EQUACIONS DIFERENCIALS AMB RETARD

C. Perelló

L'evolució de les equacions diferencials funcionals és un exemple de com, encara avui, es fa matemàtica "pura" a partir de necessitats pràctiques. En aquest cas, ha sigut l'entendre i poder controlar processos dinàmics on apareix un retras en el temps, el que ha donat origen i ha fet creixer aquesta branca de les matemàtiques.

Aquestes equacions van ser tractades, en un començament, cada una com un cas particular (per exemple per Vito Volterra, a principis de segle) i no és sinó a partir de Krasovskii, en el seu estudi de la estabilitat del moviment fet després de la segona guerra, que adquireix una estructura matemàtica més coherent i formal. És en els anys cinquantes i seixantes que s'estructura tota una teoria i són Shimanov, Elsgolts, Halanay i Hale, entre d'altres, els que s'encarreguen de fer-ho. A partir d'aquells moments, la teoria s'utilitza per l'estudi de sistemes amb "memòria" (és a dir, en que el comportament depèn de la seva "història"). Avui hi ha molta gent treballant en aquestes qüestions ja molt deslligats de les motivacions originals, per estructurar dins de la matemàtica aquests nous estudis o be només perquè és un camp en el que encara es poden escriure articles sense massa dificultats, i aconseguir d'aquesta manera prestigi i feina.

Les publicacions sobre el tema són força abundants com es despren de veure la secció corresponent al "Mathematical reviews" o al "Zentralblatt".

Passarem a exposar diferents aspectes de la teoria de les equacions diferencials amb retard al temps.

Una equació diferencial ordinària relaciona els valors de les derivades d'una funció per cada valor de la variable independent (temps), el mateix per la funció i les seves derivades.

Per exemple

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0.$$

El resoldre l'equació és trobar x que la satisfagui.

En els sistemes dinàmics reals, però, ens trobem algunes vegades en que hi ha retards temporals. Per exemple en el control de la velocitat de rotació d'una turbina de vapor o del flux de neutrons d'un reactor nuclear, hi ha temps finits de transmissió de senyals.

Les equacions que descriuen aquests sistemes relacionen les derivades (la taxa temporal de la variació de l'estat) amb els valors de la funció (estat) en temps anteriors.

L'equació més senzilla que se m'acut que encara tingui algún interès il.lustratiu és

$$x'(t) = x(t-1)$$

El problema de trobar solucions d'aquesta equació és ben diferent de trobar solucions per

$$x'(t) = x(t),$$

que té per única solució amb valor ξ per $t = 0$ la funció $x(t) = \xi e^{t}$.

Si per solució de la primera equació entenem tota funció definida en un cert interval, que sigui continua, tingui derivada per la dreta i satisfagui l'equació, tenim que n'hi ha moltes de solucions x definides a $[0,\infty)$ tals que $x(0) = \xi$.

Una d'elles s'obté prenent $x(t) = \xi e^{\lambda t}$ amb $\lambda = e^{-\lambda}$.

Una altra és la que val ξ a l'interval $[-1, 0]$, i que per tota t a $[0,\infty)$ val

$$x([t]) + \int_{[t]}^{t} x(\tau - 1)d\tau ,$$

amb $[t] :=$ part entera de t.

La mateixa fórmula dóna una solució de la equació a $\mathbb{R}^+$ si es defineix $x(t) = \varphi(t)$ per $t \in [-1,0]$, sent φ qualsevol funció continua a $[-1,0]$.

Notem que en general no existeixen solucions que siguin extensions d'aquestes: que estiguin definides per valors de t menors que -1.

Resulta d'aquest exemple que, si volem un problema "ben plantejat", hem de considerar els estats no com a punts, és a dir, els valors de x(t), sinó com a funcions definides en un interval, que en el nostre cas és de longitud 1.

Prenent com el nostre espai d'estats l'espai $C([-1,0], \mathbb{R})$ (abreu. C), de les funcions reals continues a l'interval $[-1,0]$, amb la mètrica

$$d(\varphi,\Psi) = \sup \{ | \varphi(\tau) - \Psi(t) | : \tau \quad [-1,0]\},$$

tenim que per cada $\varphi \in C$ existeix una única solució x tal que $x(\tau) = \varphi(\tau)$ per $\tau \in [-1,0]$. Si ara denotem per x_t l'element de C definit per $x_t(\tau) = x(t+\tau)$ per $\tau \in [-1,0]$, i amb $x_t(\varphi)$ fem notar la dependència en el valor inicial φ, resulta que $x_t(\varphi)$ representa una trajectoria a C, és a dir, una aplicació continua de $[0,\infty)$ a C.

