Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

BLOQUES DE BRAUER NILPOTENTES Y SUS ALGEBRAS ASOCIADAS

Lluís Puig Carreras

C.N.R.S., Université de Paris VII

Abstract: In "A Frobenius theorem for blocks", Inventiones Math., 56, M. Broué and the author introduce the so called nilpotent blocks and determine its structure, namely the generalized decomposition numbers. Here we recall some of these results and announce the following one: the direct factor of the group algebra associated with a nilpotent block is isomorphic to the $(n \times n)$-matrix algebra over the defect group algebra, for a suitable n .

Sea G un grupo finito, K un cuerpo de característica cero conteniendo las raices card(G)-ésimas de la unidad y k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p no nula. Designemos por KG y kG las respectivas álgebras de grupo y escojamos sendos sistemas de representantes X_G , Y_G de las clases de isomorfismo de KG- , kG-módulos simples. Como es bien sabido, el radical de Jacobson de KG es nulo y

$$KG \cong \prod_{M \in X_G} \mathrm{End}_K(M) \quad , \quad kG/\mathrm{Rad}(kG) \cong \prod_{N \in Y_G} \mathrm{End}_k(N) \quad .$$

Por contra, si p divide card(G) (lo que supondremos de ahora en adelante) el radical de kG no es nulo y vamos a recordar brevemente las nociones introducidas por R.Brauer para el estudio de kG .

Precisaremos las notaciones a medida que aparezcan. Para abreviar, si A es un álgebra asociativa y unitaria, llamaremos punto de A a cada clase de conjugación, según el grupo A^* de inversibles de A , de idempotentes primitivos de A ; designaremos por $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de puntos de A .

§1 Bloques

Designemos por ZkG el centro de kG ; con notaciones evidentes, $kG \cong \prod_{\alpha \in \mathcal{P}(ZkG)} kG.\alpha$ y ésta es la descomposición más fina de kG en producto directo de k-álgebras; en particular, $kG.\alpha/\mathrm{Rad}(kG.\alpha) \cong \prod_{N \in Y_\alpha} \mathrm{End}_k(N)$

donde $Y_\alpha = \{N \in Y_G \mid \alpha . N = N\}$; además, si M es un kG-módulo, tenemos $M \cong \prod_{\alpha \in \mathcal{P}(ZkG)} \alpha . M$. Es decir, basta estudiar cada factor $kG.\alpha$ por separado. Adaptando la definición de R.Brauer en (2) a nuestras notaciones, llamaremos bloque de G a cada punto de ZkG .

Sea O un anillo completo de valuación discreta cuyo cuerpo residual sea k y cuyo cuerpo de fracciones sea de característica cero y contenga las raices card(G)-ésimas de la unidad; de ahora en adelante, escogemos K igual al cuerpo de fracciones de O . Recordemos que, si $\hat{A}$ es una O-álgebra asociativa y unitaria, libre y de rango finito como O-módulo, el morfismo canónico de $\hat{A}$ en $k \otimes_O \hat{A}$ induce una biyección entre $\mathcal{P}(\hat{A})$ y $\mathcal{P}(k \otimes_O \hat{A})$. Como $k \otimes_O ZOG \cong ZkG$, cada bloque α de G proviene de un punto $\hat{\alpha}$ de ZOG y $k \otimes_O OG.\hat{\alpha} \cong kG.\alpha$, $KG.\hat{\alpha} \cong \prod_{M \in X_\alpha} \mathrm{End}_k(M)$

donde $X_\alpha = \{M \in X_G \mid \hat{\alpha}.M = M\}$; en particular, $\dim_k(ZkG.\alpha) = \mathrm{card}(X_\alpha)$ y en los resultados que recordaremos aquí, nos limitaremos casi exclusivamente a dar el valor de $\mathrm{card}(X_\alpha)$.

§2 Grupos de defecto

Consideremos una k-álgebra A asociativa, unitaria y de dimensión finita, junto con un morfismo de G en A^* : diremos simplemente que A es una kG-álgebra interior; indicaremos por $x.a$ y $a.x$ los productos de $a \in A$ por la imagen de $x \in G$. Si H es un subgrupo de G , designaremos por A^H la subálgebra formada por los elementos de A que conmutan con los de la imagen de H ; si L es un subgrupo de H , designaremos por A_L^H al ideal bilátero de A^H formado por las sumas $\sum_x x.a.x^{-1}$ donde $a \in A^L$ y donde sumamos sobre un sistema de representantes en H de H/L ; enfín, consideraremos el álgebra $A(H) = A^H / \sum_{L \subsetneq H} A_L^H$ y designaremos por Br_H el morfismo canónico de A^H en $A(H)$; es fácil ver que cuando H no es un p-grupo (es decir, si card(H) no es una potencia de p) se tiene $A(H) = \{0\}$.

