

SOBRE CIERTAS EXPRESIONES DE LA FUNCION RANGO, INDEPENDIENTES
DE LA TEORIA DE ORDINALES

Mario de J. Pérez-Jiménez

Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

In the present work we obtain several representations of the rank function associated to a well founded relation in terms of transitive and supertransitive closures, by means of transfinite recursion theorems concerning these relations and with no use of ordinals theory. Moreover, specifical representations are obtained for the ordinary rank function in certain transitive classes.

Notación: Representaremos por \mathbb{U} la clase universal, por \emptyset la clase de los números ordinales y por \emptyset^* la gráfica vacía. Si R es una relación bien fundamentada sobre una clase A entonces notaremos por R^t la extensión transitiiva de R , por $S_R(x)$ el R -segmento inicial de extremo $x \in A$ y por $M_R(A)$ la clase de los elementos R -minimales de A . Si A es una clase notaremos por \hat{A} y \hat{A}^* , respectivamente, las clausuras transitiva y supertransitiva de A ; por \check{A} el interior transitivo de A ; por ϵ_A la restricción a A de la \in -relación; por $(\hat{A}) = \bigcup_{a \in A} S_{\epsilon_A}(a)$; y por A^+ la clase siguiente de A .

Teorema 1

Si A es una clase y R es una relación bien fundamentada sobre A entonces existe una única gráfica funcional f_A^R de A en \mathbb{U} tal que :

i) $\text{dom } f_A^R = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_R(A) \Rightarrow f_A^R(x) = \emptyset)$; y

iii) $(\forall x)(x \in A - M_R(A) \Rightarrow f_A^R(x) = \bigcup_{y \in S_R(x)} [f_A^R(y)]^+)$.

Además, en tal situación $(\forall x)(x \in A \Rightarrow f_A^R(x) \in \mathbb{O})$ y ($\text{rec } f_A^R$ es una clase ordinal).

demostración: La existencia y unicidad de f_A^R resulta de la aplicación del teorema de recurrencia transfinita a la R -gráfica de recurrencia \mathbb{N} de A .

en \mathcal{U} definida así : $H(\phi^*) = 0$ y si $x \in A$ y $F \in \mathcal{G}(S_R(x); \mathcal{U}) - \{\phi^*\}$ entonces $H(F) = \bigcup_{y \in S_R(x)} [F(y)]^+$.

Finalmente , por R-inducción transfinita se establece que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow \rightarrow T(\beta_A^R(x)))$ y que $T(\text{rec } \beta_A^R)$.

Definición: Bajo la nomenclatura del teorema 1, la gráfica β_A^R se denomina función rango sobre A asociada a R. Si $A = \mathcal{U}$ y $R = \epsilon_{\mathcal{U}}$ entonces notaremos $\text{rank} = \beta_{\mathcal{U}}^{\epsilon_{\mathcal{U}}}$ (es la función rango ordinaria sobre la clase universal) .

Corolario: Si A es una clase entonces existe una única gráfica funcional β_A de A en \mathcal{U} tal que : i) $\text{dom } \beta_A = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow \beta_A(x) = 0)$ y iii) $(\forall x)(x \in A - M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow \beta_A(x) = \bigcup_{y \in x \cap A} [\beta_A(y)]^+)$.

Además , en tal situación se verifica :

$$1.- \beta_{A|A} = \text{rank}_A \quad y \quad (\forall x)(x \in A \Rightarrow \text{rank}(x) = \text{rec } \beta_{A|A}) .$$

$$2.- \beta_{\mathcal{U}} = \text{rank} \quad y \quad (\forall x)(x \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{rank}(x) = \text{rec } \beta_{\mathcal{U}}) .$$

$$3.- \text{Si } A \text{ es una clase propia transitiva entonces } \text{rec } \beta_A = \emptyset .$$

$$4.- \text{Si } A \text{ es un conjunto transitivo entonces } \text{rec } \beta_A = \text{rank}(A) .$$

demonstración: Apíquese el teorema 1 a $R = \epsilon_A$.

1.- Basta aplicar R-inducción transfinita sobre A y tener presente que si $a \in A$ entonces $a \cap A = a$.

