Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

CONJUNTOS DE INTERPOLACION PARA FUNCIONES HOLOMORFAS Y REGULARES EN LA FRONTERA

Joaquim Bruna

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract.- En esta comunicación, después de exponer esquemáticamente la situación, en lo que a resultados y problemas abiertos se refiere, del área en cuestión, presentamos la solución a uno de esos problemas abiertos: la caracterización de los conjuntos cerrados de la circunferencia que son de interpolación para las funciones holomorfas en el disco unidad y diferenciables en su adherencia.

El área en la que esta comunicación se encuadra es la del comportamiento en la frontera de funciones holomorfas, área a nuestro juicio actualmente en "efervescencia". Nuestra intención es presentar la situación en un aspecto de esta teoria así como nuestra aportación al mismo.

El aspecto al que nos referimos es el estudio de los llamados conjuntos excepcionales para clases de funciones con regularidad fuerte en la frontera, clases que a continuación definimos.

D es el disco unidad del plano complejo, T la circunferencia unidad. A designa el *álgebra del disco*, formada por las funciones holomorfas en D y contínuas en $\bar{D}$. Si p es un entero positivo, ponemos

$$A^p = \left\{ f \in A \ : \ f^{(j)} \in A,\ j = 0, \ldots, p \right\}$$

y si $s > 0$ es no entero y $p = [s]$, A^s designa el subespacio de A^p formada por aquellas $f \in A^p$ cuya p-sima derivada satisface en $\bar{D}$ una condición de Lipschitz de orden s-p. Finalmente, ponemos $A^\infty = \bigcap_p A^p$.

Un conjunto cerrado $E \subset T$ se llama *un cero* para A (resp. A^p, A^s, A^∞) si existe $f \in A$ (resp. A^p, A^s, A^∞) tal que $E = \{e^{it} \mid f(e^{it}) = 0\}$. Se llama *de pico* para A (resp. A^p, A^s, A^∞) si existe f en la clase tal que $|f(z)| < 1$ para $z \in \bar{D}/E$ i $f(z) = 1$ si $z \in E$.

Si f está en una de esas clases, su restricción a T está respectivamente, en los espacios $C(T)$, $C^p(T)$, $\mathrm{Lip}(s,T)$ o $C^\infty(T)$ (y reciprocamente).

E se llama *de interpolación* para A (resp. A^p, A^s, A^∞) si dada $\phi \in C(T)$ (resp. $C^p(T)$, $\mathrm{Lip}(s,T)$, $C^\infty(T)$), existe f en A (resp. A^p, A^s, A^∞) tal que

$$\frac{d^j f}{dt^j}(e^{it}) = \frac{d^j \phi}{dt^j}(e^{it})$$

para $e^{it} \in E$, $j = 0$ en el caso A, $j = 0,\dots,p$ en el caso A^p y A^s ($p = [s]$) y todo j en el caso A^∞.

El problema es caracterizar estos conjuntos para cada una de esas clases. Hasta hace poco, la situación era la descrita en el cuadro siguiente:

	A	A^p	$A^s (s > 1)$	$A^s (s < 1)$	A^∞
cero	$\lvert E\rvert = 0$	conjunto de Carleson	Conjunto de Carleson	Conjunto de Carleson	Conjunto de Carleson
pico	$\lvert E\rvert = 0$	finito	finito	?	finito
interpolación	$\lvert E\rvert = 0$	?	K-conjunto (en [3])	K-conjunto (en [3])	ATW-conjunto (en [1])

En el cuadro anterior, $|E|$ es la medida de Lebesgue de E. Si $\rho(e^{it})$ es la función distancia a E, E se llama un *conjunto de Carleson* si $\log \rho \in L^1(T)$. Se llama un *ATW-conjunto* si además

$$\frac{1}{|I|}\int_I -\log \rho \, dt \leq \text{const} \log \frac{1}{|I|} + \text{const}$$

para todo arco $I \subset T$ y se llama un *K-conjunto* si

$$\sup \{\rho(e^{it}),\ e^{it} \in I\} \geq \text{const}\ |I|.$$

Todas estas condiciones expresan propiedades del "repartimiento" del conjunto E. Naturalmente, todas ellas pueden expresarse en términos de la sucesión (ρ_n) de longitudes de las componentes conexas del complementario de E. Una cuestión importante a destacar creemos que es el hecho de que mientras la condición de Carleson es una condición "absoluta" y depende tan sólo de la magnitud de los ρ_n, las otras condiciones son bastante más sutiles y dependen no sólo del tamaño de las ρ_n sinó también de su posición "relativa".

En el cuadro anterior vemos pues como problemas abiertos la caracterización de los conjuntos de pico para A^s con $0<s<1$ y la de los conjuntos de interpolación para A^p con p entero y positivo.

Respecto al primer problema diremos tan sólo que existe una conjetura en el sentido de que son aquellos conjuntos tales que $\rho^{-s}\in L^1(T)$; nosotros creemos que esta conjetura no es muy buena en el sentido apuntado más arriba, de que es ésta una condición absoluta y no depende de la situación relativa de las componentes del complementario de E.

