Pub. Mat. UAB
N°20 Set. 1980
Actes VII JMHL

INVARIANTES DE ANILLOS LOCALES Y DEFORMACIONES DE CURVAS PLANAS (EN CARACTERISTICA P > 0).

Antonio Campillo

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Valladolid

Let $\mathcal{O}$ be the ring of an algebroid variety over an algebraically closed field k of characteristic $p>0$. If Spec$\mathcal{O}$ is equimultiple along a closed subvariety Spec A of codimension 2 then $K_{\mathcal{O}}(q) \leq e\, q\, K_A(q)$, where e is the multiplicity and K stands for the function $K_{\mathcal{O}}(q=p^n) = \dim_k \mathcal{O}/_{(m \cap \mathcal{O}^{p^n})}$. The equality holds for $q \gg 0$ when Spec $\mathcal{O}$ is equisingular along Spec A, and the special fiber is irreducible.

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de caracteristica $p>0$ y $\mathcal{O}$ un anillo local noetheriano con ideal maximal m y cuerpo de coeficientes k. En [5] Kunz introdujo la función (invariante de $\mathcal{O}$)

$$K_{\mathcal{O}}(q) = \dim_k(\mathcal{O}/_{m^{[q]}}) \quad , \qquad m^{[q]} = m \cap \mathcal{O}^q \quad ,$$

definida para los enteros del tipo $q = p^n$. En este trabajo estudiamos para una deformación de curvas planas la relación existente entre los invariantes K de la deformación y del espacio de parámetros.

Sea $f_o(X,Y) \in k[[X,Y]]$ una serie definiendo una curva algebroide plana sobre k y A una k-álgebra local noetheriana completa teniendo a k como cuerpo de coeficientes. Una deformación de f_o sobre A es por definición una serie $f(X,Y) \in A[[X,Y]]$ tal que $f_o = \mathrm{res}(f)$, donde res(f) es la serie obtenida reduciendo los coeficientes de f módulo el ideal maximal m_A de A. En lenguaje geométrico, la deformación es el morfismo de k-esquemas $X = \mathrm{Spec}(A[[X,Y]]/_{(f)}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ inducido por la aplicación natural $A \longrightarrow A[[X,Y]]/_{(f)} = \vartheta$ y la curva $X_o = \mathrm{Spec}(k[[X,Y]]/_{(f_o)})$ se identifica con la fibra de dicho morfismo en el punto cerrado, es decir con la fibra especial de la deformación.

Dar una sección de la deformación consiste en dar un morfismo $s : \vartheta \longrightarrow A$ que induzca la identidad sobre A. En lo sucesivo trabajaremos sólamente con la sección trivial $t : \vartheta \longrightarrow A$, es decir la sección dada por $t(X+(f)) = t(Y+(f)) = 0$. La deformación se dice que es equimúltiple (a lo largo de t) cuando el orden de las series f y f_o coinciden. Si $X=0$ es transversal a f_o (esto se puede suponer sin pérdida de generalidad), la condición de equimultiplicidad y el teorema de preparación de Weierstrass nos permiten escribir f de la forma

$$f(X,Y) = Y^e + B_1(X)\,Y^{e-1} + \ldots + B_e(X)\,, \quad B_i(X) \in A[[X]]\,,$$

donde $\mathrm{ord}_X(B_i(X)) \geqslant i$.

TEOREMA 1. Para una deformación equimúltiple f de f_o sobre A se tiene

$$K_{\vartheta}(q) \leqslant e\,q\,K_A(q) \quad , \forall\, q \;,$$

donde e es la multiplicidad de f_o (y por tanto la multiplicidad de todas las fibras). La igualdad se verifica si y sólo si $y^q \in (m_A^{[q]}, x^q)$, siendo $x = X+(f)$, $y = Y+(f)$.

Demostración: Si $\{m_1,\ldots,m_h\}$ es un conjunto de elementos de A cuyas clases módulo $m_A^{[q]}$ son una base de $A/_{m_A^{[q]}}$, los elementos de $B = \{m_j X^i Y^k\}$, $1 \leqslant j \leqslant h$, $0 \leqslant i \leqslant q-1$, $0 \leqslant k \leqslant e-1$, son un sistema de generadores del k-espacio vectorial $\vartheta/_{m^{[q]}}$, así la fórmula (1) se sigue fácilmente. Para probar la segunda afirmación, notemos que Y^q tiene una única expresión de la forma $Y^q = A_1(X)\,Y^{e-1} + \ldots + A_o(X) + Z + Z'$, donde $A_i(X)$ es un polinomio con coeficientes combinaciones lineales de los m_i y de grado $\leqslant q-1$, Z pertenece a $(m_A^{[q]}, X^q)$ y $Z' \in (f(X,Y))$. Así $A_1(x)\,y^{e-1} + \ldots + A_o(x) = 0$ es una combinación lineal nula de elementos de B, y la condición $y^q \in (m_A^{[q]}, x^q)$ significa que los coeficientes de dicha combinación son todos nulos, y por tanto si $y^q \notin (m_A^{[q]}, x^q)$ se tiene $K_{\vartheta}(q) < e\,q\,K_A(q)$. Recíprocamente, si $y^q \in (m_A^{[q]}, x^q)$ entonces toda combinación lineal nula se obtiene en la forma anterior sustituyendo el polinomio Y^q por uno del tipo $Y^q p(X,Y)$, por tanto, puesto que $p(x,y)\,y^q \in (m_A^{[q]}, x^q)$ dicha combinación debe tener coeficientes nulos. Así la igualdad se da en (1).

