Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACION EN 3º DE B.U.P.

Pablo Taniguchi Dietrich

I.N.B. "Eugenio D'Ors" Badalona (Barcelona)

Local maxima (minima) of a given function f are not necessarily absolute maxima (minima).This is often forgotten when we solve optimization problems.In section 1 we present two problems whose solution is found at a point where the derivative is not zero.Section 2 contains a statistic about some aspects of definitions and algorithms found in a sample (not random,but representative) of 3°B.U.P. text books (age 16-17).Finally,in section 3 we propose some definitions and algorithms.

1. INTRODUCCION

Consideremos los siguientes problemas:

PROB1:En un rectángulo de 4 dm de perímetro se sustituyen dos lados opuestos por semicircunferencias exteriores.¿Cuál debe ser el radio de éstas para que el área de la figura resultante sea máxima?

PROB2:Un prisma recto de base cuadrada y 48 dm^2 de área lateral ha de ser cortado paralelamente a su base para obtener otro prisma cuyas aristas sumen 36 dm.Hallar las dimensiones del prisma inicial para que el volumen del prisma que sobre sea:a)mínimo;b)máximo.

El procedimiento para resolver problemas de optimización que se suele encontrar en los libros de texto de 3°de B.U.P. se basa en la detección de *extremos relativos* f(a) con f'(a) =0.Si lo aplicamos a PROB1 obtenemos $r=2/(4-\pi)\simeq 2,33$ dm,que es una solución imposible,pues el perímetro del rectángulo ha de ser mayor o igual que cuatro veces el radio de las semicircunferencias.Asimismo,aplicado a PROB2 se obtiene:a)x=2 dm, y=6 dm (arista de la base y altura,respectivamente),en cuyo caso el volumen del prisma sobrante es V=4 dm^3;b)x=1 dm,y= 12 dm,siendo en este caso V=5 dm^3;sin embargo,para x=0,1 dm, y=120 dm resulta V=1,112 dm^3 que es menor que el supuesto volumen mínimo,y para x=3 dm,y=4 dm se obtiene V=9 dm^3 que es mayor que el pretendido volumen máximo.

El aludido procedimiento ha fallado por dos razones:

I *No se ha tenido en cuenta el dominio de la función objetivo (dicho en otras palabras,se ha identificado esta función con la función matemática que nos da sus valores)*.Así,en PROB1 el área A(r) de la figura resultante viene dada por $A(r)=(\pi-4)r^2+4r$;la función A(r)="área de la figura en función del radio r de las semicircunferencias" y la función polinómica $f(r)=(\pi-4)r^2+4r$ no son idénticas, a pesar de tener la misma "fórmula", ya que Dom f = R, pero Dom A $=[0,1]$. Análogamente, en PROB2 el volumen V(x) del prisma sobrante se expresa mediante $V(x)=2x^3-9x^2+12x$, pero V y la función polinómica g(x) $=2x^3-9x^2+12x$ no coinciden, pues Dom g=R y Dom V $=]0,\ 4{,}5]$.

II *No es cierto que toda función alcanza sus* extremos absolutos *(si los tiene) en puntos donde se anula su derivada.* Así, en PROB1 el máximo absoluto se alcanza para r=1 dm; en PROB2 no hay mínimo absoluto, pero sí máximo absoluto, que se alcanza para x=4,5 dm. En ninguno de los dos casos, la derivada de la función objetivo se anula.

2. ESTADISTICAS

Hemos examinado 17 libros de texto de 3°de B.U.P.[1], observando los siguientes detalles dignos de reseñar:

a) Se da el nombre de máximo o mínimo (relativo o absoluto) al *punto (abscisa, valor de la variable)* para el cual la función toma un valor máximo o mínimo (en un entorno o en todo el dominio, respectivamente), ya sea por definición o por abuso de lenguaje, en 7 (41%) textos; ello provoca confusiones.
b) En cuanto a los extremos relativos:
   - Se definen de forma que sólo se pueden alcanzar en puntos interiores del dominio: 15 (88%); de esta manera, no será cierto que todo extremo absoluto sea asimismo un extremo relativo.
   - El único algoritmo que se da para detectarlos es el que se basa en el signo de la derivada segunda (o de orden superior): 7 (41%); este algoritmo pude obligar a realizar cálculos tan tediosos como innecesarios.
c) En cuanto a los extremos absolutos, solo los definen 10 (59%); de éstos, son 6 (60%) los que admiten la posibilidad de que se alcancen en puntos frontera del dominio, y ninguno (0%) da un algoritmo para calcularlos.
d) En cuanto a los problemas de optimización (máximos y mínimos):
   - Hay 4 (24%) que no resuelven ninguno, aunque 3 de éstos los proponen como ejercicios.
   - De los 13 (76%) que resuelven alguno, son 11 (85%) los que lo hacen hallando extremos relativos que se alcanzan en puntos donde se anula la derivada de la función objetivo, son solo 2 (15%) los que tienen en cuenta el dominio de esta función y son 4 (31%) los que dan un algoritmo para plantearlos.

---

1. Editoriales: Alhambra, Anaya (las dos versiones), Bruño (versiones Estructura y Entorno), Ecir, Edelvives, Gracia-Rubio-Ruiz-San Miguel, I.N.B.A.D., Magisterio Español, Santillana, Serpa, Silos, SM, Tecnibán, Teide y Vicens Vives.

3. DEFINICIONES Y ALGORITMOS

3.1 DEFINICIONES

En todo este trabajo entenderemos por *función* a toda correspondencia $f: A \longrightarrow B$, con $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, en la que cada uno de los elementos de A tiene a lo sumo una imagen en B; así, Dom f $= \{x \in A / f(x) \in B\}$. Siempre que no se diga lo contrario, supondremos que $A=B=\mathbb{R}$ y que: (i) f es continua en su dominio. (ii) f no es localmente constante. (iii) f es derivable en Dom f, excepto quizás en puntos aislados. (iv) f' es continua en su dominio. (v) Dom f carece de puntos aislados.

