Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

APROXIMACIONES DIOFANTICAS A CERO DE LOS POLINOMIOS COMPLEJOS GENERALIZADOS SOBRE UN CUERPO CUADRATICO IMAGINARIO

Emiliano Aparicio Bernardo

Dpto. de Matemáticas
Universidad del Pais Vasco (Euskal Herriko Unibertsitatea)

ABSTRACT.- Applying the method of linear forms discussed by the author in a former in |1| , it is obtained an upper bound deviating least from zero for the generalized complex polynomials of integer algebraic coefficients belonging to an imaginary quadratic field.

Consideremos una sucesión de funciones complejas

$$f_m(t) = \psi_m(t) + i\, \Psi_m(t) , \quad m = 1,2, \dots, \tag{1}$$

$\psi_m, \Psi_m \in L^2_{p(t)}(|a,b|)$, linealmente independientes sobre el cuerpo de los números complejos, siendo $p(t) \geq 0$ una función integrable según Lebesgue en $|a,b|$ que se anule a lo sumo en un conjunto de medida nula.

A las combinaciones lineales de las funciones (1):

$$P_n(t) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m f_m(t) , \tag{2}$$

donde $\alpha_m \in \mathbb{C}$, las llamaremos polinomios complejos generalizados, de grado $\leq n$, respecto del sistema (1).

Del mismo modo que en |1| se construye por el proceso de E. Schmidt un sistema ortonormal en $|a,b|$ de polinomios complejos generalizados

$$\omega_1(t), \dots, \omega_n(t), \dots, \tag{3}$$

o sea, tal que

$$\int_a^b \omega_m(t)\,\overline{\omega}_n(t)p(t)\,dt = \begin{cases} 0\,, & \text{sí} \quad m \neq n \\ 1\,, & \text{sí} \quad m = n. \end{cases} \tag{4}$$

La raya sobre ω denota el elemento complejo conjugado.

Fácilmente se demuestra que el determinante de Gram

$$\Delta_n = |a_{ik}| \quad , \qquad a_{ik} = \int_a^b \overline{f_i}(t) f_k(t) p(t)\,dt, \tag{5}$$

es real y positivo: $\Delta_n > 0$, |3|. Además, sí

$$f_n(t) = \sum_{s=1}^{n} b_{ns}\,\omega_s(t) \ , \tag{6}$$

resulta

$$\Delta_n = \prod_{k=1}^{n} b_{kk}^2 \tag{7}$$

Sea ahora $K = Q(\sqrt{D})$ un cuerpo cuadrático imaginario, siendo $D < 0$ un entero racional exento de cuadrados. Denotaremos por ω el número básico del campo K:

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{D} \ , & \text{sí} \quad D \equiv 2,3 \pmod 4 \\ \dfrac{1+\sqrt{D}}{2}, & \text{sí} \quad D \equiv 1 \pmod 4 \end{cases} \tag{8}$$

de modo que $\omega = ih$, $h = \operatorname{Im}\omega = \sqrt{|D|} > 0$ en el 1er caso, mientras que $\omega = 1/2 + ih$, $h = \operatorname{Im}\omega = 1/2\sqrt{|D|} > 0$ en el 2° caso.

A continuación, demostraremos el siguiente teorema, enunciado en |1| :

TEOREMA.- Siempre existe un polinomio complejo generalizado $P_n(t)$ de la forma (2), de coeficientes enteros algebraicos $\alpha_m \in K = Q(\sqrt{D})$, no simultáneamente nulos, tal que

$$J = \int_a^b |P_n(t)|^2\, p(t)\,dt \leq 2nh\ \Delta_n^{1/n} \ . \tag{9}$$

DEMOSTRACION.- En virtud de (6), cualquier polinomio de este tipo puede expresarse en la forma

$$P_n(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \alpha_m b_{ms}\, \omega_s(t) \ , \tag{10}$$

y, por tanto, teniendo en cuenta (4), para la integral (9), resulta:

$$J = \sum_{s=1}^{n} |A_s|^2 \ , \tag{11}$$

siendo

$$A_s = \sum_{m=s}^{n} \alpha_m b_{ms} \ , \qquad s = 1,2,\ldots,n \tag{12}$$

Consideremos el caso $D \equiv 2,3 \pmod 4$. Los enteros algebraicos $\alpha_m \in K$ pueden expresarse en la forma

$$\alpha_m = t_{2m-1} + t_{2m}\,\omega \quad , \qquad t_n \in Z. \tag{13}$$

Sustituyendo (13) en (12), separando las partes reales e imaginarias y pasando a módulos, fácilmente obtenemos que

$$|A_s|^2 = \xi_{2s-1}^2 + \xi_{2s}^2 \quad , \qquad s = 1,2,\ldots,n \tag{14}$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_{2s-1} &= b_{ss} t_{2s-1} + \sum_{k=2s+1}^{2n} \gamma_k^{(s)}\, t_k \ , \\ \xi_{2s} &= b_{ss} h t_{2s} + \sum_{k=2s+1}^{2n} \delta_k^{(s)}\, t_k \ , \end{aligned} \tag{15}$$

son reales, ya que b_{ss}, h, $\gamma_k^{(s)}$ y $\delta_k^{(s)}$ son todos reales. Entonces, (11) se expresa en la forma:

$$J = \sum_{k=1}^{2n} \xi_k^2 \ . \tag{16}$$

Aplicando el teorema de Minkowski de las formas lineales al sistema (15), deducimos que existe un sistema de números enteros racionales t_k, $k = 1,\ldots,2n$, no simultáneamente nulos, tal que

$$|\xi_k| \leq \Delta^{1/2n} \ , \qquad k = 1,2,\ldots,2n, \tag{17}$$

donde Δ es el determinante del sistema:

$$\Delta = h^n \prod_{k=1}^{n} b_{kk}^2 = h^n \ \Delta_n \ . \qquad (18)$$

Para estos t_k, obtendremos en (13) unos enteros algebraicos $\alpha_k \in K$, no simultáneamente nulos, para los que se verifica (9). De un modo similar se obtiene el mismo resultado en el caso $D \equiv 1 \pmod 4$. El teorema queda demostrado.

Llamando ahora

$$\sigma_n^{-2n} = \inf \int_a^b |P_n(t)|^2 \ p(t) \ dt \ , \qquad (19)$$

donde el ínfimo se extiende a todos los polinomios (2) con coeficientes enteros algebraicos $\alpha_m \in K$, no simultáneamente nulos, podemos ahora afirmar que

$$\sigma_n^{-2n} \leq 2\,n\,h \ \Delta_n^{1/n} \ . \qquad (20)$$

Fácilmente se obtienen resultados similares para las aproximaciones uniformes a cero.

El caso de polinomios reales en varias indeterminadas puede verse en |2|.

BIBLIOGRAFIA

|1| APARICIO BERNARDO, E.: "Método de formas lineales para la acotación de las desviaciones mínimas a cero de los polinomios generalizados de coeficientes enteros".
Actas de las 1as Jornadas Matemáticas Luso-Españolas, Lisboa-Madrid, 1972, 133-143.

|2| ------: "Generalización de un teorema de M. Fekete para polinomios de coeficientes enteros en varias indeterminadas".
Revista Matemáticas Hispano-Americana, 4a Serie, Tomo XXXVI, N°4, Madrid, 1976, 105-124.

|3| POLYA, G. - SZEGO, G.: "Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysys".
Erster band. Verlag von J. Springer, Berlín, 1925.