Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

MORFISMOS BIRRACIONALES Y TEOREMAS DE ANULACION

Juan Sancho de Salas

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Salamanca

Es bien conocido que el cálculo de los grupos de cohomología de una curva plana se puede hacer paso a paso por transformaciones cuadráticas. El propósito de esta comunicación, es mostrar que si existe una desingularización en el sentido de Hironaka, a base de transformaciones cuadráticas con centros en subvariedades normalmente planas, se puede calcular de un modo preciso la variación de la cohomología y de la característica. Los teoremas centrales son:

Sea $\pi: Y' \longrightarrow Y$ una transformación cuadrática con centro en una subvariedad normalmente plana Z de codimensión d y multiplicidad m, estando Y sumergida en una variedad simple con codimensión 1.

1° <u>Variación de los dualizantes</u>: Si $D_{Y'}$ y D_Y son los dualizantes de Y' e Y, se verifica:

$$D_{Y'} = \pi^* D_Y \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} L_{-(m-d)E}$$

siendo E el ciclo excepcional de la explosión.

2° <u>Teorema de anulación</u>: $R^i \pi_* D_{Y'} = 0 \quad i > 0$ y en particular $\pi_* D_{Y'} = p_Z^{m-d} \otimes_{\mathcal{O}_Y} D_Y$.

3° <u>Cálculo de la variación de la característica</u>. Si $Y' \longrightarrow Y$ es un morfismo proyectivo factorizable por transformaciones cuadráticas a lo Hironaka $Y' = Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow Y_n = Y$, se verifica:

$$\chi(D_{Y'}) = \chi(D_Y) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j - d_j - 1} \chi(S^i N_{Z_j/Y_j} \otimes D_{Y_j})$$

siendo m_j, d_j la multiplicidad y la codimensión del centro de explosión Z_j en Y_j.

4° $R^i\pi_*\mathcal{O}_{Y'} = 0$ para $i \neq 0$, d-1 . Además $\dim_{k(p)}(R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_{Y'})_p$ = al término constante del polinomio de Samuels del anillo local de Y en el punto genérico p de Z .

5° Se verifica la sucesión exacta siguiente: si $d = m$

$$\longrightarrow H^i(Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^i(Y',\mathcal{O}_{Y'}) \longrightarrow H^{i-d+1}(Y,R^{d-1}\pi_*\mathcal{O}_{Y'}) \longrightarrow$$

6° Por último demostramos el teorema de anulación para morfismos proyectivos $Y' \longrightarrow Y$ factorizables por transformaciones cuadráticas a lo Hironaka, es decir $R^i\pi_*D_{Y'} = 0$ $i > 0$. Este teorema ha sido demostrado por Grauert-Riemenschneider en variedades analíticas, y por Wahl y Lipman para superficies.

Pasemos a las demostraciones:

Sea X una variedad lisa e Y una subvariedad de codimensión 1 de X íntegra, y sean $\bar{\pi}$, π la transformación cuadrática en una subvariedad lisa de Y dada por el haz de ideales p .

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "\bar{\pi}"'] & Y' \arrow[l] \arrow[d, "\pi"] \\ X & Y \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Llamemos $\bar{p}$ al haz de ideales de Y' dado por la imagen del morfismo $\pi^*p \to \mathcal{O}_{Y'}$. Se verifica entonces que:

<u>Teorema</u>: El dualizante de Y' vale $D_{Y'} = \bar{p}^{\,m-d} \otimes \pi^*D_Y$ siendo m la multiplicidad y d la codimensión en Y del centro de la explosición.

<u>Demostración</u>: $\bar{p}^{\,m-d} = L_{O(m-d)E} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'}$ siendo E el divisor excepcional.

Por adjunción $D_{Y'} = (\Omega_{X'} \otimes L_{Y'}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'}$, $D_Y = (\Omega_X \otimes L_Y) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$, y teniendo en cuenta que $\Omega_{X'} = \bar{\pi}^*\Omega_X \otimes L_{dE}$ siendo E el divisor excepcional de la explosión y que $\bar{\pi}^*L_Y = L_{Y'+mE}$ se concluye.

<u>Teorema de Anulación</u>: En las mismas hipótesis que el teorema anterior se verifica:

$$R^i\pi_*D_{Y'} = 0 \qquad i > 0$$

<u>Demostración</u>: Como la cuestión es local, bastará probar por el teorema anterior que $R^i\pi_*\bar{p}^{\,m-d} = 0$ para $i > 0$. Tensorializando por $\mathcal{O}_{X'}(m-d)$ en la sucesión $0 \longrightarrow \alpha_{Y'} \longrightarrow \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'} \longrightarrow 0$ resulta

$$0 \longrightarrow \alpha_{Y'}(m-d) \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}(m-d) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(m-d) = \bar{p}^{\,m-d} \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Ahora bien, $\bar{\pi}^*\alpha_Y = \alpha_{Y'} \circ \alpha_E^m$ y como α_Y es principal se tiene que en nuestra localidad $\alpha_{Y'} \cong \alpha_E^{-m} = \mathcal{O}_{X'}(-m)$ por la equivalencia lineal. Y se termina tomando imágenes directas en la sucesión (*) teniendo en cuanta el conocido hecho de que $R^i\pi_*\mathcal{O}_{X'}(n)=0$ $i>0$ para $n>-d-1$ siendo $\bar{\pi}:X'\longrightarrow X$ una transformación cuadrática de variedades lisas.

