Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

ALGUNOS PROBLEMAS DEL ANALISIS ARMONICO

Antonio Córdoba

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad Autónoma de Madrid

Abstract.- Several results describing the behavior of the Fourier transform in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, are presented, namely restriction theorems and multipliers results. An introduction to these problems is intended conecting them with the theory of X-rays difraction and the uncertainity principle of Quantum Mechanic.

[A] LA TRANSFORMACION DE FOURIER

Uno de los hechos más espectaculares de la Matemática Contemporánea es el papel, cada vez más importante, que la transformación de Fourier desempeña en áreas tan diversas como las ecuaciones diferenciales, teoría de números y física matemática, entre otras. Dicha transformación está definida, para funciones adecuadas f, por medio de la fórmula

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\,dx.$$

Una porción importante del Análisis Matemático moderno está relacionado con el estudio de dicha integral y de las relaciones entre las propiedades de f y las de su transformada. A continuación vamos a enunciar algunas de las piezas básicas de la maquinaria de la transformación de Fourier.

(a) Fórmula de inversión y Teorema de Plancherel.- Para las funciones adecuadas tenemos que:

$$[I]\quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\,\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

$$[II]\quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi \quad \text{o, más generalmente:}\quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$$

Un espacio de funciones adecuadas (para quienes las fórmulas I y II tienen sentido) es, por ejemplo, el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) =$
$=\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$.

Claramente la fórmula [II] nos permite extender la transformación de Fourier como un operador unitario del espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(b) Comportamiento con respecto a la derivación.- Para toda función f del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y todo multi-índice $\alpha \in N^n$ se verifica que

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Es decir, la transformación de Fourier convierte a una operación complicada, como la derivación, en otra mucho más sencilla como es la multiplicación.

(c) Comportamiento con respecto a las transformaciones de $\mathbb{R}^n$: traslaciones, rotaciones y dilataciones.

(i) Si definimos la traslacion $\tau_a f(x) = f(x+a)$, resulta que $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{2\pi i\xi.a}\hat{f}(\xi)$.

(ii) Si ρ es una rotación alrededor del origen tenemos que

$$\widehat{f \circ \rho}(\xi) = \hat{f}(\rho(\xi)).$$

(iii) Dado $\delta>0$ consideramos la dilatación $f_\delta(x) = f(\delta x)$, entonces

$$\hat{f}_\delta(\xi) = \delta^{-n}\hat{f}(\delta^{-1}.\xi)$$

(d) Una fórmula.- La función $\phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ coincide con su transformada $\hat{\Phi} = \Phi$

Podemos combinar las identidades (d) y (iii) de (c) para obtener la familia de fórmulas

$$\widehat{e^{-\pi\delta|x|^2}}(\xi) = \delta^{-n/2} \quad e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\delta}},$$

que expresan una primera versión de la dualidad entre f y $\hat{f}$ en el sentido siguiente: Si f "vive" en una bola de diámetro d su transformada "vive" en la "bola dual", de diámetro d^{-1}, etcétera.

[8] EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

Una de las maneras posibles de precisar la observación precedente puede ser la desigualdad de Heisemberg: Supongamos que f es una función de cuadrado integrable y sean x_0, ξ° dos puntos arbitrarios de $\mathbb{R}^n$, tenemos que,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|x-x_0\|^2|f(x)|^2dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n}\|\xi-\xi^\circ\|^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2} \geq C_n\|f\|_2^2$$

donde $C_n>0$ es una constante que sólo depende de la dimensión. En particular podemos tomar $C_1 = \frac{1}{4\pi}$.

La demostración es tan corta que podemos presentarla en un momento. Consideremos el caso sencillo, pero típico, en el que $n=1$, $x_0=\xi^\circ=0$ y $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función real. Por un argumento de densidad basta con probar la desigualdad para funciones lisas f. Tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)^2dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)f'(x)dx \leq 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 4\pi\left(\int x^2|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int\xi^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}.$$

Esta sencilla demostración se debe a H. Weyl. Una característica importante de ella reside en la utilización de la transformada de Fourier como instrumento matemático adecuado para modelar la mecánica cuántica. Merece la pena que nos detengamos un poco en este punto, considerando el formalismo de la mecánica de una partícula unidimensional:

(1) Un estado de la partícula es una función $\Psi \in L^2(R)$*, llamada la función de ondas o amplitud de probabilidad. La interpretación se basa en la hipótesis de que la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo* $I \subset R$ *viene dada por* $\int_I |\Psi(x)|^2 dx$*; naturalmente la probabilidad total debe ser igual à 1, es decir* $\|\Psi\|_2 = 1$.

