Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

GRUPOS ABELIANOS DE TIPO HM

Isabel Segura García

Dpto. de Algebra
Universidad de Valencia

If G is a finite group acting without fixed points over the product of two spheres $S^{n-1}\times S^{n-1}$ with n even, its Tate cohomology verifies the relation

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}(G)}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}(G)} \simeq Z_a \oplus Z_b \qquad \text{with } ab=|G| \text{ and } \varepsilon=\pm 1$$

It is shown here that an abelian finite group G verifies this relation if and only if $G\simeq Z_a\oplus Z_b$, generalizing the result of H.Cartan about periodic groups.

DEFINICION. *Un grupo finito G se dice periódico si existe $q>0$ de manera que para todo entero i y para todo G-módulo A se tiene $\hat{H}^i(G,A)\simeq\hat{H}^{i+q}(G,A)$. Al menor q verificando esta condición se le denomina período de G.*

PROPOSICION. *Un grupo finito G es periódico de período q si y solo si $\hat{H}^q(G)\simeq Z_{|G|}$*

TEOREMA. *Un grupo abeliano finito es periódico si y solo si es cíclico.*

Los grupos periódicos tienen un interés topológico en el sentido de que si G es un grupo finito que opera sin puntos fijos sobre una esfera S^n, n impar, entonces G es periódico.

Topológicamente se demuestra con facilidad que si un grupo finito G opera sin puntos fijos sobre un producto de *esferas* $S^{n-1}\times S^{n-1}$, *n par, entonces se cumple la relación*

$$(1)\qquad \frac{\hat{H}^{\varepsilon n}(G)}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}(G)} \simeq Z_a \oplus Z_b \qquad \text{con } ab=|G| \text{ y } \varepsilon=\pm 1$$

DEFINICION. *Dado un grupo finito* G *y* $n>0$, *se dice que* n *es un semiperíodo de* G *si se verifica la relación (1).*

DEFINICION. *Un grupo finito* G *se dice de tipo HM si existe* $n>0$ *de manera que para todo* $k>0$, kn *es un semiperíodo de* G.

El propósito de este trabajo es caracterizar entre los grupos abelianos finitos los semiperiódicos y los de tipo HM. Para ello haremos uso del siguiente Lema.

LEMA. *Si* G *es un grupo abeliano finito, admite una descomposición de la forma* $Z_{m_1}\oplus Z_{m_2}\oplus\ldots\oplus Z_{m_r}$ *con* $1<m_r|\ldots|m_2|m_1$ *y* $r\geq 1$; *su cohomología de Tate viene dada por:*

$$\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)}(G) = \bigoplus_{j=2}^{r} (G_{j,n-1} \oplus \overline{G}_{j,n}) \qquad \forall n\geq 0 \text{ y } \varepsilon=\pm 1$$

$$\hat{H}^{\varepsilon 2n}(G) = G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r} (G_{j,n-1} \oplus \overline{G}_{j,n-1}) \qquad \forall n>0 \text{ y } \varepsilon=\pm 1$$

siendo:

$$G_i = Z_{m_i}\oplus\ldots\oplus Z_{m_r} \qquad 1\leq i\leq r$$

$$G_{j,n} = \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{H}^{2i+1}(G_j) \qquad 2\leq j\leq r$$

$$\overline{G}_{j,n} = \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{H}^{2i}(G_j) \qquad 2\leq j\leq r$$

Este resultado se demuestra por inducción sobre r *haciendo uso del teorema de Künneth para la homología de un producto y del isomorfismo de dualidad* $\hat{H}^{p}(G)\simeq Hom(\hat{H}^{-p}(G), Z_{|G|})$

TEOREMA. *Si* G *es un grupo abeliano finito y* $n>0$ *es un semiperíodo de* G, *necesariamente* n *es par.*

Demostración. *Sea* $G=Z_{m_1}\oplus\ldots\oplus Z_{m_r}$ *con* $1<m_r|\ldots|m_1$. *Supongamos* $n=2m+1$ *con* $m>0$ *y*

$$\frac{\hat{H}^{2m\ 1}(G)}{\hat{H}^{2m}(G)} \simeq Z_a\oplus Z_b \qquad \text{con } ab=|G|$$

Haciendo uso del lema anterior tenemos que si $m_1>m_2$ *no existe ningún monomorfismo de* $\hat{H}^{2m}(G)$ *en* $\hat{H}^{2m+1}(G)$ *ya que* Z_{m_1} *es sumando directo de* $\hat{H}^{2m}(G)$ *y* $m_2\hat{H}^{2m+1}(G)=0$. *Por lo tanto* $m_1=m_2$.