Diremos que la función f tiene *máximo (mínimo) absoluto* si existe a Dom f tal que $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$ para todo $x \in$ Dom f. En tal caso, diremos que $M=f(a)$ $(m=f(a))$ *es* el máximo (mínimo) absoluto de f y que lo *alcanza* en a.

Diremos que la función f *alcanza un máximo (mínimo) relativo* en $a \in$ Dom f, si existe un entorno E(a) tal que $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$ para todo $x \in E(a) \cap$ Dom f.

Llamaremos *puntos especiales* de la función f a los que verifican al menos una de las siguientes condiciones: (i) Pertenecen a la frontera de Dom f. (ii) Pertenecen a Dom f, pero en ellos la derivada vale cero o no existe. (Se demuestra que los puntos especiales son puntos frontera de intervalos de monotonía de f).

3.2 ALGORITMOS

3.2.1 Algoritmo para hallar los más grandes intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.

1) Se hallan los puntos especiales, se ordenan de menor a mayor y se forman los intervalos de monotonía (abiertos o cerrados en cada uno de sus puntos frontera, según que respectivamente no pertenezcan o pertenezcan a Dom f).
2) En cada intervalo de monotonía se elige un punto interior y se halla el signo que en él tiene f'. El intervalo será de crecimiento o de decrecimiento según que dicho signo sea respectivamente + ó −.
3) Si dos intervalos de monotonía contiguos A_1 y A_2 son ambos de crecimiento o ambos de decrecimiento, y tienen un punto común, entonces $A_1 \cup A_2$ es un intervalo de crecimiento o de decrecimiento, respectivamente. Este paso se repite mientras sea posible.

3.2.2 Algoritmo para hallar los puntos en que se alcanzan los extremos relativos de una función.

1) Se aplica el algoritmo anterior.
2) Si dos intervalos de monotonía contiguos son tales que uno es de crecimiento y está a la izquierda (derecha) del otro que es de decrecimiento, y además tienen un punto frontera común a, entonces la función alcanza un máximo (mínimo) relativo en a.
3) En los puntos frontera del dominio que pertenezcan a dicho dominio, la función también alcanza extremos relativos (máximos relativos en los puntos frontera izquierdos de intervalos de decrecimiento y en los puntos frontera derechos de intervalos de crecimiento; mínimos relativos en los puntos frontera izquierdos de intervalos de crecimiento y en los puntos frontera derechos de intervalos de decrecimiento).

3.2.3 Algoritmo para hallar los extremos absolutos.

1) Hallar los puntos especiales de la función.

2) Si la función solo tiene dos puntos especiales a y b ($a < b$), entonces tiene un único intervalo de monotonía: Dom f, por lo que alcanza un extremo absoluto en cada uno de los puntos especiales que pertenezcan a dicho dominio. El máximo (mínimo) absoluto es f(a) y el mínimo (máximo) absoluto es f(b) si el intervalo es de decrecimiento (crecimiento).

3) Si la función solo tiene tres puntos especiales a, b y c ($a < b < c$) con $b \in$ Dom f, y el intervalo de monotonía de la izquierda (derecha) es de crecimiento y el otro es de decrecimiento, entonces f alcanza en b su máximo (mínimo) absoluto.

4) Si la función tiene más de tres puntos especiales, para cada pareja, a y b, de tales puntos, que determine un intervalo de monotonía (es decir, $]a,b[\subseteq$ Dom f) se realiza lo siguiente:

a) Si a Dom f se calcula f(a), si lo desconocemos.

b) Si $a=-\infty$ se calcula el límite de f(x) cuando x tiende a $-\infty$.

c) Si $a \in \mathbb{R}-$Dom f, entonces se calcula el límite de f(x) cuando x tiende a a por la derecha.

d) Si $b \in$ Dom f se calcula f(b).

e) Si $b=+\infty$ se calcula el límite de f(x) cuando x tiende a $+\infty$.

f) Si $b \in \mathbb{R}-$Dom f, entonces se calcula el límite de f(x) cuando x tiende a b por la izquierda.

Los valores obtenidos reciben el nombre de *valores especiales* de f. Sean M y m el máximo y el mínimo de dichos valores especiales (cabe la posibilidad de que $M=+\infty$ y $m = -\infty$) a los que llamaremos *supremo e ínfimo*, respectivamente. Si existe al menos un punto especial $c \in$ Dom f tal que $f(c) = M$ ($f(c)=m$), entonces f tiene máximo (mínimo) absoluto, su valor es M (m) y es alcanzado en c; en caso contrario, f carece de máximo (mínimo) absoluto.

3.2.4 Algoritmo para plantear y resolver problemas de optimización.

1) Identificar las variables que intervienen en el problema y representarlas mediante símbolos (en muchos casos suele bastar un dibujo).

2) Expresar en función de dichas variables lo que nos piden que sea máximo o mínimo (*función objetivo*).

3) Extraer del enunciado del problema relaciones entre dichas variables y sustituirlas en la expresión obtenida en el paso anterior, de modo que la función objetivo solo dependa de una variable.

4) Hallar el dominio de la función objetivo. (Conviene expresar en palabras el significado de esta función; téngase en cuenta que las longitudes, las áreas, los volúmenes, los precios, etc. no pueden tomar valores negativos).

5) Hallar el extremo absoluto (o extremos absolutos) solicitado (si existe) y el punto o puntos en que es alcanzado.

6) Volver a leer el enunciado del problema y terminar de resolverlo, si es que todavía queda algo pendiente.