Consecuencia: variación de la característica en un morfismo birracional: Por el teorema de anulación, si $\pi:Y'\longrightarrow Y$ es una transformación cuadrática en las condiciones del teorema se tiene que la suite espectral

$$E_2^{p,q} = H^p(Y,R^q\pi_*D_{Y'}) \Rightarrow H^{p+q}(Y',D_{Y'})$$

es degenerada luego $H^i(Y,\pi_*D_{Y'}) = H^i(Y',D_{Y'})$.
Tomando característica en la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow p^{m-d}\otimes D_Y = \pi_*D_{Y'} \longrightarrow D_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y/p^{m-d}\otimes D_Y \longrightarrow 0$$

resulta que $\chi(D_Y) - \chi(D_{Y'}) = \chi(\mathcal{O}_Y/p^{m-d}\otimes D_Y)$.
Llamando p_Z al ideal definido por el centro de explosión dentro del ambiente liso X se tiene que:

$$\chi(D_Y) - \chi(D_{Y'}) = \chi(\mathcal{O}_Y/p^{m-d}\otimes_{\mathcal{O}_Y} D_Y) = (\mathcal{O}_X/p_Z^{m-d}\otimes D_Y) = \\ = \sum_{1}^{m-d-1} \chi(p_Z^i/p_Z^{i+1}\otimes D_Y) = \sum \chi(S^iN_{Z/X}\otimes D_Y)$$

donde $N_{Z/X}$ es el fibrado normal a Z dentro de X . Por tanto:

Teorema: Si $Y'\longrightarrow Y$ es un morfismo birracional proyectivo que factoriza por dilataciones en subvariedades normalmente planas a lo Hironaka, se puede calcular la variación de la característica con las fórmulas anteriores.

Teorema de dualidad para morfismos birracionales: Sea $X\longrightarrow \mathrm{Esp}\,\mathcal{O}$ la explosión en un punto de codimensión d (que sea una singularidad normalmente plana) de un anillo local completo $\mathcal{O}$, se verifica:

$$R^i\pi_*M = \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{n-d-i}\ (M,H_E^d(D_X))^* \quad n = \dim\mathcal{O}$$

siendo $H_E^d(D_X)$ el haz de cohomología local sobre el ciclo excepcional.
El dual lo tomamos sobre la envolvente inyectiva del cuerpo residual.

Demostración: Sea m el ideal máximo de $\mathcal{O}$. Llamando $M_n = M/m^nM$ se tiene: $R^i\pi_*M_m = \mathrm{Ext}^{n-i}(M_n,D_X)^* =$ (por el teorema del functor compuesto para $\Gamma_X\ \underset{\sim}{\mathrm{Hom}} = \mathrm{Hom}) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{n-d-i}(M,\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^d(\mathcal{O}/m^m,D_X))$ y se termina pues
$\varinjlim \underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^d(\mathcal{O}/m^m,D_X) = H_E^d(D_X)$ y además $\varinjlim R^i\pi_*M_m = R^i\pi_*M$ por el teorema de las funciones holomorfas de Zariski.

Aplicación: Tomando en el teorema anterior $\mathcal{M} = D_X$ y aplicando el teorema de anulación, resulta para $i > 0$ que:

$$0 = R^i \pi_* D_X = \operatorname{Ext}^{n-d-i}_{\mathcal{O}_X}(D_X, \mathcal{H}^d_E(D_X))^* = \operatorname{Ext}^{n-d-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{H}^d_E(\mathcal{O}_X))^*$$

de donde se deduce que $\mathbf{H}^i_E(\mathcal{O}_X) \neq 0$ para $i \neq n$.

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que se verifique el teorema de anulación es que $R^i \pi_* \mathcal{O}_X = H^i(X-E, \mathcal{O}_X)$ para $i \neq 0$, n .

Demostración: Se deduce de lo anterior y de la sucesión exacta de cohomología local.

Corolario: $R^i \pi_* \mathcal{O}_X = 0$ para $i \neq 0$, n-1 por ser X Cohen-Macaulay.

Teorema: Si $Y' \longrightarrow Y$ es un morfismo birracional que factoriza por dilatación en subvariedades normalmente planas a lo Hironaka, se verifica el teorema de anulación.

Demostración: Es consecuencia del teorema anterior.

Aplicación al cálculo de la variación de la cohomología: Sea $Y' \xrightarrow{\pi} Y$ una transformación cuadrática en un punto de codimensión d . Consideremos la suite espectral

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q \pi_* \mathcal{O}_{Y'}) \Rightarrow H^{p+q}(Y', \mathcal{O}_{Y'})$$

que por lo que ya sabemos es una suite de fibra esférica, luego por la sucesión exacta de fibra esférica se tiene suponiendo Y int. cerrado

$$\rightarrow H^i(Y, O_Y) \longrightarrow H^i(Y', O_{Y'}) \longrightarrow H^{i-n+1}(Y, R^{n-1} \pi_* O_{Y'}) \longrightarrow$$

de donde $H^i(Y,O_Y) = H^i(Y',O_{Y'})$ para $i \neq n-1, n$.

REFERENCIAS:

J.H. Wahl - *Vanishing theorems for resolutions of surfaces singularities.* Inventiones Math., 31, 17-41 (1975).

H. Grauert - O. Riemenschneider - *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen.* Inventiones Math., 11, 263-292, (1970).

P. Blass - J. Lipman - *Remarks on adjoints and aritmethic genera of algebraic varieties.* Am. Journal Mathem. vol.101,2 (1979)