superficie de Riemann asociada a una función analítica, ya sea en general sobre un revestimiento de una superficie arbitraria planteanse el problema de la existencia y unicidad de elevaciones de una curva dada en la superficie base, problema que incluye, pues, al de la prolongación analítica. Es fácil establecer la unicidad: dos elevaciones de una misma curva a partir del mismo punto inicial del revestimiento son idénticas. Por el contrario la existencia de elevaciones no puede asegurarse en general. Un revestimiento liso tal que toda curva de la superficie base admita una elevación a partir de cualquier punto sobre el punto inicial de la curva se llama regular (en el caso de tratarse de la superficie de Riemann de una función $\mathcal{F}$, significa que $\mathcal{F}$ admite prolongación analítica a lo largo de toda curva de un dominio).

Si tenemos un revestimiento liso regular $(\tilde{W},f)$ de una superficie W, dos puntos $a,b \in W$, un punto $\tilde{a}$ sobre $\underline{a}$ y unimos $\underline{a},\underline{b}$ por un curva γ, cualquier elevación de γ, $\tilde{\gamma}$, desde el punto $\tilde{a}$ acaba en un punto $\tilde{b}$ sobre $\underline{b}$; es importante determinar hasta que punto $\tilde{b}$ depende de la elección de γ. Una respuesta parcial a esta cuestión la proporciona el teorema de monodromia que ocupa un papel central en la teoría de los revestimientos: si $(\tilde{W},f)$ es un revestimiento regular de W y γ_1, γ_2 dos curvas homotopas de $\underline{a}$ a $\underline{b}$ en W, entonces las elevacio nes $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ desde un mismo punto inicial $\tilde{a}$ sobre a terminan en el mismo punto $\tilde{b}$. Además $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ son homotopos en $\tilde{W}$.

Como consecuencia se obtiene que una superficie simplemente conexa no posee otro revestimiento regular que ella misma, resultado cuyo significado analítico es que toda función analítica global que se pueda prolongar a lo largo de todas las curvas de un dominio simplemente conexo, determinan una función holomorfa uniforme para cada elección de un germen inicial. También significa que toda función continua y que no se anula sobre una superficie simplemente conexa posee una determinación continua de su logaritmo o también que una función armónica sobre una superficie de Riemann simplemente conexa posee una función conjugada global.

Mientras no se advierta lo contrario, los revestimientos que consideramos serán lisos y regulares. Si (W_1, f_1) es revestimiento de la superficie W y (W_2, f_2) un revestimiento de W_1, entonces $(W_2, f_1 \circ f_2)$ es un revestimiento de W; consideremos el segundo como un revestimiento de W mayor que (W_1, f_1). En general (W_2, f_2) es mayor que (W_1, f_1) si existe $f_{21} : W_2 \to W_1$ tal que $f_2 = f_{21} \circ f_1$ y (W_2, f_{21}) es revestimiento de W_1. Esta relación define una ordenación parcial y si dos revestimientos son comparables entre si en los dos sentidos los consideraremos como equivalentes.

Sea $p_0 \in W$ y $\tilde{p}_0 \in \tilde{W}$ con $f(\tilde{p}_0) = p_0$, donde $(\tilde{W}, f)$ es un revestimiento de W y sea γ una curva cerrada de W con origen en p_0 ; si $\tilde{\gamma}$ es una elevación de γ desde $\tilde{p}_0$, $\tilde{\gamma}$ es cerrada cuando γ es homotopa a un punto; asi el que $\tilde{\gamma}$ sea cerrada depende sólo de la clase de homotopía de γ.

