Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE ALGEBRAS DE NASH

Jesús Ma Ruiz Sancho

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad Complutense de Madrid

(32B05 A.M.S. Subject Classification) We obtain some results (a Nullstellensatz, a specialization theorem, 'à la E. Artin') for Nash algebras with an algebraic method based on M. Artin theorem (and easily generalizable to the analytic case) simplifying notably known proofs.

El teorema de los ceros para gérmenes de Nash sobre $\mathbb{R}$ se puede obtener como una consecuencia del teorema homónimo para funciones de Nash en un abierto de $\mathbb{R}^n$ [Bochnak; Efroymson, 1978]; asimismo el teorema es válido para gérmenes analíticos reales [Risler, 1976]. Estos resultados han sido demostrados utilizando de modo esencial la geometría de $\mathbb{R}^n$ aún cuando admiten una formulación estrictamente algebraica. Lo mismo ocurre con otros problemas de geometría real y en particular nos referimos a un teorema de especialización 'à la E. Artin' [Risler, 1976] y a la solución del problema 17 de Hilbert (enunciado en [Mostowski, 1976] pero no correctamente probado hasta [Bochnak, 1978]; véase también [Efroymson, 1974] aunque las demostraciones de esta nota sólo fueron completadas en [Bochnak, Efroymson, 1978]).

Los resultados mencionados se pueden establecer también para series formales (el teorema de los ceros y la solución del problema 17 de Hilbert se deben a [Merrien, 1973], el teorema de especialización 'à la E. Artin' a [Lasalle, 1975]; véase además [Robbin, 1979]) pero en este caso las demostraciones difieren, pues son fundamentalmente de carácter algebraico.

En resumen, hay ciertos resultados importantes que se verifican en cualquiera de los anillos $\mathcal{N}_n$, $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{F}_n$, de series de Nash, analíticas y formales. pero cuyas demostraciones conocidas exigen métodos distintos en cada caso:

trata entonces de describir técnicas unificadoras que permitirán en particular la obtención de nuevos resultados para álgebras de Nash.

1. Consideraremos el caso de los anillos $\mathcal{N}_n$, $\mathcal{F}_n$ sobre un cuerpo de característica cero, eludiendo la tradicional restricción a cuerpos valorados completos de característica cero (véase por ejemplo [Lazzeri, Tognoli, 1970]), mediante la siguiente:

   (1.1) Definición. Sea k un cuerpo de característica cero. Una serie de Nash sobre k es una serie formal algebraica sobre el anillo de polinomios.

   En este contexto es necesario demostrar el

   (1.2) Teorema de división de Weierstrass. Sea $\Phi \in \mathcal{N}_n$ regular de orden p en x_n. Para cada $f \in \mathcal{N}_n$ existen $Q \in \mathcal{N}_n$, $R \in \mathcal{N}_{n-1}[x_n]$ con grado de $R < p$, tales que $f = Q\Phi + R$. Estas condiciones determinan Q y R de modo único. Además, si Φ es un polinomio distinguido en x_n y si $f \in \mathcal{N}_{n-1}[x_n]$, Q y R están en $\mathcal{N}_{n-1}[x_n]$.

(donde las definiciones omitidas son las usuales, véase por ejemplo [Tougeron, 1972]). Nuestra prueba de este resultado sigue técnicas habituales, que sin embargo han debido adaptarse a este marco, pues la demostración de [Lazzeri, Tognoli, 1970] no se aplica, por ejemplo, a un cuerpo con la valoración trivial, ni al mismo $\mathbb{Q}$, en el que no existen valores absolutos completos no triviales.

