Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

TRIANGULOS ARITMETICOS

Manuel Díaz Regueiro

I.N.B. "Juan Montes" Lugo

ABSTRACT: It's studied a first arithmetical triangle that is used to express the generalized factorials $x^{(r}$. It's extended to other arithmetical triangles which serve to the quick calculation of polinomies of known roots.

==========================

Limiar

Os coeficientes de polinomios $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ deducense dos do $(x+x_1)(x+x_2)\dots(x+x_n)$ sen mais que cambiar alternadamente o sino escomenzando por +. E decir se o primeiro ten de coeficientes 1,-3,2,4,-1 o segundo ten 1,3,2,-4,-1. Quere esto decir que todo o que digamos dos polinomios $(x+x_1)(x+x_2)\dots(x+x_n)$ (relativo os coeficientes) trasladase os do $(x-x_1)\dots(x-x_n)$ facendo o cambio alternativo de sino dito.

Un primeiro triángulo

Construimos o triángulo

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 2 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 11 & & 6 & & \\
 & 1 & & 10 & & 35 & & 50 & & 24 & \\
1 & & 15 & & 85 & & 225 & & 274 & & 120 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

do xeito seguinte: por exemplo, a 5ª rea escomenza por 1, antre 1 e 10 ponse $15=1.5+10$. Antre 10 e 35 poñemos $85=10.5+35$; os seguintes son $225=35.5+50$, $274=50.5+24$; $120=24.5$.

En xeral, nunha rea m poñeremos primeiro 1 e dempois debaixo de dous números x,y (da rea m-1) ponse xm+y.

Notación.-Chamaremos (m/n) o número que aparece no triángulo na rea m, e nela esta no posto n+1.

Propiedades do triángulo. Probarase mais adiante que :

$$\sum_{n=0}^{m}(m/n)=(m+1)! \qquad (1)$$

$$(m+1)(m/n)+(m/n+1)=(m+1/n+1) \text{ ,por construcción}$$

$$\sum_{n=0}^{m}(-1)^{n+1}(m/n)=0 \qquad (2)$$

$$(m-1/n)=\sum_{\substack{a+b+c..=m-n\\ a+2b+3c+..=m}} \frac{m!}{a!b!c!..1^a 2^b 3^c \ldots}$$ (Elementos de análisis algebraico Rey Pastor. Páxina 169)

Aplicacións.- Os números da rea m son os coeficientes do polinomio $(x+1)(x+2)\ldots(x+m)$. Esto proba a propiedade (1) facendo $x=1$. Tamén se nesa rea cambiamos alternadamente os sinos (escomenzando por +) temos os coeficientes de $(x-1)(x-2)\ldots(x-m)$. Ou ben do factorial xeralizado $x^{(m+1)}=x(x-1)\ldots(x-m)$ (engadindo un 0 como derradeiro coeficiente), que ten seu uso na interpolación de Newton. E (antre outros exemplos) permite calcular os coeficientes do desenrolo en serie do binomio $(1+x)^n$. Exemplo: o de x^4 no desenrolo de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \\ 1 & 6 & 11 & 6 & 0 \end{array}$$

de aqui

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -6 & 11 & -6 & 0 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & -11/4 & 33/8 & -15/16 \\ \hline & 1 & -11/2 & 33/4 & -15/8 & -15/16 \end{array}$$

o coeficiente e $\dfrac{-15/16}{4!}$

En xeral

Notación.-Definamos, dadas as n variabeis $x_1, x_2, \ldots x_n$, o polinomio simétrico fundamental de orden i, $S_{ni}=x_1 \cdot x_2 \ldots x_i + \ldots + x_{n-i+1} \cdot x_{n-i+2} \ldots x_n$

Construimos agora o triángulo:

$$\begin{array}{lllll} 1 & x_1 & & & \\ 1 & x_1+x_2 & x_1 \cdot x_2 & & \\ 1 & x_1+x_2+x_3 & x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 & x_1x_2x_3 & \\ 1 & x_1+x_2+x_3+x_4 & \ldots & \ldots & x_1x_2x_3x_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

seguindo o esquema: o primeiro nº da rea i e o 1, e baixo as expresions x, y da rea i-1 ponse $x \cdot x_i + y$.

Probaremos agora que cada rea i son os polinomios simétricos fundamentais de i variabeis.

Por inducción, (as primeiras reas o son), supoñamos que temos

$$\begin{array}{llllll} & 1 & S_{k1} & S_{k2} & \ldots & S_{kk}, \text{ na rea k} \\ \text{na } k+1, & 1 & x_{k+1}+S_{k1} & x_{k+1}S_{k1}+S_{k2} & \ldots & x_{k+1}S_{kk} \end{array}$$

temos que probar que:

$$S_{k+1,1}=x_{k+1}+S_{k1} \; ; \; S_{k+1,i}=x_{k+1}S_{k,i-1}+S_{ki} \; ; \; S_{k+1,k+1}=x_{k+1}S_{kk}$$

o cal non e mais que un sinxelo exercicio.

Estes triángulos permiten calcular dun xeito automático os polinomios simétricos fundamentais pra valores concretos.