Por otro lado a y b son divisores de $m_2=m_1$ *y como* $ab=m_1m_2\ldots m_r$, *necesariamente* $a=b=m_1$ *y* $m_3=\ldots=m_r=1$ *y por lo tanto* $G=2Z_{m_1}$. *Pero* $\hat{H}^{2m+1}(2Z_{m_1})=mZ_{m_1}$ *y* $\hat{H}^{2m}(2Z_{m_1})=(m+1)Z_{m_1}$ *lo que entra en contradicción con que* $n=2m+1$ *sea un semiperíodo de G.*

TEOREMA. Si G es un grupo abeliano finito, las siguientes propiedades son equivalentes:

1) *G es de tipo HM*
2) *G es semiperiódico*
3) $G\simeq Z_a\oplus Z_b$ *con* $a,b\geq 1$
4) $2k$ *es semiperíodo de G* $\forall k>0$

Demostración. Las implicaciones $1)\Longrightarrow 2)$ *y* $4)\Longrightarrow 1)$ *son obvias.*

$2)\Longrightarrow 3)$: *Sea* $G=Z_{m_1}\oplus\ldots\oplus Z_{m_r}$ *con* $1<m_r|\ldots|m_1$ *y* $r\geq 1$.

Si $n>0$ *es un semiperíodo de G,* $n=2m$ *para algún* $m>0$ *y haciendo uso del lema anterior*

$$\frac{\hat{H}^{2m}(G)}{\hat{H}^{2m-1}(G)} \simeq G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r} \hat{H}^{2m-1}(G_j) \simeq Z_a \oplus Z_b \qquad \text{con } ab=|G|$$

con lo que $G=Z_{m_1}$ *o* $G=Z_{m_1}\oplus Z_{m_2}$, *además en ambos casos* $\bigoplus_{j=2}^{r} \hat{H}^{2m-1}(G_j)=0$

$3)\Longrightarrow 4)$: *Si G es cíclico* $\hat{H}^{\varepsilon(2k+1)}(G)=0$ $\forall k\geq 0$ *y* $\hat{H}^{\varepsilon 2k}(G)=G$ $\forall k>0$ *con lo que*

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon 2k}(G)}{\hat{H}^{\varepsilon(2k-1)}(G)} \simeq G \qquad \forall k>0$$

y por lo tanto $2k$ *es un semiperíodo de G* $\forall k>0$.

Si $G=Z_a\oplus Z_b$ *con* $a,b>1$, $G=Z_{[a,b]}\oplus Z_{(a,b)}$ *y según el lema anterior tenemos:*

$$\hat{H}^{\varepsilon(2k+1)}(G) = kZ_{(a,b)} \qquad \forall k \geq 0 \text{ y } \varepsilon = \pm 1$$

$$\hat{H}^{\varepsilon 2k}(G) = G \oplus (k-1)Z_{(a,b)} \qquad \forall k > 0 \text{ y } \varepsilon = \pm 1$$

con lo que $\forall k > 0$ *y* $\varepsilon = \pm 1$

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon 2k}(G)}{\hat{H}^{\varepsilon(2k-1)}(G)} \simeq G = Z_a \oplus Z_b$$

y $2k$ *es un semiperíodo de* G.

BIBLIOGRAFIA

H.CARTAN-S.EILENBERG: *Homological Algebra.* Princeton 1956

P.J.HILTON-U.STAMMBACH: *A course in Homological Algebra.* Springer-Verlag 1970

G.LEWIS: *Free actions on* $S^n \times S^n$. Trans. Amer. Math. Soc. 132(1968)