Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

# PRESENTACION DE LA GEOMETRIA AFIN EN EL BACHILLERATO

M. Paz Bujanda Jauregui, Laura Molleda Sánchez

Universidad Complutense de Madrid
I.N.E.M. de San Fernando de Henares (Madrid)

A lo largo de la Enseñanza Básica, se trata de proporcionar a los alumnos una idea experimental del concepto de vector libre del plano. En el 2º curso de Bachillerato, los cuestionarios presentan el tema de la Geometría afín. Se observa con frecuencia una falta de continuidad en el tratamiento del mismo tema en los dos niveles. El objeto de este trabajo, es una elaboración del tema, que tiene en cuenta los conocimientos anteriores del alumno.

## El grupo de las traslaciones del plano

-Las traslaciones, como producto de simetrías con respecto a ejes paralelos.- Determinación de una traslación:

Vector de traslación.

-Composición de traslaciones. Teorema reducido de Desargues.

-El grupo de las traslaciones del plano.

-Relación de equivalencia en el conjunto S de los vectores del plano. Conjunto cociente: los vectores libres.

-El grupo V de los vectores libres del plano.

-Representación gráfica del conjunto V.

-Factorización de una traslación sobre un sistema de referencia graduado ortogonal.

## Introducción de coordenadas

En lo que sigue, se adopta un sistema de referencia graduado ortogonal. $(0;u_1,u_2)$. Consideramos los siguientes conjuntos biyectivos

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "e"] \arrow[d, "c"'] & P \arrow[dl, dashed, leftrightarrow] \\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

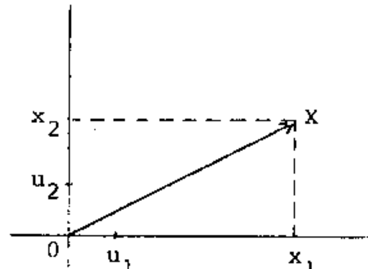


fig.1

siendo V = {vectores del plano con origen en 0}; P = { puntos de plano }.

$\forall\ \vec{0X} \in V,\ e(\vec{0X}) = X$. Evidentemente e es una biyección.
$\forall\ \vec{0X} \in V,\ c(\vec{0X}) = (x_1,x_2)$, siendo $\vec{0X} = (\vec{0X}_1,\ \vec{0X}_2)$. $x_1,x_2$ los números reales asociados a $\vec{0X}_1$ y $\vec{0X}_2$, respectivamente.

Definición 1. Dado $X \in P$, $c\ e^{-1}(X) = (x_1,x_2)$. Se dice que $(x_1,x_2)$ son las coordenadas de P en el sistema de referencia $(0;u_1,u_2)$.

La recta sobre la que yace el vector $OU_1$, se llama eje de abscisas; $OU_2$, es el eje de ordenadas.

Traducción en términos de coordenadas de la composición de traslaciones

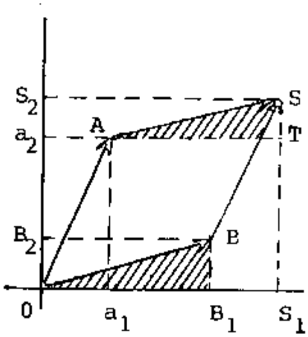


fig.2

$$\widehat{OBB_1} = \widehat{ATS} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = a_1 + b_1. \\ s_2 = a_2 + b_2. \end{cases}$$

Esto es, el vector de traslación compuesta de dos traslaciones, tiene como coordenadas la suma de las coordenadas de las traslaciones factores.

$\underline{\text{Nota}}$. Sea una traslación $\vec{OA} = (a_1, a_2)$. El resultado de componer $\vec{OA}$ consigo misma un número entero k de veces, es otra traslación, definida por un vector que denotaremos $K\,\vec{OA}$, que yace sobre la recta $\vec{OA}$ y se tiene:

$K.\vec{OA} = (Ka_1, Ka_2)$.

Producto de una traslación por un número real.

Generalizando la observación hecha en la nota anterior, se define sobre el conjunto T de las traslaciones, una operación externa, por los elementos de $\mathbb{R}$.

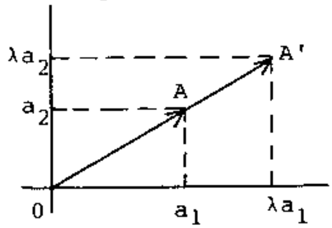

fig.3

$\mathbb{R} \times T \longrightarrow T$.