Notem que és vàlida la propietat $x_{s+t}(\varphi) = x_s(x_t(\varphi))$, el que ens diu que definint $T(t)\varphi = x_t(\varphi)$, $T(t) : C \to C$ per $t \geq 0$

és un semigrup de transformacions de C amb $T(0) = I$, la identitat.

Resulta que $T(t)\varphi$ és continua en φ i encara més, que si definim l'aplicació

$$T : C \times \mathbb{R}^+ \to C$$
$$(\varphi, t) \to x_t(\varphi) = T(t)\varphi,$$

aquesta és continua i compleix

$$T(t)(T(s)\varphi) = T(t+s)\varphi$$
$$T(0) = I.$$

Tota aplicació T amb aquestes propietats és coneguda com a "semisistema dinàmic". A diferència del cas dels sistemes dinàmics (definits per equacions diferencials ordinaries, per exemple), en que $\mathbb{R}^+$ és sustituit per $\mathbb{R}$, ara no és $T(t,\cdot)$ necessàriament un homeomorfisme i $(T(t))^{-1}$ pot no existir. De fet, resulta del teorema de Arzelà que $T(t)$ és compacte per $t \geq 1$, el que vol dir que envia la bola unitaria de C (que no és compacta), en un conjunt compacte.

Tot aquest comportament es generalitza a d'altres equacions. Considerem les successives generalitzacions:

0) $x'(t) = x(t-1)$

1) $x'(t) = F(x_t)$,

en que $F : C([-r,0],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ és lineal i contínua, i r és un real positiu (per comptes de 1 que hem fet servir abans)

2) $x'(t) = F(x_t)$,

on x pren valors a $\mathbb{R}^n$ i
$F : C([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ és lineal i contínua

3) $x'(t) = F(x_t)$

en que F no és necessàriament lineal i és localment lipschitziana.

En aquest cas podria no existir la solució $x_t(\varphi)$ per tota $t \in \mathbb{R}^+$, però si $F(\varphi)$ és $O(\varphi)$, si que existeix i queda definit igualment un semisistema dinàmic a $C := C([-r,0], \mathbb{R}^n)$.

$$4) \qquad x'(t) = F(t, x_t) \ ,$$

en que F és contínua i localment lipschitziana respecte a la segona variable.

En aquest cas no es té definit un semisistema dinàmic a C, sinò a $C \times \mathbb{R}$ prenent $t' = 1$.

Podria ser que es definís un semisistema dinàmic amb altres tipus d'equacions, per exemple $x'(t) = F(x(t-1), x'(t-1))$, on a F hi entren també les derivades de x. Aquesta darrera equació és del tipus "neutre" i les que hem esmentat abans són del tipus "retardat".

De moment només parlarem del comportament de les més senzilles, les del tipus 2) diguem:

$$x'(t) = F(x_t)$$

amb F lineal i continua.

En el cas anàleg d'equacions diferencials ordinaries $x'(t) = F(x(t)) = Ax(t)$, el que es fa és canviar coordenades de manera que A quedi en forma canònica de Jordan. Resulta que cada bloc de Jordan dóna un subespai invariant i que $\mathbb{R}^n$ és suma directa d'aquests.

A cada un d'aquests subespais el comportament és ben conegut:

$$x(t) = \xi e^{At} \ , \quad \text{on, al ser}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix},$$

es té

$$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

En el nostre cas ens agradaria poguer fer quelcom de semblant, i el que es pot fer és descomposar C en suma directa d'un subespai invariant de dimensió finita, on el comportament de les solucions és com el de les de $x' = Ax$ (amb A en forma canònica), i un subespai de dimensió infinita en que les solucions tendeixen a 0, tant més ràpidament com més gran prenem la dimensió d'A.

De fet podem expressar les solucions com a combinació (infinita) de solucions a subsespais del tipus esmentat, mòdul funcions que tendeixen a zero més depressa que qualsevol exponencial.

