Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

$H^2(G,A)$ Y OBSTRUCCIONES DE EXTENSIONES EN CATEGORIAS ALGEBRAICAS

E.R. Aznar García

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Granada

ABSTRACT. In this paper, we generalize the breatment used by Y.-C. WU in 1978 to prove the results on obstruction theory for groups [5], extending it to the contekt of a "category of interest" introducted by G. Orcech [3].

In §1, we give a definition of two-fold special extension of R by the R-module A in C, we study the functor $\mathrm{Sext}^2(-,A)$ and we get a representative for each equivalence class of two-fold special extensions of $\mathrm{Sext}^2(R,A)$. Also, we stablish that $\mathrm{Sext}^2(R,A)$ corresponds bijectly to the second cohomology group obsolate $H^2(R,A)$ of Barr and Beck.

In §2 we give the definitions of abstract kernel and the obstructions problem on C. We then define the cohomology class associated to an abstract kernelby using the bijection of §1. Finally we prove the classical results of the obstruction theory on C.

(A M S Subjet Classification, (1980). 18 H 15-20-25-30-35.

§1 Siguiendo a Orcech [3] consideraremos una categoria de Ω-grupos con solo operadores de orden cero, uno ó dos, o sea $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, donde se verifica:

i) Para todo a, b, c de A, objeto de C, si $*$ es una operacion de orden 2 distinta de la suma, $+$, entonces $a*(b+c) = a*b + a*c$

ii) Si ω es una operacion de orden uno distinta de la eleccion de inverso, entonces $\omega(a*b) = \omega(a)*b$

iii) $a+(b*c) = (b*c)+a$

vi) Para cada par ordenado $(.,*)$ de operaciones de orden 2 existe una palabra w tal que $(x_1.x_2)*x_3 = w(x_1(x_2x_3), x_1(x_3x_2), \ldots, (x_3x_1)x_2)$ donde la yuxtaposicion representa una operacion de orden 2 distinta de suma.

Las definiciones de R-estructura, R-módulo, centro, y centralizador asi como toda la terminologia que usaremos sera la de Orzech.

(1.1) <u>Definicion</u>. Una 2-sucesion especial de R por el R-módulo A es uan sucesion exacta $A \rightarrowtail X \longrightarrow E \twoheadrightarrow R$, de E-estructurasdonde las acciones de X sobre si mismo obtenidas mediante el morfismo de cambio de estructura $X \longrightarrow E$ coincide con la conjugacion.

Se dice que dos 2-sucesiones especiales de R por A son elementalmente equivalentes si existen f y g tales que:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dash] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, dash] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r, dash] \arrow[d, "g"] & R \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, dash] & X' \arrow[r, dash] & E' \arrow[r, dash] & R \end{tikzcd} \qquad (1)$$

denotaremos por $\mathrm{Sext}^2(R,A)$ el conjunto cociente de 2-extensiones especiales de R por A para la relacion de equivalencia generada por la relacion anterior.

(1.2) <u>Proposicion</u>. Si $F \twoheadrightarrow R$ es una presentacion libre fija de R, entonces en cada clase de equivalencia de $\mathrm{Sext}^2(R,A)$ existe un unico representante de la forma $A \rightarrowtail X' \longrightarrow F \twoheadrightarrow R$.

<u>Esquema de la demostracion</u>. Dado un representante de una clase E, se construye el diagrama

$$\begin{tikzcd} E': & A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"] & R \arrow[d, equal] \\ E\ : & A \arrow[r, tail] & X \arrow[r] & E \arrow[r, two heads] & R \end{tikzcd}$$

La existencia de f es consecuencia de que F es un objeto libre. La comprobacion de que E' es una 2- sucesion especial es inmediata.

Es facil comprobar que $\mathrm{Sext}^2(R,A)$ se comporta funtorialmente respecto a la primera variable:

(1.3) <u>Lema</u>. Dada $(E) = (A \rightarrowtail X \longrightarrow E \twoheadrightarrow M)$ perteneciente a $\mathrm{Sext}^2(M,A)$ y un morfismo $\rho : R \longrightarrow M$, se define E como la fila superior del diagrama

$$\begin{tikzcd} E^{\rho}\ : & A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "L"] & E^{\rho} \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & R \arrow[d, "\rho"] \\ E\ : & A \arrow[r, tail] & X \arrow[r] & E \arrow[r, two heads] & M \end{tikzcd}$$

L

Entonces E es una 2-sucesion especial, o sea, define un elemento de $\mathrm{Sext}^2(R,A)$.

<u>Demostracion</u> Rutinaria.