Sea D el conjunto de clases de homotopía $\{\gamma\}$ tales que $\tilde{\gamma}$ es cerrada. Esta claro que D es un subgrupo del grupo fundamental $\pi_1(W_1, p_0)$, que depende de $\tilde{p}_0$. Si sustituimos $\tilde{p}_0$ por $\tilde{p}_1$ y $\tilde{\sigma}$ es un arco de $\tilde{p}_0$ a $\tilde{p}_1$, su proyección es una curva σ cerrada desde p_0. Si γ es una curva cerrada desde p_0 resulta que $\sigma\gamma\sigma^{-1}$ se eleva a una curva cerrada desde $\tilde{p}_0$ si y sólo si γ se eleva a una curva cerrada desde $\tilde{p}_1$. Si D_1 corresponde a $\tilde{p}_1$, resulta que $D_1 = \{\sigma\}^{-1} D\{\sigma\}$, es decir D y D_1 son subgrupos conjugados.

Se obtiene que la construcción anterior determina una correspondencia biyectiva entre las clases de subgrupos conjugados de $\pi_1(W, P_0)$ y las clases de equivalencia de revestimientos $(\tilde{W}, f)$. Además si D y $\tilde{W}$ se corresponden, entonces D es isomorfo al grupo fundamental de $\tilde{W}$. Y es fácil ver que los subgrupos del grupo fundamental están ordenados como los revestimientos, es decir $D \subset D_2$ implica que $\tilde{W}_1$ es mayor que $\tilde{W}_2$ y si $\tilde{W}_1$ es mayor que $\tilde{W}_2$ entonces D_2 contiene un conjugado de D_1. Cuando $D = \pi_1(W)$ se obtiene $\tilde{W} = W$ y cuando D se reduce a un elemento el revestimiento $\tilde{W}$ correspondiente se llama el revestimiento universal de W, el cual debe ser simplemente conexo.

Dado un revestimiento $(\tilde{W}, f)$ de W un homeomorfismo φ de $\tilde{W}$ sobre si mismo se llama una transformación de revestimiento si $f \circ \varphi = f$ con lo cual si W y $\tilde{W}$ son superficies de Riemann φ es conforme ya que las variables locales pueden elegirse con $\tilde{z}_\alpha = z_\alpha \circ f$. Es fácil ver que el conjunto de puntos fijos por φ es abierto y como también es cerrado, resulta que si φ no es la identidad, φ no tienen puntos fijos.

Las transformaciones de recubrimiento de $(\tilde{W}, f)$ forman un grupo y si D es el subrgrupo de $\pi_1(W)$ que corresponde a $\tilde{W}$ resulta que el grupo de transformaciones de revestimiento es isomorfo al cociente $N(D)/D$ donde $N(D)$ es el normalizador de D en $\pi_1(W)$. Un caso particular interesante es cuando $N(D) = \pi_1(W)$ o sea D es normal; $(\tilde{W}, f)$ se dice que es normal y en este caso el grupo de transformaciones derevestimiento es transitivo. Esta propiedad no depende de la elección del punto P_0 inicial.

Anteriormente, hemos hecho notar que si (W_1, f) es un revestimiento de W_2 y W_2 tiene una estructura conforme, esta induce una estructura conforme en W_1 de modo que $\underline{f}$ sea analítica. Consideremos ahora el problema inverso: cuando una estructura conforme en W_1, está inducida por una estructura conforme de W_2? En primer lugar, si una estructura ϕ_1 en W, proviene de una estructura de W_2 y φ es una transformación de revestimientos de W_1, φ ha de ser conforme respecto de Φ_1; en efecto: si $q_1 \in W_1$ y f es homeomorfismo de un entorno V de q_1, entonces también es un homeomorfismo en $\varphi(V)$ y si llamamos f_1, f_2 a la restricción de f a V y a $\varphi(V)$ obtenemos:

