Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

# DEFORMACIONS EQUIVARIANTS DE GERMES D'ESPAIS ANALÍTICS

Ferran Puerta Sales

Dpt. de Matemàtiques, E.T.S.E.I.B.
Universitat Politècnica de Barcelona

The existence of a complete family of equivariant deformations of a germ of a complex space with $C^*$-action, in case $\dim T'(X) < \infty$, is presented here.

I - Donarem les definicions fonamentals. Una $C^*$-acció en $C^n$ és una operació del grup multiplicatiu $C^* = C - \{0\}$ en $C^n$. Es pot provar que sempre ve definida per

$$(\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) \to (\lambda^{q_1} x_1, \ldots, \lambda^{q_n} x_n)$$

on $q_i \in Z$, per tot i. Breument notarem $\lambda.x$ l'imatge de la acció de $\lambda$ sobre el punt x. La $C^*$-acció direm qu'és "bona" si $q_i > 0$ per tot i. En tot el que segueix suposarem fixada una <u>bona</u> $C^*$-acció en $C^n$.

Si $\lambda \in C^*$, $\lambda$ opera en $\mathcal{O}_n$ mitjançant

$$(\lambda.f)(x) = f(\lambda.x), \quad f \in \mathcal{O}_n$$

Si $\mathcal{J}$ és un ideal de $\mathcal{O}_n$, l'acció de $\lambda$ passa al quocient $\mathcal{O}_n / \mathcal{J}$ si i només si $\lambda.\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$ $(*)$. Direm que $\mathcal{J}$ és un ideal quasihomogeni o equivariant per l'acció fixada si es compleix la relació $(*)$ per tot $\lambda \in C$.

Un polinomi $P \in C[x_1, \ldots, x_n]$ direm que és quasihomogeni de grau $d \in Z$, $d > 0$ respecte de l'acció fixada, si per tot $\lambda \in C^*$

$$P(\lambda.x) = \lambda^d P(x)$$

és a dir si P és un vector propi de l'acció de $C^*$ en $\mathcal{O}_n$.

Si $f \in \mathcal{O}_n$ és possible escriure de forma unica

$$f = \sum_{k \geqslant 0} f^k$$

on $f^k$ és un polinomi quasihomogeni de grau k. Direm que $f^k$ és la component quasihomogènia de grau k de f. Aleshores es prova que $\mathcal{J}$ és quasihomogeni si i només si per tot $f \in \mathcal{J}$ les components quasihomogènies de f també pertanyen a $\mathcal{J}$.

Finalment, un germe d'espai analític (X,0) direm que és quasihomogeni o equivariant si l'ideal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_n$ que el defineix és quasihomogeni. Per espais reduïts això equival a que, suposant sumergit el germe en $(C^n,0)$, X sigui invariant per la $C^*$-acció. Es te la

<u>Proposició 1</u>: Un germe d'espai analític (X,0) definit per un ideal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_n$ és quasihomogeni si i només si $\mathcal{J}$ admet un conjunt finit de generadors que siguin polinomis quasihomogenis (respecte de la $C^*$-acció fixada).

II - Ens remetem a (2) per a les definicions generals sobre deformacions. Una deformació del germe quasihomogeni (X,0)

$$\begin{tikzcd} (X,0) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (Y,0) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, hook] & (S,0) \end{tikzcd}$$

direm que és equivariant si l'espai total (Y,0) i la base (S,0) son germes d'espais analítics equivariants respecte de $C^*$-accions convenients, no necessariament bones, i tots els morfismes son equivariants. Podem enunciar aleshores el

<u>Teorema 2</u>: Tot germe d'espai analític quasihomogeni respecte d'una bona acció, admet una deformació semiuniversal equivariant.

BIBLIOGRAFIA


(1) S.S. Abhyankar: Local Analytic Geometry. Academic Press (1964).

(2) I.F. Donin: Complete families of deformations of germs of complex spaces. Math. USSR Sbornik Vol. 18 (1972), Nº 3, 397-406.

(3) A. Douady: Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique, Ann. Inst. Fourier 16 (1966) fasc. 1, 1-95.

(4) H.C. Pinkham: Deformations of algebraic varieties with $G_m$ action. Asterisque Nº 20 (1974).