Respecto la segunda, quizá sea bueno el comentar cuales son las técnicas en los otros casos para ver así donde radican las dificultades.

Para A, las técnicas son las de las álgebras uniformes, con el uso de las medidas ortogonales. En el caso A^∞ se procede por dualidad, haciendo uso de que se tiene una transformación de Borel

$$\hat{T}(z)=T\left(w+\frac{1}{w-z}\right)\ ,\quad Z\notin\bar{D}\ ,\quad T\in(A^\infty)'$$

que representa el dual de A^∞ en un espacio de funciones holomorfas en el exterior del disco. Finalmente, para $A^{\underline{s}}$, la propiedad esencial es su estabilidad por conjugación (la análoga de la transformada de Hilbert en la circunferencia). No existen resultados análogos a éstos en el caso A^p y ello es la razón por la cual estos resultados no se extienden a este caso.

Nuestra aportación es la caracterización, mediante técnicas constructivas, de los conjuntos de interpolación para A^p. Nuestros resultados pueden sintetizarse en el teorema que sigue. De él quisiéramos destacar la conexión que establece con el conocido espacio BMO de las funciones con oscilación media acotada.

<u>Teorema</u>.- Un conjunto cerrado $E\subset T$ es de interpolación A^p si y sólo si cumple las siguientes propiedades que son equivalentes

(a) E es un K-conjunto.

(b) para todo $I\subset T$, $\frac{1}{|I|}\int_I \log\rho \le \log|I|\text{-const}$

(c) existe $0<\alpha<1$ tal que $\frac{1}{|I|}\int_I \rho^{-\alpha}\le \text{const}\,|I|^{-\alpha}$

(d) existe $0<\alpha<1$ tal que $\frac{1}{|I|}\int_I \rho^{\alpha}\ge \text{const}\,|I|^{\alpha}$

(e) existe $0<\alpha<1$ tal que para todo I

$$|\{x \in I : \rho(x) \leq r\}| \leq \text{const } |I| \left(\frac{r}{|I|}\right)^{\alpha}, \; r > 0$$

(f) $\log \rho \in L^1(T)$ y $P[\log \rho](z) \geq \log(1-|z|)$-const

(g) $\log \rho \in L^1(T)$ y $\left|P[\log \rho](z) - \log \rho(z)\right| \leq$ const.

Cada una de estas condiciones implica que $\log \rho \in BMO$. //

Comentarios a hacer sobre el mismo son los siguientes: en primer lugar, la condición no depende de p, y es la misma que para los A^S. Esto último es natural y era lógico de esperar. En segundo lugar, y a la vista de la condición (b), hay conjuntos de interpolación para A^∞ que no lo son para A^p, lo cual ya es algo más sorprendente. Un ejemplo es $E = \{\exp \frac{i}{n}\} \cup \{1\}$.

Dejando aparte la demostración de la equivalencia de las condiciones así como de la necesidad de las mismas, la técnica en la demostración de la suficiencia es como sigue:

1°Construir funciones externas F(z) que se anulen,ella y sus derivadas en los puntos de E.

2°Dada $\phi \in C^p(T)$, extenderla a $\bar{D}$, resolver $\bar{\partial}\mu = \bar{\partial}\phi/F$ en D y poner $f = \phi - \mu F$. Entonces $\bar{\partial} f = \bar{\partial}\phi - \bar{\partial}(\mu F) = \bar{\partial}\phi - (\bar{\partial}\mu)F = 0$.

El problema está en controlar el crecimiento de ϕ y de F a fin de que f satisfaga todos los requerimientos.

3°El crecimiento (óptimo) de ϕ puede conseguirse con el teorema de extensión de Whitney. El crecimiento óptimo de F sería del tipo

$$|F(z)| \sim \rho(z)^p$$

$$|F^{(n)}(z)| \leq \text{const } \rho(z)^{p-n}, \; n = 0, \ldots, p.$$

La construcción de estas F con este crecimiento óptimo es una de las partes técnicas difíciles y ya fue resuelta por Dynkin en el caso A^S. Nuestra contribución aquí es construir estas funciones usando precisamente las técnicas de BMO.

4°Con F de este estilo adecuadas, demostrar las estimaciones siguientes para

$$|\partial^{(j)}\mu(z)| = o(\rho(z)^{-j-\varepsilon}, \; j = 0, \ldots, p.$$

Para más detalles nos referimos a [2].

REFERENCIAS

[1] H. Alexander- B.A.Taylor- D.L.Williams, "The interpolating sets for A , " J. Math. Anal. Appl., 36,1(1971), 556-568.

[2]. J. Bruna, "Boundary interpolation sets for holomorphic functions smooth at the boundary and BMO". Aparecerá en Transactions of the A.M.S. (El anuncio del resultado principal en Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1980, 1e Semestre, T.290, N°1)

[3]. E.M. Dynkin, "Sets of free interpolation for Holder classes, Mat. Sbornik, 1979, 109(151), 1(5).