$\varphi = f_2^{-1} \circ f_1$ y por tanto φ es localmente compuesta de funciones analíticas. Hay otra condición necesaria muy interesante para las transformaciones de revestimiento, que es independiente de la estructura analítica, y que hacemos notar ahora, cada punto $p \in W$, tiene un entorno V_1 que no corta a sus imagenes por las transformaciones de revestimiento, $\varphi(V_1)$; (supuesto naturalmente que φ no es la identidad); en efecto: cada $p \in W$, posee un entorno V_1 homeomorfo a $f(V_1)$ y si existiera un punto $p \in V_1 \cap \varphi(V_1)$ tendriamos $p = \varphi(q)$ con $p, q \in V_1$ y, por tanto, $f(p) = f(\varphi(q)) = f(q)$ lo que sólo es posible si $p = q$, pero entonces p sera un punto fijo de φ, lo que es imposible si φ no es la identidad. Esto se expresa diciendo que el grupo de transformaciones de revestimiento es propiamente discontinuo en W_1. En resumen, si la estructura conforme de W_1 esta inducida por una estructura de W_2, las transformaciones de revestimiento forman un grupo propiamente discontinuo de aplicaciones conformes de W_1. Pero se cumple tambien el siguiente reciproco

Sea G un grupo de aplicaciones biyectivas conformes de una superficie de Riemann (W_1, Φ_1) en si misma, que sea propiamente discontinuo, entonces existe una superficie de Riemann (W_2, Φ_2) y una aplicación analítica $f: W_1 \to W_2$ de modo que G es precisamente el grupo de las transformaciones de revestimiento de (W_2, f). La superficie (W_2, Φ_2) es única salvo equivalencia analítica.

Un ejemplo de esta situación es cuando G son las transformaciones del plano $Z \to Z + n_1 W_1 + n_2 W_2$ con n_1, n_2 enteros y W_1/W_2 no real. Si estas transformaciones han de ser las de revestimiento, la superficie base ha de tener un punto para cada clase de puntos que se corresponden entre si por los elementos de G. Hemos pues, de identificar los puntos del plano equivalentes en este sentido y la superficie que se obtiene es un toro y el resultado enunciado significa que este toro tiene una única estructura analítica que induce la del plano. Es decir en un toro (topológico) existen tantas estructuras analíticas como pares complejos W_1, W_2 con cociente W_1/W_2 no real y distinto.

La situación de este ejemplo es general y la superficie W_2 se obtiene al identificar los puntos de W_1 que se corresponden por algún elemento de G.

Otro ejemplo de gran interés corresponde al caso en que G es un grupo propiamente distinto de homografías del disco unidad que serán sin punto fijo (grupo Fuchsiano). Al identificar los puntos del disco bajo G se obtiene una superficie de Riemann que tiene al disco como revestimiento regular y puesto que el disco es simplemente conexo será el revestimiento universal de la superficie obtenida, es decir que G se identificará el grupo fundamental de la superficie. Nuestro objetivo va a ser precisamente mostrar como, salvo pocas excepciones, el revestimiento universal de una superficie de Riemann se puede representar como el disco unidad y el grupo fundamental de la superficie aparece como un grupo fuchsiano. Desde este punto de vista, la teoría de las superficies de Riemann y la teoría de los grupos fuchsianos son casi equivalentes. Aunque se obtiene alguna ventaja formal desde el punto de vista de esta equivalencia es posible el estudio de las superficies de Riemann por métodos más directos.

Lo que acabamos de enunciar depende del teorema fundamental de representación conforme para superficies de Riemann o teorema de uniformización debido a Koebe y Poincaré (1907), uno de los teoremas más importantes de la teoría de funciones analíticas de una variable y que juega un papel análogo al teorema de Riemann para regiones planas. El teorema de uniformización asegura que toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente al disco, o al plano complejo o a la esfera de Riemann. Las primeras demostraciones de este teorema eran largas y artificiosas; utilizando las sucesivas simplificaciones que se han ido introduciendo se puede dar hoy día una demostración de proporciones manejables que, naturalmente, no podemos detallar aquí. Indicaremos únicamente que existen, generalmente, dos caminos de demostración y cuales son los puntos importantes de cada uno de ellos.

