Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE CIERTAS ESTRUCTURAS POLINOMICAS

J. Martínez, P.M. Gadea

Dpto. de Algebra y Geometría
Universidad de Valladolid
Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, C.S.I.C.

Abstract.- We give the definition and first propieties of a geometric structure defined on a C^∞ manifold M^n by a tensor field J of type $(1,1)$ satisfying the condition $(J^2-p^2)(J^2+q^2)=0$, p and q being nowhere zero C^∞ functions on M^n.

PROPOSICION 1. Sea M^n una variedad C^∞ paracompacta de dimensión n; para que exista sobre M^n un campo tensorial J de tipo $(1,1)$ que verifique las condiciones a) y b) siguientes:

a) $(J^2-p^2)(J^2+q^2) = 0$;

b) J tiene polinomio característico $(x-p)^{r_1}(x+p)^{r_2}(x^2+q^2)^s$ donde p,q son funciones C^∞ sobre M^n, que no se anulan en punto alguno, y r_1, r_2, s son constantes tales que $r_1+r_2+2s=n$;

es condición necesaria y suficiente que el fibrado tangente de M^n admita una reducción de grupo estructural al producto diagonal

$$Gl(r_1,\mathbb{R}) \times Gl(r_2,\mathbb{R}) \times Gl(s,\mathbb{C})$$

donde $Gl(s,\mathbb{C})$ denota la representación real del grupo lineal complejo de orden s.

La prueba se obtiene a partir de la consideración de dos operadores de proyección complementarios:

$$m = \frac{1}{p^2+q^2}\,(-J^2+p^2I) \quad y \quad l = \frac{1}{p^2+q^2}\,(J^2+q^2I)$$

l y m verifican $J^2l = p^2l$, y $J^2m = -q^2m$, y de ahí se llega al grupo estructural indicado. Notemos que en la obtención del grupo no influye el hecho de que p y q sean funciones. Basta elegir convenientemente las referencias adaptadas. Por otra parte, queda de relieve la diferencia con el caso $\Psi(4,\pm 2)$ [1] pues en este caso aparece el producto diagonal de un grupo de estructura casi compleja (ó casi producto) con un grupo de estructura casi tangente y mientras que en nuestro caso -aparte de ser los coeficientes variables- aparecen los grupos de estructuras casi producto y casi compleja.

PROPOSICION 2. Dada una variedad diferenciable M^n y un campo tensorial del tipo de la proposición anterior, existe una métrica de Riemann definida positiva g tal que:

a) g hace ortogonal dos a dos las distribuciones L_1, L_2 y M correspondientes a los factores del grupo estructural de la Proposición anterior;

b) $g(JX,JY) = p^2 g(X,Y), \qquad X,Y \in L = L_1 \oplus L_2$

c) $g(JX,JY) = q^2 g(X,Y), \qquad X,Y \in M$

La prueba utiliza tres métricas sucesivas; en primer lugar, una de Riemann definida positiva cualquiera h. Otra $\overline{g}$ definida por

$$\overline{g}(X,Y) = h(X,Y) + \frac{1}{p^2q^2}\, h(J^2X, J^2Y)$$

y finalmente la métrica

$$g(X,Y) = \overline{g}(X,Y) + \frac{1}{p^2}\, \overline{g}(J_1X, J_1Y) + \frac{1}{q^2}\, \overline{g}(J_mX, J_mY)$$

que cumple los resultados del teorema

Nota.- Puede mejorarse el resultado de la Proposición 1, usando una métrica del tipo de la Proposición 2, de modo que el grupo estructural se reduzca a

$$O(r_1) \times O(r_2) \times U(s)$$

donde U(s) denota la representación real del grupo unitario de orden s.

Para ello se consideran como referencias adaptadas aquellas tales que los tensores g y J toman la forma

$$g = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{r_1} & 0 & & 0 \\ 0 & I_{r_2} & & \\ \hline & & I_s & 0 \\ & 0 & 0 & I_s \end{array}\right) \qquad J = \left(\begin{array}{cc|cc} pI_{r_1} & 0 & & 0 \\ 0 & -pI_{r_2} & & \\ \hline & & 0 & -qI_s \\ & 0 & qI_s & 0 \end{array}\right)$$

llegando por intersección de los grupos de invariancia de g y J, al grupo estructural antes indicado.

COROLARIO 1. Sea M^n una variedad diferenciable de dimensión 4, que admite un campo tensorial J de tipo (1,1) verificando las condiciones de las proposiciones anteriores. Entonces existen distribuciones complementarias L_1, L_2 y M de dimensiones respectivas 1,1 y 2 y una métrica de Lorentz $\hat{g}$ que satisface las mismas condiciones que la métrica de la proposición 2.

La demostración es inmediata a partir del caso particular n=4 de las proposiciones 1 y 2 y del hecho de que dada una métrica de Riemann definida positiva sobre una variedad, puede obtenerse una métrica de Lorentz $\hat{g}$ cuando la variedad admite una distribución unidimensional, mediante la expresión:

$$\hat{g}(Y,Z)=g(Y,Z) - 2\,\frac{g(X,Y)\ g(X,Z)}{g(X,X)}$$

donde X es cualquier representante local de la distribución, que en nuestro caso existe claramente.

Un ejemplo importante de un campo tensorial J que cumple el Corolario 1 es el campo electromagnético de 1ª clase, es decir con 2º invariante de Lorentz nunca nulo [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] K. Yano, C. Houh and B. Chen: Structures defined by a tensor field φ of type (1,1) satisfying $\varphi^4 \pm \varphi^2 = 0$. Tensor, N.S. 23 (1972), 81-87.

[2] R.S. Mishra: Structures in electromagnetic tensor fields Tensor, N.S. 30 (1976) 145-156.