(2) Un observable es un operador simétrico T*. La media de* T *en el estado* $\Psi \in D(T)$ *viene dada por la integral*

$$\mu(T) = \int \overline{\Psi(x)}\, T\Psi(x)dx.$$

Dos observables muy importantes, la posición y el momento, están asociados a los operadores siguiente

$$P\Psi(x) = x.\Psi \ , \ D(P) = \{\Psi | \Psi \in L^2, \ x\Psi \in L^2\}$$
$$M\Psi(x) = (2\pi i)^{-1} D\Psi(x), \ D(M) = \{\Psi | \Psi \in L^2, \ \Psi' \in L^2\}.$$

En particular, si calculamos el valor medio de $M^n = M\circ \dots \circ M$ *en el estado* Ψ*, resulta que* $\mu(M^n) = \int \xi^n \, |\hat{\Psi}(\xi)|^2 \, d\xi$ *por el teorema de Plancherel. Resulta por lo tanto natural considerar a* $\int_I |\hat{\Psi}(\xi)|^2 \, d\xi$ *como la probabilidad de que el momento de la partícula se encuentre situado en el intervalo* $I \subset R$.

La interpretación de la desigualdad de Heisenberg es ahora muy sencilla: Si sabemos, con un error pequeño, que la partícula está en punto $x_\circ$ *, la integral* $\left(\int (x-x_\circ)^2 \, |\Psi(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$ *debe ser muy pequeña y, por lo tanto, cualquiera que sea el punto* ξ°*, la integral* $\left(\int |\xi-\xi^\circ|^2 \, |\hat{\Psi}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}$ *debe ser muy grande (ya que el producto de las dos es* $\geq (4\pi)^{-1}$ *, es decir que el error cometido al medir el momento es muy grande, etc.etc.*

[C] DIFRACCION DE RAYOS X

Entre los problemas más difíciles de la Química se encuentra el de descubrir la estructura espacial de moléculas complicadas y uno de los métodos más poderosos que tienen a su alcance los químicos para resolverlo, está basado en las propiedades de difracción de rayos X a través de cristales. Desgraciadamente no disponemos de tiempo ni espacio para considerar con más detalle el modelo físico y nos contentaremos con esbozar las matemáticas: Sea $\rho(x)$ *la función de densidad electrónica del cristal,* $\rho \geq 0$*, y supongamos que en el experimento se utiliza una radiación incidente en forma de un haz paralelo de rayos monocromá-*

ticos. Sea P un punto cuya distancia al cristal es muy grande en comparación con el tamaño del cristal. En estas circunstancias la radiación difractada que llega a P, que podemos suponer que lo ha sido por el mismo ángulo por todas las partículas del cristal, descrita por la función de ondas difractada $\Psi(y)$. La relación entre Ψ y ρ viene dada por la fórmula de Fourier (cuando las normalizaciones adecuadas han sido tomadas en cuenta):

$$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.y} \rho(x)dx.$$

En la práctica tan sólo el valor absoluto de Ψ es conocido por experimentos puesto que la fase de una función de ondas se pierde, por lo general, en las medidas. EL PROBLEMA DE LA FASE consiste en encontrar ρ conociendo el comportamiento asintótico de $|\hat{\rho}|$. En un caso especial muy importante, si la densidad ρ está concentrada sobre una curva de curvatura y torsión positiva, la respuesta es afirmativa. Este resultado está relacionado con el descubrimiento de la estructura helicoidal del DNA.