E, xa que logo, calcular calquera polinomio de raices coñecidas dun xeito axil, o que ten importancia na interpolación tipo Lagrange, e mais fundamentalmente na clase de Matemáticas, na preparación de problemas co profesor ponlle os alunos.

(O triángulo de Pascal e un caso particular de estos triángulos onde cada liña n da os coeficientes de $(x+1)^n$).

Exemplo: Cálculo do polinomio de raices $-1, 2, 3, -5$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & -1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & -2 & & \\ & 1 & & 4 & & 1 & & -6 & \\ 1 & & -1 & & -19 & & -11 & & 30 \\ + & & - & & + & & - & & + \end{array} \qquad \text{é} \quad x^4+x^3-19x^2+11x+30$$

Multiplicación por x+a

Dado o polinomio de expresión $a_o x^n + \cdots + a_n$ (3) multiplicase por x+a do xeito adoitado nos triángulos:

$$\begin{array}{cccccc} & a_o & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_o & a.a_o+a_1 & a.a_1+a_2 & & & a.a_n \end{array}$$

Unha proba da regla de Ruffini

Vistas as consideracions anteriores e doado facela:

Se o polinomio (3) o multiplicamos por x+a e sumamoslle o resto r, danos un polinomio de coeficientes

$$a_o \quad a.a_o+a_1 \quad a.a_1+a_2 \quad \cdots\cdots \quad a.a_n+r$$

Apricando a regla de Ruffini a ese polinomio pra dividilo por x+a

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_o & a.a_o+a_1 & a.a_1+a_2 & \cdots & a.a_n+r \\ -a & & -a.a_o & -a.a_1 & & -a.a_n \\ \hline & a_o' & a_1 & a_2' & & r \end{array}$$

da os coeficientes de (3) e o resto r.

Expresions dos polinomios simétricos fundamentais con determinantes

Dado $(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)$ e sustituindo $x=-x_i$ $(i=1,\ldots n)$ obtense

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_i^k S_{n,n-k} = 0$ (o cal para $x_i=1$ proba (2))

logo apricando a regla de Cramer a este sistema, e simplificando os sinos,

$$S_{nk} = (-1)^{k+1} \frac{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} \cdots x_1^n \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} \cdots x_2^n \cdots & 1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_n^{n-1} \cdots x_n^n \cdots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} \cdots x_1^k \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} \cdots x_2^k \cdots & 1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_n^{n-1} \cdots x_n^k \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

Ou ben, o determinante que resulta de sustituir no de Vandermonde a coluna k por $x_1^n, x_2^n, \ldots x_n^n$, e igual o determinante de Vandermonde por $S_{nk}.(-1)^{k+1}$

Exemplos:

Multiplicar x+4 por x^3-2x^2+5x-4

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & -2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 16 & -16 \end{array}$$

da $x^4+2x^3-3x^2+16x-16$

Achar o polinomio de interpolación polo método de Lagrange que pasa polos pontos (1,3),(3,1),(4,2),(2,1).

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 4 & 3 \\ & 1 & 8 & 19 & 12 \\ & 1 & -8 & 19 & -12 \\ 2 & & 2 & -12 & 14 \\ \hline & 1 & -6 & 7 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 4 & 3 \\ & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 4 & & 4 & -8 & 12 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 5 & 4 \\ & 1 & 7 & 14 & 8 \\ & 1 & -7 & 14 & -8 \\ 3 & & 3 & -12 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 2 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & & 1 & 2 \\ & & 1 & 5 & 6 \\ & 1 & 9 & 26 & 24 \\ & 1 & -9 & 26 & -24 \\ 1 & & 1 & -8 & 18 \\ \hline & 1 & -8 & 18 & -6 \end{array}$$

O polinomio é:

$$y=1\frac{(x^3-8x^2+19x-12)}{2}+2\frac{(x^3-6x^2+11x-6)}{6}+1\frac{(x^3-7x^2+14x-8)}{-2}+3\frac{(x^3-9x^2+26x-24)}{-6}$$

Interpolación.

Dada unha fórmula de interpolación, pra calcular os polinomios :

Exemplo, na interpolación de Gauss empregase os de raices 0,1,-1,2,-2,3,-3

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -15 & 4 & 12 & 0 \end{array}$$

Multiplicación por ax+b

Se o polinomio (3) multiplicamolo por ax+b faise seguindo o esquema:

$$\begin{array}{cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \;\ldots\ldots & a_n \\ a.a_0 & a_0.b+a.a_1 & a_1.b+a.a_2 & a_2.b+a.a_3 & \ldots\ldots & a_n.b \end{array}$$

Exemplo, $(2x+1).(x^3-3x^2+2x+1)$, en esquema,

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{array} \quad \text{da } 2x^4-5x^3+x^2+4x+1$$

Nota.-Facendo unha lectura de dereita a esquerda dunha liña dun triángulo danos un polinomio de raices inversas do polinomio adoitado. Exemplo: $6x^3-11x^2+6x-1$, ten de raices $1, \frac{1}{2}, 1/3$.