Las demostraciones clásicas del teorema de uniformización utilizan un recubrimiento de la superficie por medio de una sucesión de regiones relativamente compactas sobre las que las funciones holomorfas se pueden aproximar por funciones holomorfas globales. Por este método o bien hay que hacer la hipótesis suplementaria de que la superficie tiene base numerable o bien hay que probar directamente que toda superficie de Riemann tiene base numerable, observación debida a Radó. El punto esencial es el teorema de Runge para superficies de Riemann abiertas (no compactas) según el cual si W es superficie de Riemann abierta y $\mathcal{U} \subset W$ un abierto tal que $W - \mathcal{U}$ no tiene ninguna componente conexa compacta, entonces toda función holomorfa en $\mathcal{U}$ es el límite de funciones holomorfas sobre W, uniformemente sobre los compactos de $\mathcal{U}$. Este teorema es debido a Behnke y Stein y su construcción proporciona también soluciones al 1º y 2º problema de Cousin sobre W, generalización en los teoremas de Mittag-Leffler y Weierstrass en el plano. Una demostración más corta se debe a Malgrange utilizando un teorema de aproximación para las soluciones de operador elíptico.

Como consecuencia del teorema de Runge se obtienen las propiedades más características de las superficies de Riemann abiertas, también debidas a Behnke y Stein, y que posteriormente se han axiomatizado para cualquier dimensión, en el concepto de espacio de Stein, o espacio analítico con base numerable tal que:

a) Las funciones holomorfas separan puntos.

b) Las funciones holomorfas (en número igual a la dimensión del espacio) proporcionan sistemas de coordenadas locales.

c) El espacio es holomorficamente conexo (la convergencia uniforme sobre un conjunto no implica la convergencia uniforme en ningún conjunto mayor, para todas las sucesiones de funciones holomorfas).

El teorema de Behnke-Stein, que se puede enunciar ahora, diciendo que toda superficie de Riemann abierta es un espacio de Stein, contiene en particular una respuesta afirmativa a la conjetura de Caratheodory sobre si existen funciones holomorfas no constantes en toda superficie de Riemann abierta.

En este método de demostración del teorema de uniformización, se necesita también la solución del problema de Dirichlet para una región de la superficie de Riemann y además el caso compacto, en que se trata de ver que la esfera admite una única estructura analítica, utiliza ampliamente la teoría algebraica.

Otro camino de demostración del teorema de uniformización, mucho más directo, se basa en una generalización debida a Ahlfors-Sario-Heins del método alternante de Schwarz y Neumann para construir una función de Green utilizando la idea de Poisson de construir una función armónica como supremo de función subarmónica.

Una función de Green relativa a un punto p_0 de W es el supremo (supuesto que sea finito) de la familia de funciones subarmónicas $\underline{V}$ con soporte compacto en $W - p$ tales que

$\overline{\lim}_{p \to p_0} \{ v(p) + \log |z(p)| \} < +\infty$ (z es una coordenada local en p_0).
Su existencia no depende de p_0 y es equivalente a que para un compacto $K \subset W$ con $W-K$ conexo existe una medida armónica sobre K y también es equivalente a que el principio del máximo en $W-K$ no sea válido.

Las superficies abiertas para las que existe función de Green se llaman hiperbólicas y las restantes parabólicas. La existencia de función de Green permite construir un isomorfismo de la superficie en una región plana y por tanto en el disco unidad. El caso parabólico es algo más complicado porque no se conoce a priori ninguna función armónica no constante; una modificación del método de Perron permite demostrar que la superficie es isomorfa al plano. Finalmente el caso compacto se puede tratar de forma análoga al caso parabólico, ahorrandose el uso de teoremas algebraicos.

En este método no se utiliza la numerabilidad de la superficie y constituye, por tanto, una demostración del teorema de Radó ya que al ser toda superficie de Riemann simplemente conexa numerable se obtiene que lo es toda superficie de Riemann sin más que pasar al revestimiento universal.