NOTAS: 1) La demostración anterior nos indica que la condición $K_{\vartheta}(q) = e\,q\,K_A(q)$ se puede comprobar algorítmicamente a partir de la ecuación $f=0$.

2) La equimultiplicidad no es suficiente para garantizar la igualdad en (1). Así, por ejemplo, $y^2-(x+z)^2 z^2$ es equimúltiple a lo largo del eje de las x, sin embargo $K\;(q) = 2\,q^2 - 1$.

En adelante supondremos que f_o es irreducible. Sea f una deformación de f_o sobre A.

DEFINICION: Decimos que f es HN-equisingular cuando f admite un desarrollos de Hamburger–Noether (véase [3] para detalles).

Consideremos ahora un cierre perfecto A^* de A; es decir, en el caso en que A es regular A^* se construye como unión de A^{1/p^i} con $i \geqslant 0$, y en el caso no regular se toma A_o regular y una morfismo suprayectivo $A_o \longrightarrow A$ de anillos locales y se pone $A^* = A_o^* \otimes_{A_o} A$. En este caso, si $A_i = A_o^{1/p^i} \otimes_{A_o} A$ se tiene $A^* = \bigcup A_i$ y $A_i^{p^i} \subseteq A$.

DEFINICION: Diremos que f es equisingular cuando f es HN-equisingular considerada como deformación sobre algún A_i, $i \geqslant 0$. (Nótese que cada A_i es una k-algebra local noetheriana completa con k como cuerpo de coeficientes).

Cuando Spec A es íntegro esta segunda definición coincide con la definición clásica de Zariski, es decir equivale a la equisingularidad de las curvas $X_o \hat{\times}_k \overline{k(\xi)}$ y $X \hat{\times}_A \overline{k(\xi)}$ donde $k(\xi)$ es el cuerpo residual del punto genérico ξ de Spec A, (véase [3], § 5).

TEOREMA 2.- Si f es una deformación equisingular de f_o, entonces para $q \gg 0$ se tiene $K_{\vartheta}(q) = e\;q\;K_A(q)$.

Demostración: Si f es HN-equisingular entonces f tiene una parametrización, y por tanto $\vartheta \hookrightarrow A[[t]]$. Además $(t^c)\,k[[t]] \subseteq \vartheta$, donde c es el conductor del semigrupo de f_o. Así se tiene $y^q \in (x^q)$ para $q \geqslant c/_{(\beta_1 - e)}$ donde β_1 es el primer exponente característico de f_o, y por la segunda parte del teorema 1 se tiene $K_{\vartheta}(q) = e\,q\,K_A(q)$. En caso general la demostración es análoga pasando a A_i , considerando el correspondiente anillo ϑ' y teniendo en cuenta que $\vartheta^{p^i} \subsetneq \vartheta$.

NOTA: Puesto que K_{ϑ} depende solo de ϑ el anterior teorema nos da una condición necesaria para la existencia de una subvariedad de Spec ϑ isomorfa a Spec A a lo largo de la cual ϑ es equisingular.

REFERENCIAS:

[1] Blanco, M.F., "Comportamiento de la función de Kunz de curvas algebroides". Jornadas Hispano-Lusas. Santander 1979.

[2] Campillo A., "Algebroid curves in positive characteristic". Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag. To appear. (1980).

[3] Campillo A., "Deformaciones de los desarrollos de Hamburger-Noether". Rev. Mat. Univ. Valladolid. (1979), 20-45.

[4] Nobile, A., "Equisingular deformations of Puiseux expansions". Trans. Am. Math Soc. vol. 214, 113-135, (1975). "Equisingular deformations of plane curves". Ill. J. Math. (1978).

[5] Kunz, E. "Characterizations of regular local rings of characteristic p". Am. J. Math. 90 (1968), 772-783.

[6] Wahl, J. "Equisingular deformations of plane curves". Trans. Am. Math. Soc. Vol. 214. (1974).