Per fer-ho s'ha de repetir el que es fa en equacions diferencials ordinaries en una bona direcció.

Hem de partir, a l'equació $x' = Ax$, no de A sinò de les solucions $x(t,\xi) = \xi\, e^{At} =: T(t)\,\xi$.

Això és un grup uniparamètric de transformacions de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. És fortament continu a $\mathbb{R}$, $T(t)$ és continu per cada t, $\lim_{\tau \to t} |T(t)\,\xi - T(\tau)\xi| = 0$ per tota t i el seu generador infinitessimal, que per cada x és

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\,(T(t)\,x - x)$, és precisament A.

A les equacions com a 2) fem el mateix. Tenim el mateix semigrup $T(t)$ definit com al principi per les solucions, i el seu generador infinitessimal A donat per

$$A\varphi = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} (T(t)\varphi - \varphi).$$

Aquest operador és tancat i té per domini, no tot C, sinò un subespai dens donat per les funcions en que $\varphi(0) = F(\varphi)$. En aquest subespai es té

$$A\varphi(\tau) = \varphi'(t), \quad \tau \in [-r, 0].$$

(Per les propietats dels semigrups de transformacions recomanem el llibre de Hille i Phillips.)

El funcional F admet, d'acord amb la representació de Riesz, la forma

$F(\varphi) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\tau)]\varphi(t)$, en que η és una funció (matricial de $n \times n$) de variació acotada.

Resulta que A té un espectre purament puntual que ve donat per les arrels de

$$\Delta(\lambda) := \det\left(\lambda I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\tau}\, d\eta(\tau)\right) = 0.$$

Si s'estudien aquestes arrels (complexes), es veu que totes tenen part real més petita que cert valor i que, entre dos valors qualsevols, no n'hi ha més que un nombre finit que hi tinguin la part real compresa.

Si λ està a l'espectre $\sigma(A)$ de A i prenem $\bigcup_k N((A-\lambda I)^k) =: M_\lambda$ resulta que M_λ està contingut al domini de A, és invariant sota A i també sota $T(t)$: $T(t)A = AT(t)$ a $D(A)$. I no tan sols això, sinò que cada M_λ és de dimensió finita d_λ.

Si prenem un conjunt finit de valors propis $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ ($\lambda_i \in \sigma(A)$), resulta que

$$C = M_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus M_{\lambda_p} \oplus Q.$$

A cada $M_\lambda =: M$ podem escollir una base $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, presa com a matriu $n \times d$. Si B és la matriu $d \times d$ definida per $A\Phi = \Phi B$ es té que l'únic valor característic de B és λ, i es pot fer, escollint bé B, que tingui forma canònica de Jordan.

Resulta llavors, que si $\varphi = \Phi a \in M$, $T(t)\varphi = \Phi e^{Bt} a$, $t \geq 0$. ($\Phi(\tau) = \Phi(0) e^{B\tau}$).

Aquesta expressió també té sentit i satisfà l'equació per $t<0$. Per tant a les M_λ les solucions són definides per tota $t \in \mathbb{R}$, i són com les de l'equació $x' = Bx$.

Ara bé, Q també és invariant sota $T(t)$ i, el que resulta més interessant és que, si $\sup \mathrm{Re}\{\sigma(A) \setminus \Lambda\} < \gamma$, llavors per a Q,

$$|T(\tau)\varphi| \leq K\, e^{\gamma t} |\varphi|,$$

i si γ és prou petit això tendeix a zero molt depressa.

Amb això tenim doncs ja una bona imatge i, en particular permet esbrinar l'estabilitat de la solució nula. Si $\mathrm{Re}\,\sigma(A) < 0$ es té que és asimptòticament estable i si és ≤ 0, serà estable si els blocs de Jordan dels valors propis amb part real nula són diagonals.

El trobar Φ no és fàcil, en general. Veiem-ne un exemple.

L'equació

$$x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + kx(t-r) = 0$$

té per espectre d'A les arrels de

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + ke^{-r\lambda} = 0.$$

El càlcul d'aquestes arrels diu que tindrem dues arrels simples imaginàries i les demés amb part real negativa per certs valors dels paràmetres a, b i k.

L'equació com a sistema queda

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-r),$$

amb

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\eta(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & u(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & u(\tau) \\ -ku(\tau + r) & -bu(\tau) & -au(\tau) \end{pmatrix},$$

on u(t) és zero per t negativa i un per t positiva.