3.- Basta observar que si A es una clase propia entonces

$$(\forall x)(x \in \emptyset \Rightarrow (\exists y)(y \in A \wedge \text{rank}(y) > x)) .$$

4.- Basta tener presente que $\text{rank}(A) = \bigcup_{x \in A} [\text{rank}(x)]^+$ y $T(\text{rec } \beta_A)$.

Teorema 2

Si A es una clase y R es una relación bien fundamentada sobre A entonces existe una única gráfica funcional F_A^R de A en \mathcal{U} tal que :

$$\text{i) } \text{dom } F_A^R = A \quad ; \quad \text{ii) } (\forall x)(x \in M_R(A) \Rightarrow F_A^R(x) = 0) \quad ; \quad \text{y}$$

$$\text{iii) } (\forall x)(x \in A - M_R(A) \Rightarrow F_A^R(x) = \bigcup_{y \in S_R(x)} \{F_A^R(y)\}) .$$

Además , en tal situación se verifica $F_A^R = \beta_A^R$.

demonstración: La existencia y unicidad de F_A^R resulta de la aplicación del teorema de recurrencia transfinita a la R-gráfica de recurrencia H de A en \mathcal{U} definida así : $H(\phi^*) = 0$ y si $x \in A$ y $F \in \mathcal{G}(S_R(x); \mathcal{U}) - \{\phi^*\}$ entonces $H(F) = \bigcup_{y \in S_R(x)} \{F(y)\}$.

Finalmente , por R-inducción transfinita se establece que $F_A^R = \beta_A^R$.

Corolario: Si A es una clase entonces existe una única gráfica funcional F_A de A en \mathcal{U} tal que : i) $\text{dom } F_A = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow F_A(x) = 0)$ y iii) $(\forall x)(x \in A - M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow F_A(x) = \bigcup_{y \in x \cap A} \{F_A(y)\})$.
Además , en tal situación se verifica $F_A = \beta_A$.

Del corolario anterior resulta que $F_A = \text{rank}$; en consecuencia

$$(\forall x)(x \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{rank}(x) = \bigcup_{y \in x} \{\text{rank}(y)\}) .$$

Teorema 3

Si A es una clase y R es una relación bien fundamentada sobre A entonces existe una única gráfica funcional G_A^R de A en \mathcal{U} tal que :

- i) $\text{dom } G_A^R = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_R(A) \Rightarrow G_A^R(x) = 0)$ y iii) $(\forall x)(x \in A - M_R(A) \Rightarrow G_A^R(x) = \bigcup_{y \in S_{R^t}(x)} \{G_A^R(y)\})$.

Además , en tal situación se verifica $G_A^R = F_A^R = \beta_A^R$.

demostración: La existencia y unicidad de G_A^R resulta de la aplicación del teorema de recurrencia transfinita a la R^t -gráfica de recurrencia H de A en \mathcal{U} definida así : $H(\emptyset^*) = 0$ y si $x \in A$ y $F \in \mathcal{G}(S_{R^t}(x); \mathcal{U}) - \{\emptyset^*\}$ entonces $H(F) = \bigcup_{y \in S_{R^t}(x)} \{F(y)\}$; y observando que $M_R(A) = M_{R^t}(A)$.

Finalmente , por R -inducción transfinita se establece que $G_A^R = \beta_A^R$.

Corolario 1: Si A es una clase entonces existe una única gráfica funcional G_A de A en \mathcal{U} tal que : i) $\text{dom } G_A = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow G_A(x) = 0)$ y iii) $(\forall x)(x \in A - M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow G_A(x) = \bigcup_{y \in x} \{G_A(y)\})$.

Además , en tal situación se verifica $G_A = F_A = \beta_A$.

Corolario 2: Si A es una clase transitiva entonces existe una única gráfica funcional G_A de A en \mathcal{U} tal que : i) $\text{dom } G_A = A$; ii) $G_A(0) = 0$ y iii) $(\forall x)(x \in A - \{0\} \Rightarrow G_A(x) = \bigcup_{y \in x} \{G_A(y)\})$.

Además , en tal situación se verifica $G_A = \text{rank}|_A$

Corolario 3: Si A es un conjunto entonces $\text{rank}(A) = \text{rank}(\hat{A})$.