$(\lambda, \vec{OA}) \longmapsto \lambda\vec{OA} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$

$\lambda\vec{OA} = \vec{OA}' = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ está sobre la recta OA, como puede verificarse por el teorema de Thales.

- El conjunto T, con las operaciones de composiciones de composición interna y producto por un número real, tiene estructura de espacio vectorial. Puesto que T y V, son biyectivos, puede trasladarse a V, mediante la biyección, la estructura de espacio vectorial de T. Entonces, nos referimos a V, como el espacio vectorial de los vectores libres del plano.

Rectas vectoriales y rectas afines.

Definición 2. Una recta vectorial es el conjunto de vectores que yacen sobre una recta.

Proposición 1. $\vec{OP}$ pertenece a la misma recta vectorial que $\vec{OD}$, si y solamente si, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{OP} = \lambda\vec{OD}$.

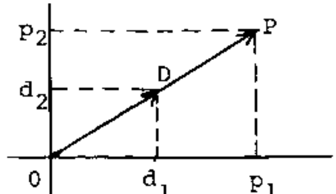

fig.4

$\widehat{ODd_1}$ y $\widehat{OPp_1}$ son triángulos en posición de Thales. Luego.

$$\frac{OP}{OD} = \frac{OP_1}{OD_1} = \frac{OP_2}{OD_2} = \lambda \Rightarrow \vec{OP} = \lambda\,\vec{OD}.$$

Cualquier vector no nulo de una recta vectorial, puede generarla. Se dice que un tal vector, es un vector director de la recta.

## Ecuaciones de una recta vectorial

Sea la recta vectorial r generada por $\vec{OP}$; $\vec{OX} \in r \Leftrightarrow$

$$\vec{OX} = \lambda\vec{OP} \Leftrightarrow (x,y) = \lambda(d_1,d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda d_1 \\ y = \lambda d_2. \end{cases}$$

Definición 3 Una recta afín es el conjunto de vectores del plano cuyo extremo se apoya en una recta.

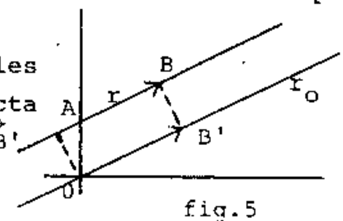

fig.5

En particular las rectas vectoriales son también rectas adines. Sea r una recta afín (fig.5) $\vec{AB}$ es equipolente a $\vec{OB'}$. $\vec{OB'}$ genera una recta vectorial, $r_o$.

Proposición 2. Sea r una recta afín; $\vec{OA} \in \varepsilon r$. Entonces se verifica que cualquier vector $\vec{OX} \in \varepsilon r$, es la imagen en la traslación $\vec{OA}$ de un vector de $r_o$.
$r_o$ es la recta de dirección r. Cualquier vector no nulo de $r_o$, es un vector de dirección de r.

## Ecuaciones de una recta afín.

Sea r una recta afín de vector de dirección $\vec{OD} = (d_1,d_2)$ y tal que $\vec{OA} = (a_1,a_2) \in r$. Sea $\vec{OX} \in r$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{OX} &= \vec{OA} + \vec{OX'} \\ \vec{OX'} &= \lambda\,\vec{OD} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{OX} = \vec{OA} + \lambda\,\vec{OD}.$$

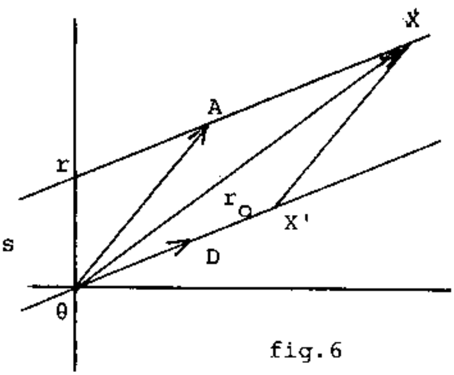

fig.6

Sustituyendo cada vector por sus coordenadas, se tiene:

$$(x,y) = (a_1,a_2) + \lambda(d_1,d_2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1. \\ y = a_2 + \lambda d_2. \end{cases} \qquad \text{Ecuaciones paramétricas de r.}$$