Disponiendo de (1.2) es posible reproducir los argumentos dados en $\mathcal{O}_n$ y $\mathcal{F}_n$ y obtener el

(1.3) Teorema de aproximación de M. Artin. Sea k un cuerpo de característica cero y $k\langle x,y\rangle$ el anillo de series de Nash en $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_p)$. Sean $f_1(x,y),\dots,f_q(x,y) \in k\langle x,y\rangle$ con $f_1(0,0) = \dots = f_q(x,y) = 0$. Sean $y_1(x),\dots,y_p(x) \in k[[x]]$ una solución formal del sistema $f_1(x,y) = \dots = f_q(x,y) = 0$. y sea $\nu \in \mathbb{N}$. Entonces existen $y_1^\nu(x),\dots,y_p^\nu(x) \in \mathcal{N}_n$, solución de ese sistema, tales que $y_i(x) - y_i^\nu(x) \in \mathfrak{m}^{\nu+1}$, $i=1,\dots,p$, donde $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal de $k[[x]]$.

Este teorema, para series analíticas sobre un cuerpo valorado de característica cero se debe a [M. Artin, 1968]. Véase también [Tougeron, 1976], donde aparecen refinamientos para series de Nash y analíticas sobre $\mathbb{R}$.

2. Como consecuencias, obtenemos demostraciones breves y fáciles de:

(2.1) El teorema de los ceros para álgebras de Nash sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

(2.2) Un teorema de especialización 'à la E. Artin' para algebras de Nash sobre un cuerpo realmente cerrado.

Además, (2.2) implica automáticamente:

(2.3) La solución del problema 17 de Hilbert para series de Nash sobre un cuerpo realmente cerrado.

(2.4) El teorema de los ceros para álgebras de Nash sobre un cuerpo realmente cerrado.

Nos ocuparemos aquí sólo de (2.2), pues será después evidente como probar (2.1). Asimismo, no nos detendremos en la deducción de (2.3) y (2.4) a partir de (2.2), pues el argumento es conocido.

Recordemos primero que un álgebra de Nash (resp. formal) sobre un cuerpo k es un álgebra unitaria A sobre k, imagen por un homomofismo de álgebras unitarias de un $\mathcal{N}_n$ (resp $\mathcal{F}_n$). En consecuencia un álgebra de Nash A es local, y su completado para la topología de Krull, que notaremos $\hat{A}$, es un álgebra formal.

En todo lo que sigue suponemos que k es un cuerpo realmente cerrado. Entonces los anillos $\mathcal{N}_n$ y $\mathcal{F}_n$ son ordenables. En particular, fijamos en $\mathcal{N}_1 = k\langle t\rangle$, $\mathcal{F}_1 = k[[t]]$ el orden total cuyos elementos >0 son las series $\sum_{n\geq n_0} a_n t^n$ con $a_{n_0} > 0$, y observemos que la topología del orden es la de Krull. Unicamente precisamos un lema para probar (2.2):

(2.5) Lema: Sea A un álgebra sobre k, íntegra y ordenada. Sean $f_1,\dots,f_r$ elementos no nulos de A. Entonces existe un orden total en $\hat{A}$ tal que $f_1,\dots,f_r$ tienen igual signo en $\hat{A}$ que en A.

Demostración:

Podemos suponer que $f_1,\dots,f_r$ no son unidades y son >0. En primer lugar se construye un álgebra de Nash íntegra ordenable $B \supset A$ de la forma $B = A[g_1,\dots,g_r]$ donde $g_1,\dots,g_r$ son soluciones de las ecuaciones: $x^2 - f_1 = 0,\dots,x^2 - f_r = 0$ en un cuerpo ordenado maximal que contenga A. Después se comprueba que $\hat{A} \subset \hat{B}$. Para terminar basta observar que el completado de un álgebra de Nash ordenable es un álgebra formal ordenable (es una consecuencia de (1.3)), y se elige un orden total en $\hat{B}$, cuya restricción a $\hat{A}$ resuelve el problema.

Deducimos de (2.5) el teorema de especialización. El enunciado es:

(2.2) Sea A un álgebra de Nash sobre k íntegra y ordenada. Sea $f_1,\dots,f_r$ elementos no nulos de A. Existe un homomorfismo de álgebras unitarias $\tau : A \to k\langle t\rangle$ de modo que $\tau(f_i)$ es $\neq 0$ y tiene igual signo en $k\langle t\rangle$ que f_i en A $(i=1,\dots,r)$.