Vamos a considerar, finalmente, el problema de la uniformización para una superficie de Riemann que no sea simplemente conexa:

Sea W una superficie de Riemann y $\tilde{W}$ su revestimiento universal y lo dotamos de la estructura analítica incluida por W. Podemos aplicar a $\tilde{W}$ el teorema de uniformización y suponer que $\tilde{W}$ es la esfera de Riemann, el plano complejo o el disco unidad, en todo caso los puntos de $\tilde{W}$ se pueden mirar como números complejos z, posiblemente incluyendo $z=\infty$. En cuanto a la proyección $f:\tilde{W}\to W$ será una función analítica $f(z)$ con valores en W. Ya hemos hecho notar también que las transformaciones de revestimiento φ de $(\tilde{W},f)$ son uniformes y no tienen puntos fijos si φ no es la identidad.

Para cualquiera de las tres posibilidades de $\tilde{W}$ las transformaciones de revestimiento, por ser conformes han de ser homografías $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $ad-bc\neq 0$; ahora bien, una tal aplicación siempre tiene un punto fijo en la esfera y en consecuencia en el caso $\tilde{W}=S^2$ la única transformación de revestimiento posible es la identidad. Si $\tilde{W}$ es el plano y φ no tiene punto fijo, ha de ser una transformación $\varphi(z)=z+b$. Finalmente si $\tilde{W}$ es el disco los puntos fijos de φ han de estar sobre la circunferencia unidad y ello implica que φ sea de la forma $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$.

Sabemos también que las transformaciones de revestimiento forman un grupo que en este caso es $\pi_1(W)$. Si $\tilde{W}$ es el plano, el grupo Γ de transformaciones de revestimiento es, pues, un grupo propiamente discontinuo de traslaciones es sabido que sólo hay tres tipos de tales grupos a) la identidad, b) el grupo cíclico engendrado por una traslación $Z \to Z+b$, $b \neq 0$, c) el grupo engendrado por un par de traslaciones $Z \to Z+b_1$, $Z \to Z+b_2$ con b_2/b_1 no real. Sabemos también que la superficie W se obtiene a partir de $\tilde{W}$ identificando los puntos de $\tilde{W}$ que se corresponden por alguna transformación de revestimiento; en el caso a) W es el plano en b) un cilindro, que es conformemente equivalente al plano punteado y en c) W es un toro.

En todos los demás casos $\tilde{W}$ es el disco y Γ es un grupo propiamente discontinuo de automorfismos del disco, que serán sin punto fijo. También conocemos el recíproco: para tal grupo Γ se obtiene una superficie de Riemann al identificar puntos equivalentes bajo el grupo, la cual tendrá al disco como revestimiento universal y a Γ como grupo de transformaciones de revestimiento.

En resumen: Una superficie de Riemann W o bien es conformemente equivalente a la esfera, o al plano, o al plano punteado, o a un toro, o bien existe un grupo Γ propiamente discontinuo de automorfismos del disco unidad Δ tal que W es conformemente equivalente a la superficie A/Γ, identificando en Δ puntos equivalentes según Γ (grupo fuchsiano) el cual es a su vez isomorfo al grupo fundamental de W. Así la teoría de las funciones analíticas en W se convierte según los casos (excluida la esfera en que sólo hay constantes) en la teoría de las funciones enteras, de las funciones simplemente periodicas, de las funciones elípticas o de las funciones automorfas bajo el grupo Γ.

BIBLIOGRAFIA

AHLFORS, L.V. Complex Analysis. McGraw-Hill (1966) 2ªed.

AHLFORS,L.V. Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory. McGraw-Hill (1973).

AHLFORS,L.V. & SARIO,L. Riemann Surfaces. Princeton Univ. Press, (1960).

GUNNING,R.C. Lectures on Riemann Surfaces. Princeton Univ. Press, (Mathematical Notes) (1966).

SIEGEL, C.L. Topics in Complex Function Theory. I,II,III,(1969, 1971,1973).

SPRINGER,G. Introduction to Riemann Surfaces.Addison-Wesley (1957).

WEYL, H. The Concept of a Riemann Surface. Addison-Wesley (1964).