Dada ahora la presentacion fija libre $L \rightarrowtail F \xrightarrow{\sigma} \!\!\!\!\twoheadrightarrow R$ de R, se tiene asociado al epimorfismo $F \xrightarrow{\sigma} \!\!\!\!\twoheadrightarrow R$ usando el funtor $\mathrm{Der}(-,A)$, por procedimientos standard de álgebra homologica obtenemos la sucesion exacta larga $\mathrm{Der}(R,A) \rightarrowtail \mathrm{Der}(F,A) \longrightarrow H^0(F \xrightarrow{\sigma} R, A) \longrightarrow H^1(R,A) \longrightarrow$

$$H^1(F,A) \longrightarrow H^1(F \xrightarrow{\sigma} R, A) \longrightarrow H^2(R,A) \longrightarrow \dots$$

ahora por ser F libre se tiene que $H^1(F,A) = H^2(F, A) = 0$, podemos ahora demostrar el siguiente:

(1.4) <u>Teorema</u>. $\mathrm{Sext}^2(R,A)$ es isomorfo a $H^2(R,A)$

<u>Esquema de la demostracion</u>. De las notas anteriores se obtiene $H^2(R,A) = H^1(F \xrightarrow{\sigma} R, A)$, y como este ultimo grupo de cohomomogia clasifica sucesiones exactas cortas de F-estructuras de $L = \mathrm{Ker}\,\sigma$ por A $A \rightarrowtail X \twoheadrightarrow L$ tales que la accion de X sobre si mismo dada por el morfismo cambio de estructura $X \twoheadrightarrow L \rightarrowtail F$ coincide con la de conjugacion se obtiene que $H^1(F \xrightarrow{\sigma} R, A)$ y por tanto tambien $H^2(R,A)$ clasifica 2-sucesiones especiales de la forma $A \rightarrowtail X \longrightarrow F \twoheadrightarrow R$

§2. Siguiendo a Orcech, dada una sucesion exacta corta $A \rightarrowtail T \twoheadrightarrow R$ se obtiene una sucesion exacta de cuatro terminos asociada

$$ZA \rightarrowtail A \longrightarrow E \twoheadrightarrow M$$

donde ZA es el centro de A, E es igual a $T / Z(T,A)$, M es igual a $T/(A+Z(T,A)$ y $Z(T,A)$ es el centralizador de A en T. Verificandose ademas que el diagrama

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & T \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & R \arrow[d, two heads] \\ ZA \arrow[r, tail] & A \arrow[r] & E \arrow[r, two heads] & M \end{tikzcd} \qquad \text{conmuta}$$

donde las flechas verticales son las obvias.

(2.1) <u>Lema</u>. La sucesion $ZA \rightarrowtail A \longrightarrow E \twoheadrightarrow M$ asociada a una s. e. c. es una 2-sucesion especial.

Se define un nucleo abstracto de R por A como una 2-sucesion especial $ZA \rightarrowtail A \longrightarrow E \twoheadrightarrow M$ y un epimorfismo sobre $\rho\ R \twoheadrightarrow M$, donde ZA es le centro de A y entenderemos por problema de la obstruccion en $\underline{C}$, en dado un nucleo abstracto fijo si existe una sucesion exacta corta $A \rightarrowtail T \twoheadrightarrow R$ tal que (1) conmuta.

Definiremos ahora una aplicación obstrucción

$$\text{Obs: Nucleos Abstractos} \longrightarrow H^2(R,A)$$

por la fila superios del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E^{\rho}: ZA \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^{\rho} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\sigma"] & R \arrow[d, "\rho"] \\
E\ : ZA \arrow[r, tail] & A \arrow[r] & E \arrow[r, two heads] & M
\end{tikzcd}$$

debido al teorema (1.4) la clase de E define un elemento en $H^2(R,A)$ que llaremos la clase de cohomologia asociada al nucleo abstracto inicial.

Se pueden demostrar ahora de una forma totalmente paralela a la de Wu para grupos [5] los siguientes:

(2.2) Teorema .- Un núcleo abstracto esta asociado con una extensión si y solo si su clase de obstracción es cero.

(2.3) Teorema.- Si la clase de obstrucción de un nucleo abstracto es cero entonces el conjunto de clases de equivalencia de s.e.c. asociadas al núcleo abstracto está en correspondencia biunivoca con $H^1(R,ZA)$.

BIBLIOGRAFIA

(1) M.Barr-J. Beck, Homology and standard constructions, L.N.Math. 80 Springer 1969.

(2) P.J. Hilton, U. Stambach, A course in homological Algebra, Springer 1970.

(3) G. Orcech, Obstruction theory in algebraic categories I, J.Pure and App Alg. 2 (1972), pag 287-314.

(4) G.S. Rinehart, Satellites and cohomology, J. Alg. 12 (1969)

(5) Y.C. Wu, $H^3(G,A)$ and obstructions of group extensions, J.P. and App. Alg. 12 (1978) 93-100.

(6) R.-Grandjean A. Homologia en categorias exactas, Alx. 4 Santiago (1970).