Demostración.

En virtud de (2.5) y por ser el resultado cierto en el caso formal (véase [Lasalle, 1975]) existe un homomorfismo $\sigma : \hat{A} \to k[[t]]$ tal que $\sigma(f_i)$ es $\neq 0$ y tiene igual signo en $k[[t]]$ que f_i en A $(i=1,\dots,r)$. Como la topología del orden es la de Krull, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que cada elemento de $\sigma(f_i) + \mathfrak{m}^{\nu+1}$ es $\neq 0$ y tiene igual signo que $\sigma(f_i)$, donde $\mathfrak{m} = t.k[[t]]$. Por último, existe un homomorfismo $\tau : A \to k\langle t\rangle$ tal que $\tau(f) = \sigma(f) \pmod{\mathfrak{m}^{\nu+1}}$ para $f \in A$ (es otra consecuencia de (1.3)): τ es la solución.

Terminamos esta nota enunciando (2.3) y (2.4):

(2.3) Sea f un elemento no nulo de $\mathcal{N}_n$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- (α) f es suma de cuadrados en el cuerpo de fracciones de $\mathcal{N}_n$.
- (β) Para cada homomorfismo de álgebras unitarias $\tau : \mathcal{N}_n \to k\langle t\rangle$, es $\tau(f) \geq 0$.
- (γ) $f > 0$ para toda relación de orden total en $\mathcal{N}_n$.

(2.4) Sean A un álgebra de Nash sobre k, y $\mathcal{H}$ el conjunto de todos los homomorfismo de álgebras unitarias de A en $k\langle t\rangle$. Se verifica $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} \ker H = {}^R\mathfrak{N}$ donde ${}^R\mathfrak{N}$ es el nilradical real de A (esto es, el ideal de los $x \in A$ tales que $x^{2n} + x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0$ para ciertos $x_1,\dots,x_r \in A$, $n \geq 1$).

Es inmediato, a partir de (2.4) obtener la formulación habitual del teorema de los ceros para $\mathbb{R}$ (véase [Tougeron, 1972]).

REFERENCIAS

[Artin, 1968]: On solutions of analytic equations. Invent. Math., Berlin t.5 (1968) p. 277-291.

[Bochnak, J. 1978]: Sur le 17ème probleme de Hilbert pour les fonctions de Nash. Proc. A.M.S. 71, 2 (1978).

[Bochnak, J.; Efroymson, G.; 1978]: Real algebraic geometry and the 17th Hilbert problem. Univ. of New Mexico. Dept. of Math. and Statistics. (1978).

[Efroymson, G., 1974]: A Nullstellensatz for Nash rings. Pac. J. Math. 84 (1974), p. 101-112.

[Lasalle, G., 1975]: Sur le théoreme des zéros différentiable. Singularités d'Applications Différentiables (1975). Lect. Notes, 535. Springer.

[Lazzeri, F.; Tognoli, A., 1970]: Alcune proprietá degli spazi algebrizi. Ann. Sc. Norm. Sup. Di Pisa 24, (1970) p. 597-632.

[Merrien, J.,1973]: Un théoreme des zéros pour les idéaux de series formelles a coefficients réels. C.R. Acad. Sc. Paris. t. 276 (1973) serie A p. 1055-1059.

[Mostowski, T., 1976]: Some properties of the ring of Nash functions. Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa III 2 (1976). p 243-266.

[Risler, J.J., 1976]: Le théoreme des zéros en géometries algebrique et analytique réelles. Bull. Soc. Math. France, 104 (1976), p. 113-127.

[Robbin, J.W., 1979]: Evaluation fields for power series II. The Reelnullstellensatz. J. of Algebra, 57 (1979) p. 211-222.

[Tougeron, J.C., 1972]: Idéaux de fonctions différentiables. Ergebnisse der Mathematik. Band 71 (1972).

[Tougeron, J.C., 1976]: Solutions d'un sisteme d'equations analytiques réelles et applications. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 26, 3 (1976), p. 109-135.