Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

LAS MEMORIAS SOBRE ALGUNAS CUESTIONES DE ALGEBRA DE ALVEAR (1972) Y CHAIX (1807)

Santiago Garma

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid

One of the topics widely spread among historians and intellectuals that are acquainted with the history of Spain is that of the ignorance and neglect of mathematics by spaniards since the musulman domination until XXth. century. The only perusal of mathematical books, wrote by spaniards during the second half of XVIII th. century to the beginning of the reings of Fernando VII, demonstrate the incorrect of the idea exposed up. The reading of Memorias write by spanish mathematicians during such a period reveal that were professors and investigators actually qualified.

Desde el siglo XIX, en que se reanudo con un caracter muy distinto a como se había desarrolladoen el siglo XVIII la polémica sobre la existencía o no de ciencia española, se extendió entre los científicos españoles la idea de que antes que ellos, efectivamente, no se había practicado la ciencia en España. Los argumentos gastados por los polemistas fueron en su mayoría opiniones subjetivas y solo en algunos casos estuvieron respaldades por una información bibliográfica. A esto hay que añadir que la discusión iniciada a comienzos del siglo XVIII coincidió con un momento en que, en una situación política y social llena de contradicciones, los científicos y las instituciones científicas en España tenían un alto nivel de conocimientos, al menos en el terreno de las matemáticas, asi la información acerca de la producción matemática de Europa estaba bastante al día y se comenzaban a esbozar lineas de investigación. No hay noticias del interés que la mayor parte de los matemáticos españoles del momento pudieron tener por la polémica, la impresión que se saca del conocimiento de sus escritos es que no les interesó. Tambien nos encontramos encontramos con que en estos mismos años la Historia de las Matemáticas, materia trabajada por los matemáticos desde muy antiguo, comenzaba de nuevo a practicarse en europa sistemáticamente, con la particularidad en España de que los libros de matemáticas, en su mayor parte, estuvieron prologados con la Historia de la Aritmetica, del Algebra o de la Geometría. Finalmente, en España, a comienzos del siglo XIX, el reinado de Fernando VII se encargó de acabar con la prometedora situación a que se había llegado con los anteriores borbones.

De entre los buenos matemáticos que escribieron en España en aquel período, acerca de cuestiones algebraicas, vamos a recuperar las Memorias de Miguel de Alvear sobre Ecuaciones superiores o método general de resolverlas, publicada en 1814; y de Josef Chaix sobre un Nuevo método general para transformar en serie las funciones transcendentes, precedido de otro método particular para las funciones logaritmicas y exponenciales, publicado en 1807.

La primera de las Memoriases un trabajo redactado en 1792, para el curso que el autor impartía en la Escuela de Guardias marinas de Cadiz, en ella desarrolla el método dado por Bezout para cálcular raices en ecuaciones de grados 4, 5 y 6, en el tomo III, dedicado al Algebra, de su curso de Matemáticas.

Para encontrar raices de una ecuación de cuarto grado $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ identifica esta ecuación con el producto de dos factores racionales P y Q, $P(x) = x^2 + mx + n$ y $Q(x) = x^2 + Mx + N$. Entonces al hacer

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = (x^2 + mx + n)(x^2 + Mx + N)$$

se llega al sistema

$$\begin{aligned} m + n &= p \\ n + m + M + N &= q \\ Mn + mN &= r \\ Nn &= s \end{aligned} \qquad (E)$$

en el que Bezout determina m y n, primero y despues M y N. Sabiendo que Nn = s y que supuesto conocido n se puede obtener el valor de m en (E), que será

$$m = \frac{rn - pn^2}{s - n^2}$$

Conocidos n y m estará determinado el factor P. Aquí Alvear advierte que n es uno de los factores racionales de s y que obteniendo todos los divisores de s, se puede dar a n su valor sucesivamente, obteniendo asi el valor para m. Despues advierte, tambien, que s es el productode las cuatro raices de la ecuación, lo que expresará diciendo que es de cuatro dimensiones ; entonces n y N son factores de dos dimensiones cada uno. En los ejemplos con ecuaciones de grado 4 las comprobaciones son fáciles y el cálculo es sencillo.

Los mismos resultados aplicados a las ecuaciones de 5º y 6º grado, si, en el primer caso, t es el término independiente y los factores de la descomposición son ecuaciones de 2º y 3º grado y sus terminos independientes son n y R llega a que t = nR. Pero aquí mientras que la dimensión de t es 5 las de n y R son 2 y 3 respectivamente, luego el segundo término de la igualdad es de dimensión2x3. En la ecuación de 6º grado el problema es similar.

La extensión del método a las ecuaciones de 5º y 6º grado mostraba las dificultades que tenía el encontrar la solución de las ecuaciones de grado superior a cuatro, problema al que Lagrangehabía dedicado una extensa Memoria en 1770 sin haber podido resolverlo. En este sentido Alvear reconoce "se ve que el método es general pero se ve tambien que al paso que crece el grado de la ecuación, crece la dificultad por la multiplicidad de los términos ... como el método es de tanteo algunas veces no se logra lo que se pretende".

La segunda de las Memorias que estamos examinando tiene dos partes una primera en donde seexpone con detalle como desarrollar en serie las funciones logaritmicas y exponenciales, la segunda mediante métodos algebraicos exclusivamente, está dedicada al método que veremos a continuación para lograr el desarrollo de una función transcendente. La primera parte es bastante conocida entre los matemáticos y está en la linea del método usado por Halley para resolver el mismo problema.

Chaix apoya todo su trabajo en que "toda función transcendente tiene alguna propiedad esencial, cifrada en una ecuaciónque la expresa de modó general". Por ejemplo

$$\log (1 + x)^n = n \log (1 + x) \;;\; (a^x)^n = a^{xn} \;;$$

$\text{sen } nx = n \text{ sen } x + \dfrac{n(n^2-1)}{2 \,.\, 3} (\text{sen } x)^3 + \dfrac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\text{sen } x)^5 - \text{etc.}$ y finalmente $\cos nx = 2^{n-1} (\cos x)^n - n\, 2^{n-3} (\cos x)^{n-2} + \dfrac{n(n-3)}{2} 2^{n-5} (\cos x)^{n-4}$ etc. .

Suponiendo en cada caso que n vale 2, 3 o 4 obtiene relaciones a partir de las que obtiene el desarrollo.

Uno de los casos que resuelve es el siguiente, si $\text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x - 4 (\text{sen } x)^3$ y suponiendo que $\text{sen } x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}$ haciendo las substituciones pertinentes obtenemos:

$$\text{sen } 3x = A\,3x + B\,(3x)^2 + C\,(3x)^3 + D\,(3x)^4 + E\,(3x)^5 + \text{etc.}$$

$$(\text{sen } x)^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + 3A^2Cx^5 + \text{etc.}$$
$$+ 3AB^2x^5 + \text{etc.}$$

Substituyendo estos resultados en la igualdad primera e identificando los coeficientes se obtiene

$$B = 0;\; 24C = -4A^3;\; D = 0 \;;\; 20E = -A^2C = \frac{A^5}{3!} \quad \text{etc.}$$

entonces el desarrollo de sen x será $\text{sen } x = Ax - \dfrac{A^3x^3}{3!} + \dfrac{A^5x^5}{5!} - \text{etc.}$

Luego para determinar el valor de A divide por x la igualdad anterior y calcula el limite cuando x tiende a 0 y queda $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = A$. Luego $A = 1$.

Este uso de los métodos algebraicos fue muy frecuente hasta el primer tercio del siglo XIX, confirmando resultados que en muchos casos se obtuvieron sin ningun rigor.