Teorema 4

Si A es una clase y R es una relación bien fundamentada sobre A entonces existe una única gráfica funcional J_A^R de A en \mathcal{U} tal que :

- i) $\text{dom } J_A^R = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_R(A) \Rightarrow J_A^R(x) = 0)$ y

iii) $(\forall x)(x \in A - M_R(A) \Rightarrow J_A^R(x) = \bigcup_{y \in S_R(x)} \{J_A^R(y)\})$.

Además , en tal situación se verifica $J_A^R = G_A^R = F_A^R = \beta_A^R$.

demostración: La existencia y unicidad de J_A^R resulta de la aplicación del teorema de recurrencia transfinita a la R -gráfica de recurrencia H de A en \mathcal{U} definida así: $H(\phi^*) = 0$ y si $x \in A$ y $F \in \mathcal{G}(S_R(x); \mathcal{U}) - \{\phi^*\}$ entonces $H(F) = \bigcup_{y \in S_R(x)} \{F(y)\}$.

Finalmente, por R -inducción transfinita se establece que $J_A^R = F_A^R$.

Corolario: Si A es una clase entonces existe una única gráfica funcional J_A de A en \mathcal{U} tal que: i) $\text{dom } J_A = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow J_A(x) = 0)$ y iii) $(\forall x)(x \in A - M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow J_A(x) = \bigcup_{y \in x \cap A} \{J_A(y)\})$.

Del corolario anterior resulta que $J_R = \text{rank}$; en consecuencia

$$(\forall x)(x \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{rank}(x) = \bigcup_{y \in x} \{\text{rank}(y)\})$$

Teorema 5

Si A es una clase transitiva tal que todos sus elementos son cerrados por clausuras transitivas y R es una relación bien fundamentada sobre A verificando $(\forall x)(x \in A \Rightarrow S_R(x) \subset \hat{x} \wedge P_R(\hat{x}) = \{y \in A : S_R(y) \subset \hat{x}\} \in \mathcal{U})$ entonces existe una única gráfica funcional L_A^R de A en \mathcal{U} tal que:

- i) $\text{dom } L_A^R = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_R(A) \Rightarrow L_A^R(x) = 0)$ y
 iii) $(\forall x)(x \in A - M_R(A) \Rightarrow L_A^R(x) = \bigcup_{y \in S_R(x)} \{L_A^R(y)\})$.

demostración: Se considera la relación T sobre A definida así: si $(x, y) \in A \times A$ entonces $(x, y) \in T \Leftrightarrow (\exists z)(z \in S_R(y) \wedge S_R(x) \subset \hat{z})$. Se demuestra que T es bien fundamentada sobre A y se aplica el teorema de recurrencia transfinita a la T -gráfica de recurrencia H de A en \mathcal{U} definida así: $H(\phi^*) = 0$ y si $x \in A$ y $F \in \mathcal{G}(S_T(x); \mathcal{U}) - \{\phi^*\}$ entonces $H(F) = \bigcup_{y \in S_T(x)} \{F(y)\}$, observando que $S_T(x) = \bigcup_{z \in S_R(x)} P(\hat{z})$ y que $M_T(A) = M_R(A)$.

Corolario: Si A es una clase supertransitiva tal que todos sus elementos son cerrados por clausuras transitivas, entonces existe una única gráfica funcional L_A de A en \mathcal{U} tal que: i) $\text{dom } L_A = A$; ii) $L_A(0) = 0$ y iii) $(\forall x)(x \in A - \{0\} \Rightarrow L_A(x) = \bigcup_{y \in x} \{L_A(y)\})$.

Además, en tal situación se verifica $L_A = \text{rank}_A$.

demostración: Obsérvese que si \hat{a} es un conjunto cerrado por clausuras transitivas entonces $\hat{a}^s = \bigcup_{x \in a} P(\hat{x})$.

Bibliografia

- 1.-ENDERTON H.B."Elements of set theory".Academic Press,New York(1977).
 - 2.-JECH T. "Set theory" . Academic Press . New York (1978) .
 - 3.- LEVY A. "Basic set theory" . Springer-Verlag . Londres (1979) .
 - 4.- TARSKI A."The notion of rank in axiomatic set theory and some of its applications" .Bull.Amer.Math.Soc.61(1955).p.443
-