[D] TEOREMAS DE RESTRICCION

A continuación vamos a considerar el resultado siguiente de C. Fefferman, E. Stein y A. Zygmund:

$$\left(\int_{S^1} |\hat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi)\right)^{1/q} \leq A_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

Siempre que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \frac{4}{3}$, $\frac{1}{q} \geq 3\left[1 - \frac{1}{p}\right]$.

Este resultado es el prototipo de "Teoremas de restricción" por la razón siguiente: La desigualdad "a priori" anterior implica que $\hat{\ }: L^p(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^q(S^1)$ tiene una extensión única acotada. En principio $\hat{f}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ $p > 1$, sólo está definida en casi todo punto (es decir, salvo conjuntos de medida cero) y, sin embargo, el teorema de restricción permite hablar de $\hat{f}/S^1$ como función de $L^q(S^1)$.

Teorema.- Consideremos en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, una curva Γ de clase C^k, $k > n$, de ecuación $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y supongamos que para todo punto $t \in [0,1]$ el conjunto de vectores $\{\gamma^{(k)}(t)\}_{k=1,2,\dots,n}$ es linealmente independiente. Entonces existe $C_{p,q} < \infty$ tal que $\|\hat{f}\|_{L^q(\Gamma)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $1 \leq p < \frac{n^2+2n}{n^2+2n-2}$, $\frac{1}{q} \geq \frac{n(n\ 1)}{2}\left[1 - \frac{1}{p}\right]$ (Este teorema de E. Prestini ha sido recientemente extendido por A. Ruiz al caso de curvas tales que, para todo t, existe $N \geq n$ tal que $\{\gamma^{(k)}(t)\}_{k=1,\dots,N}$ general el espacio $\mathbb{R}^n$).

Idea de la demostración.- Consideremos el caso típico siguiente $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$, $n=3$, Observemos que, en este caso, $1 \leq p < \frac{15}{13}$ y $p' > \frac{15}{2}$ (>6).

La primera idea consiste en usar un argumento de dualidad (desigualdad de Höl-

der, teorema de Hausdorff-Young...) para convertir el teorema de restricción en otro de extensión (es decir, de difracción de rayos X siguiendo con nuestro lenguaje anterior).

Sea $f(t)$ *una función lisa y* $\widehat{fd\sigma}$ *la transformada de Fourier de la distribución* $fd\sigma$ *. ¿Qué podemos afirmar acerca del tamaño de* $\widehat{fd\sigma}$*?. Con un* $\delta>0$ *pequeño consideremos un collar de* γ *dado por* $\sum_{j=1}^{[\delta^{-1}]} \psi_j(\xi)$ *, donde* ψ_j *es la función característica de un rectángulo adaptado a la curva en el punto* $\xi_j = (j\delta,\ j^2\delta^2,\ j^3\delta^3)$ *(es decir un rectángulo centrado en* ξ_j *y con dimensiones:* δ*-en la dirección tangencial,* δ^2*-en la normal y* δ^3*-en la binormal).*

Sea $$F_\delta(\xi) = \delta^{-6} \sum_{j=1}^{[\delta^{-1}]} f(\xi_j)\ \psi_j(\xi).$$

Si hemos sido cuidadosos en la elección del collar es fácil ver que $F_\delta(\xi)d\xi \longrightarrow fd\sigma$ *en el sentido de las distribuciones.*

Nuestro resultado sería entonces una consecuencia inmediata de la siguiente desigualdad: $$\delta^{-6}\| \widehat{\Sigma a_j\psi_j} \|_{p'} \le C(\Sigma|a_j|^{q'}\delta)^{1/q'}$$

donde $1/p+1/p'=1$, $1/q+1/q'=1$ *son los exponentes duales de los considerados en el teorema.*

Si tenemos en cuenta que $p'>6$ *y definimos* s *por medio de la fórmula* $\frac{3}{p'}+\frac{1}{s}=1$

$$\left|\int |\Sigma a_j a_k a_l\ \hat{\psi}_j\ \hat{\psi}_k\ \hat{\psi}_l|^{\ p'/3}\ d\xi\right|^{\frac{3}{p'}\cdot\frac{1}{3}} \le C\left|\int |\Sigma a_j a_k a_l\ \psi_j * \psi_k * \psi_l(x)|^s dx\right|^{1/s.1/3} \le$$

$$\le C(\ \Sigma|a_j a_k a_l|^s \int\ |\psi_j*\psi_k*\psi_l(x)|^s dx)^{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{3}}$$ *, siendo la última desigualdad debida a que el solapamiento de los conjuntos* $sop(\psi_j*\psi_k*\psi_l)$ *es finito, uniformemente en* δ*. Hecho que puede probarse por un sencillo argumento geométrico que depende, crucialmente, de que la torsión y curvatura de* γ *son positivas.*