En (7) J.Green demuestra que para cada punto α de A^G el conjunto de subgrupos minimales P de G tales que $\alpha \subset A_P^G$ es una clase de conjugación de p-subgrupos de G . Llamaremos grupo de defecto de α a cada uno de estos p-subgrupos.

Supongamos que $A = kG$ con el morfismo evidente. Entonces, $A^G = ZkG$ y α es un bloque de G ; además, si P es un p-subgrupo de G , es fácil ver que $A(P) \cong kC_G(P)$ (donde $C_G(P)$ designa el centralizador de P en G); en particular, como $ZkG \subset A^P$, Br_P induce un morfismo de ZkG en $ZkC_G(P)$ y P es un grupo de defecto de α si y solo si P es maximal tal que $Br_P(\alpha) \neq \{0\}$.

§3 Defecto cíclico

Sea α un bloque de G y P un grupo de defecto de α . En (2) R.Brauer demuestra que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes

(i) $card(P) = 1$

(ii) $Rad(kG.\alpha) = \{0\}$ y $card(Y_\alpha) = 1$

(iii) $card(X_\alpha) = 1$

y en (4), conjuntamente con W.Feit, muestra que siempre $card(X_\alpha) \leq card(P)^2$ Ello le sugiere que P mide, en un cierto sentido, la complicación del álgebra $kG.\alpha$. Hasta fecha reciente, solo estructuras muy simples de P han sido consideradas.

En (6) E.Dade estudia el caso en que P es cíclico; recordemos uno de sus resultados. Sea ρ un bloque de $C_G(P)$ que interviene en la descomposición de $Br_P(\alpha)$ (es decir, por definición, $\alpha = \{i\}$ y $\rho = \{j\}$ y suponemos que $jBr_P(i) = j$) y designemos por E el subgrupo de $N_G(P)/P.C_G(P)$ que estabiliza ρ (donde $N_G(P)$ es el normalizador de P que naturalmente, normaliza $C_G(P)$ y opera en $ZkC_G(P)$). Entonces, p no divide $card(E)$ y por lo tanto, si P es cíclico, $card(E)$ divide $p-1$. E.Dade demuestra que si P es cíclico,

$$card(Y_\alpha) = card(E) \quad \text{y} \quad card(X_\alpha) = card(E) + \frac{card(P) - 1}{card(E)} .$$

§4 Grupos punteados

En (1) M.Broué junto con J.Alperin consideran sistematicamente las parejas (Q,σ) formadas por un p-subgrupo Q de G y un bloque σ de $C_G(Q)$, estructurandoles con una noción de inclusión. Aqui describiremos la estructura algo mas fina introducida por el autor en (8).

Consideremos de nuevo una kG-álgebra interior A (ver §2). Llamamos grupo punteado (relativo a A) a toda pareja H_β formada por un subgrupo H de G y un punto β de A^H , y decimos que H_β es local si H es el grupo de defecto de β en H (o, de un modo equivalente, si $Br_H(\beta) \neq \{0\}$). Si H_β y $H'_{\beta'}$ son dos grupos punteados, decimos que H_β está contenido en $H'_{\beta'}$ cuando $H \subset H'$ y para cada $j' \in \beta'$ existe $j \in \beta$ tal que $jAj \subset j'Aj'$.

En (8) demostramos que si α es un punto de A^G , un grupo punteado local P_γ contenido en G_α es maximal si y solo si P es un grupo de defecto de α , y en tal caso, todo grupo punteado local contenido en G_α tiene un conjugado por G contenido en P_γ . Como se ve, este resultado afina el teorema de J. Green citado en §2 y puede interpretarse como un "teorema de Sylow" para grupos punteados.

