Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

CÀLCUL DELS NÚMEROS DE HODGE D'UNA HIPERSUPERFICIE LLISA EN ESPAIS MULTIPROJECTIUS

Francesc Panyella Brustenga

Dpt. de Matemàtiques, E.T.S.E.I.B.
Universitat Politècnica de Barcelona

ABSTACT. Following Hirzebruch's method of multiplicative sequences, knowing the Chern class of a smooth hypersurface of bidegree (a,b), in $P^n(\mathbb{C})XP^m(\mathbb{C})$, and using Riemann-Roch's theorem, we can calculate the χ_y characteristic. By Lefschetz's theorem on hyperplane sections, wich also holds in multiprojective spaces, we calculate the Hodge numbers of that hypersuperface.

Considerarem $P^n(\mathbb{C})XP^m(\mathbb{C})$ com una varietat topològica i aplicarem els metodes de l'homología als cicles algebraics de $P^n(\mathbb{C})XP^m(\mathbb{C})$. Notarem per L_i la classe d'homología dels subespais projectius de codimensió i de $P^n(\mathbb{C})$ que engendren $H_*(P^n)$, i $\overline{L}_j$ les correspo-nents classes de $H_*(P^m)$.

Per Küneth si els cicles $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ formen una base de $H_*(P^n)$ i $(\overline{L}_j)_{0\leq j\leq m}$ una base de $H_*(P^m)$, els cicles $(L_iX\overline{L}_j)_{0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m}$ formen una base de $H_*(P^nXP^m)$.

Lema.- Si H(a,b) és una hipersuperficie de P^nXP^m, i el seu ideal esta engendrat per un polinomi bihomogeni de bigraus (a,b), la seva classe fonamental d'homología és

$$[H] = aL_1X\overline{L}_0 + bL_0X\overline{L}_1 \ .$$

Si h i k són els generadors de $H^2(P^n)$ i $H^2(P^m)$ tals que $\langle h^n, L_o\rangle = 1$ i $\langle k^m, \overline{L}_o\rangle = 1$, $j: H(a,b) \to P^n X P^m$ l'inclussió i $\pi_1: P^n X P^m \to P^n$ $\pi_2: P^n X P^m \to P^m$ les corresponents projeccions, notarem $\widetilde{h} = j^* \pi_1^* h$ i $\widetilde{k} = j^* \pi_2^* k$

Proposició.- Si H(a,b) és una hipersuperficie llisa de $P^n X P^m$ de bigraus (a,b), la seva classe total de Chern ve donada per $c(H(a,b) = (1+\widetilde{h})^{n+1}(1+\widetilde{k})^{m+1}(1+a\widetilde{h}+b\widetilde{k})^{-1}$

Proposició.- Amb les notaciós anteriors

$$\sum_{n,m} \chi_y(H(a,b)u^n v^m = \frac{(1+uy)^{-1}(1+vy)^{-1}}{(1-u)(1-v)} \left[\frac{(1+uy)^a(1+vy)^b-(1-u)^a(1-v)^b}{(1+uy)^a(1+vy)^b+y(1-u)^a(1-v)^b}\right]$$

Proposició.- Amb les notacions anteriors i consideran n m

$h^{pq}(H(a,b)) = 0$ si $p \neq q$ i $p+q \neq n+m-1$

$h^{pp}(H(a,b)) = p+1$ si $0 \leq p \leq n$

$h^{pp}(H(a,b)) = n+1$ si $n \leq p \leq m-1$ i $2p \neq n+m-1$

$h^{pp}(H(a,b)) = m+n-p$ si $m-1 < p \leq n+m-1$

si $2p=m+n-1$

$\chi^p(H(a,b)) = (-1)^{n+m-1-p} h^{p,(n+m-1)-p} + (-1)^p(p+1)$ si $p<n$

$\chi^p(H(a,b)) = (-1)^{n+m-1-p} h^{p,(n+m-1)-p} + (-1)^p(n+1)$ $n \leq p \leq m-1$

$\chi^p(H(a,b)) = (-1)^{n+m-1-p} h^{p,(n+m-1)-p} + (-1)^p(m+n-p)$, $m-1 < p \leq n+m-1$

$\chi^p(H(a,b)) = (-1)^p h^{pp}$ si $2p=m+n-1$

Demostració.- Es troba el diamant de Hodge de $P^n X P^m$ i s'aplica el teorema de les seccions hiperplanes de Lefschetz en espais multi-projectius.

Bibliografía.

(1) Andreotti and Frankel. The Lefschetz Theorem on Hyperplane sections. Ann. od Math. 69 (1959) 713-717

(2) J. Ferrer y F. Panyella. Sobre el Teorema de Lefschetz en espacios multiproyectivos (a aparecer) U.P.B.

(3) J. W. Milnor and J.D.Stasheff. Characteristic Casses Princeton U.P. 1974.

(4) F. Hirzebruch. Topologital Methods in Algebraic Geometry Springer-Verlag 1978.