Por lo tanto nuestro problema queda reducido a calcular:

(i) $\|\psi_j*\psi_k*\psi_l\|_\infty$

(ii) $\mu\{\ sop(\psi_j*\psi_k*\psi_l)\}$.

Teniendo en cuenta que el vector tangente considerado en el punto ξ_j *viene dado por* $\delta(1, 2\delta j, 3\delta^2 j^2)$*, es fácil ver que*

$$\mu\{\ sop(\psi_j*\psi_k*\psi_l)\}\ \le\ C\ \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j\pm 1, & k\pm 1, & l\pm 1 \\ (j\pm 1)^2, & (k\pm 1)^2, & (l\pm 1)^2 \end{vmatrix}$$

donde la suma está extendida a todas las posibles elecciones de signo en cada uno de los términos. Es decir

$$\mu\ \{\ sop(\psi_k*\psi_k*\psi_l)\} \le C\delta^6(|j-k|+1)(|k-l|+1)(|l-j|+1)$$

Observemos ahora que $\psi_j * \psi_k * \psi_l$ *coincide con* $\|\psi_j * \psi_k * \psi_l\|_\infty$ *en más de la novena parte de* $sop\{\psi_j * \psi_k * \psi_l\}$ *. Es decir*

$$\delta^{18} = \int \psi_j * \psi_k * \psi_l(x)dx \geq \frac{1}{q} \|\psi_j * \psi_k * \psi_l\|_\infty \cdot \mu\{sop(\psi_j * \psi_k * \psi_l)\}$$ *y, por tanto:*

$$\|\psi_j * \psi_k * \psi_l\|_\infty \leq C \qquad \frac{\delta^{12}}{(|j-k|+1)(|k-l|+1)(|l-j|+1)}$$ *quedando nuestro problema reducido a calcular*

$$\sum \frac{|a_j|^s \; |a_k|^s \; |a_l|^s}{|(|j-k|+1)(|j-l|+1)(|l-k|+1\;|^{s-1}} .$$

Cálculo que puede llevarse a cabo por los método usuales de integración fraccionaria e interpolación.

Este resultado es el mejor posible en el caso $n = 2$*, pero para* $n \geq 3$ *es un problema abierto decidir si se puede o no mejorar las restricciones sobre el exponente p. Otra extensión muy importante del teorema de Fefferman-Stein-Zygmund consiste en mantener la codimensión igual a uno. Por ejemplo, la siguiente pregunta está por decidir en el caso* $n \geq 3$*:*

¿Para qué parejas de exponentes p,q existe la desigualdad a priori siguiente

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\hat{f}|^q d\sigma \right)^{1/q} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} ?$$

El mejor resultado conocido en este sentido se debe a P. Tomas:

<u>*Teorema*</u>*.- Si* $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$, $n > 1$*, existe* $C_p < \infty$ *tal que*

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\hat{f}(\theta)|^2 \, d\sigma(\theta) \right)^{1/2} \leq C_p \|f\|_p .$$

Estos resultados tienen aplicaciones al problema de sumabilidad esférica de series de Fourier. El teorema de Tomas ha sido extendido por otros autores, Córdoba-Stein y Strickhartz, a otras superficies como el cono en $\mathbb{R}^n$ *, utilizando el método de interpolación compleja de E.M. Stein. Resultados que tienen aplicaciones al estudio de ciertas ecuaciones, del tipo de la de Klein-Gordon, y que, junto con los fenómenos enconctrados en teoría de diferenciación de integrales (conjuntos de Kakeya y Nikodym), parecen apuntar hacia una teoría de la medida más fina que la de Lebesgue.*