Sea H_β un grupo punteado y escojamos $j \in \beta$; la aplicación de H en el álgebra jAj que envía x en $x.j$ es un morfismo, y designamos por A_β la kH-álgebra interior así definida; claramente, la elección de j no influye en la clase de isomorfismo de A_β (en tanto que kH-álgebra interior). A partir de A_β (o de cualquier kH-álgebra interior) podemos construir una nueva kG-álgebra interior, que designamos por $\mathrm{Ind}_H^G(A_\beta)$, dotando $kG \underset{kH}{\otimes} A_\beta \underset{kH}{\otimes} kG$ del producto distributivo definido por

$$(x \otimes a \otimes y)(x' \otimes a' \otimes y') = \begin{cases} 0 & \text{si } yx' \notin H \\ x \otimes a.yx'.a' \otimes y' & \text{si } yx' \in H \end{cases}$$

y de la aplicación desde G que envía x en $\sum_y xy \otimes j \otimes y^{-1}$ donde sumamos sobre un sistema de representantes en G de G/H .

En (8) demostramos que si α es un punto de A^G y P_γ un grupo punteado local maximal tal que $P_\gamma \subset G_\alpha$, existe un punto α' de $(\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma))^G$ tal que $A_\alpha \cong (\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma))_{\alpha'}$, en tanto que kG-álgebras interiores. En particular, las categorías de A_α- y de A_γ-módulos son equivalentes.

§5 Bloques nilpotentes

De ahora en adelante, suponemos que $A = kG$ con el morfismo evidente. Sea α un punto de A^G , es decir, un bloque de G , y P_γ un grupo punteado local maximal tal que $P_\gamma \subset G_\alpha$. Entonces $A_\alpha = kG.\alpha$ y gracias al resultado precedente, el estudio de $kG.\alpha$ puede hacerse facilmente a partir de la kP-álgebra interior A_γ .

Con M. Broué, decimos que α es un bloque nilpotente cuando para cada grupo punteado local Q_δ contenido en G_α , $N_G(Q_\delta)/C_G(Q)$ es un p-grupo. Hagamos hincapié en que, a diferencia de los casos considerados precedentemente, esta definición no comporta ninguna restricción sobre la estructura de P . Sin embargo, si P es abeliano, α es nilpotente si y solo si $N_G(P_\gamma) = C_G(P)$, y esta situación había sido estudiada por R. Brauer en (3). Simplificando, conjuntamente con M. Broué, demostramos en (5) que si α es nilpotente, entonces $\mathrm{card}(Y_\alpha) = 1$, $ZkG.\alpha \cong ZkP$ y $KG.\hat{\alpha}$ es isomorfo al álgebra de matrices de un cierto rango, a coeficientes en KP .

Ello parecía indicar que si α es nilpotente, $kG.\alpha$ es isomorfo al álgebra de matrices de un cierto rango, a coeficientes en kP. Recientemente, el autor ha demostrado que así es, determinando la estructura de la kP–álgebra interior A_γ. Para describirla, hagamos remarcar que, por definición, decir que N es un kP–módulo es equivalente a decir que $\mathrm{End}_k(N)$ es una kP–álgebra interior, y que dadas dos kP–álgebras interiores B y B' se define de un modo evidente la kP–álgebra interior $B \underset{k}{\otimes} B'$. Terminamos enunciando nuestro resultado:

Teorema. Con las notaciones precedentes, α es un bloque nilpotente si y solo si existe un kP–módulo N tal que $A_\gamma \cong \mathrm{End}_k(N) \underset{k}{\otimes} kP$ en tanto que kP–álgebras interiores.

BIBLIOGRAFIA

(1) J.ALPERIN y M.BROUE — Local methods in block theory, Ann. of Math. 110(1979), 143–157

(2) R.BRAUER — Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung (I) Math. Z., 63(1956), 406–444; (II) Math. Z., 72(1959), 25–46

(3) R.BRAUER — Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups IV, J. of Algebra, 17(1971), 489–521

(4) R.BRAUER y W.FEIT — On the number of irreducible characters of finite groups in a given block, Proc. Nat. Acad. Sci., 45(1959), 361–365

(5) M.BROUE y L.PUIG — A Frobenius theorem for blocks, Inventiones Math., 56(1980), 117–128

(6) E.DADE — Blocks with cyclic defect groups, Ann. of Math., 84(1966), 20–48

(7) J.GREEN — Some remarks on defect groups, Math. Z., 107(1968) 133–150

(8) L.PUIG — Pointed groups and construction of characters, (presentado para publicación)