Si $\pm i\omega$ són les arrels imaginàries, tenim

$$\phi = \begin{pmatrix} e^{i\omega\tau} & e^{-i\omega\tau} \\ i\omega e^{i\omega\tau} & -i\omega e^{-i\omega\tau} \\ -\omega^2 e^{i\omega\tau} & -\omega^2 e^{-i\omega\tau} \end{pmatrix}$$

o bé, considerant tan sols la part real

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & \sin \omega\tau \\ -\omega \sin \omega\tau & \omega \cos \omega\tau \\ -\omega^2 \cos \omega\tau & -\omega^2 \sin \omega\tau \end{pmatrix}$$

i $$B = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenim doncs que a C hi ha un subespai invariant de dimensió dos, en que les solucions són com les d'un oscil.lador harmònic (periòdiques totes del mateix periode $\frac{2\pi}{\omega}$), i totes les demés solucions tendeixen exponencialment a aquestes.

Havent vist doncs el comportament de les solucions de 2), podem preguntar-nos ara què passa si s'hi introdueix un terme depenent de t:

$$x'(t) = F(x_t) + f(t).$$

La fórmula de variació de paràmetres del Halanay en dóna la solució sota la forma

$$x_t = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)\, X_0\, f(s)\, ds,$$

on $T(t)\, X_0$ és la solució de l'equació 2) que té per condició inicial la matriu que val 0 a $[-r,0)$ i I a 0.

Utilitzant aquesta fórmula és fàcil provar que per una equació no lineal

$$x'(t) = F(x_t) = L(x_t) + N(x_t),$$

en que suposem $F(0) = 0$ i L la derivada de Fréchet de F. Si no hi ha valors imaginaris a l'espectre del generador infinitessimal corresponent a la part lineal, resulta que, en un entorn de 0, hi ha varietats invariants en que les trajectòries es comporten com en el cas lineal. De fet, les projeccions sobre M i Q són homeomorfismes i les cotes exponencials segueixen valent:

$|T(t)\varphi| \leq Ke^{\gamma t}|\varphi|$ a la varietat que es projecta a Q, per $t \geq 0$ i

$|T(t)\varphi| \leq Ke^{\gamma t}|\varphi|$ a la varietat que es projecta M, per $t \leq 0$.

Utilitzant la fòrmula de variació de paràmetres es pot ge neralitzar també el mètode de bifurcació, per esbrinar l'existència de solucions periòdiques amb equacions quasi lineals (amb no linealitat afectada d'un paràmetre petit).

Per una altra banda, les equacions del tipus "neutre" també poden definir semisistemes dinàmics. En particular les de la forma $\frac{d}{dt}\, g(x_t) = f(x_t)$.

Per exemple

$$\frac{d}{dt}\,(x(t)-x(t-1)) = 0 \quad \text{n'és un cas.}$$

Notem que pot molt bé ser que una solució d'aquesta equació no sigui derivable. El que si que ho és és $x(t)-x(t-1)$. De vegades aquesta equació s'escriu $x'(t) = x'(t-1)$, encara que pot no tenir sentit en certs punts.

Perquè quedi definit un semisistema dinàmic s'han de restringir f i g convenientment De fet, en el cas lineal, es pot demanar que $g(x_t) = x(t)-M(x_t)$ amb la funció de variació acotada μ que representa al funcional lineal M, que sigui continua a O.

Per poguer tenir una descomposició en subespais invariants demanem també que μ no tingui part singular, és a dir, que

$$M(\varphi) = \int_{-r}^{0} (d\mu)\ \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi(-r_k) + \int_{-r}^{0} a\,\varphi\,,$$

on a, a_k són matrius, $0 < r_k \leq r$, $a \in L_1\,[-r, 0]$ i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és absolutament convergent.

La teoria per aquestes equacions és anàloga a la que hem fet per 2), excepte que hi ha complicacions amb $\sigma(A)$ perquè $T(t)$ no té perquè ser compacte per cap valor de t.

Els interessats poden, per obtenir més informació i bibliografia, consultar el llib de J. Hale: "Functional Differential Equations", publicat per Springer-Verlag, i pel cas neutre la tesi de l'autor a la Universitat Autònoma de Barcelona.